

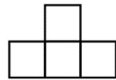
Трета Мала Македонска Олимпијада 2024

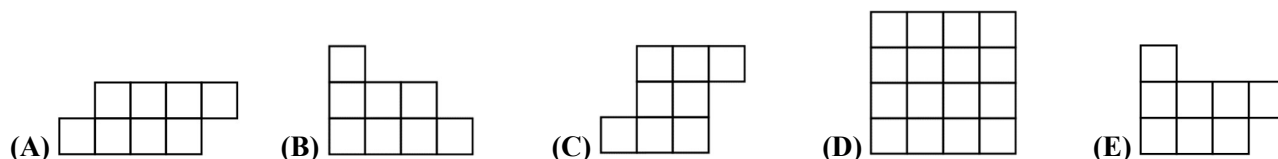
Скопје, Машински факултетт, 15.09.2024 година

Четврто одделение

Секоја од задачите од 1-4 носи по 4 поени. Секоја од задачите од 5-8 носи 5 поени. Време за работа 1 час и 30 минути. Не е дозволена употреба на било какви помагала, освен дигитрон и пенкало.

Задачи

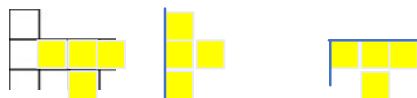
1. Кој од следните цртежи не може да се направи со користење на фигури од облик  (квадратчињата не смеа да се преклопуваат) ?



Решение.//Очигледно е дека фигурите од А до D може да ги направи. Тоа може да се види од предложените цртежи.



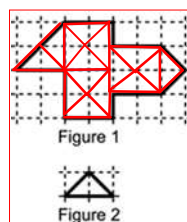
Единствено не може да се направи фигурата по Е. На следните три цртежи имаме една фигура со која сакаме да направиме препокривање, на секој цртеж:



Од поставувањето на една фигура јасно е дека втора фигура не може да се постави. Значи, точен е одговорот под Е).

2. Самоил сака фигурата дадена на цртежот(види фигура 1) да ја раздели на мали триаголници(види фигура 2). Колку најмногу мали триаголници тој ќе добие?

(A) 8 (B) 12 (C) 14 (D) 15 (E) 16



Решение.//Не е тешко да се види дека тој може да направи точно 15 мали триаголници-како што е прикажано на цртежот.

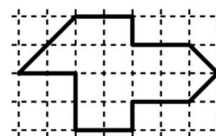


Figure 1



Figure 2

3. Кате и Мими собираат стикери. Кате има 360 стикери повеќе од Мими. Ако Мими и даде 24 стикери од нејзините на Кате, тогаш Кате ќе има 4 пати повеќе стикери од Мими. Колку стикери имаат две заедно?

A)152 B)160 C)520 D)640 E)680

Решение.//Нека Мими има x стикери. Ако Мими и даде на Кате 24 стикери, тогаш тие ќе имаат

Мими $x-24$ стикери

Кате $x+360+24$ стикери.

Но тогаш ќе имаме

$$4(x-24) = x+384$$

$$4x - 96 = x + 384$$

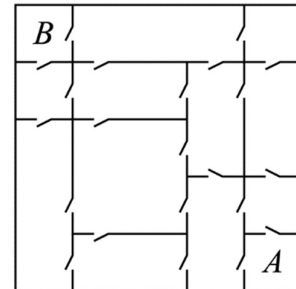
$$3x = 480$$

$$x = 160.$$

Значи на почетокот тие имале Мими имала 160 стикери а Кате имала 520 стикери. Вкупно имале 680 стикери.

4. Локалната библиотека има две соби-читални. Соба А и соба В. Собите се меѓу себе поврзани со врати. Секоја соба со своите соседни соби по една врата. Низ колку најмалку врати Катерина ќе помине за да премине од собата А до собата В?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7



Решение.//Бројот на соби во кои Катерина мора да престојува е 5,6,7(тука ги рачунаме и собите А и В). Бројот на врати е за едн помал од бројот на соби во кои таа мора да престојува. Според тоа, најмал број на врати кои таа мора да помине е 4.

5. Даден е правоаголен лист хартија со димензии 192x84. Сечајќи го листот по само една линија се добива квадрат. Потоа истото го правиме со преостанатиот правоаголен лист. Истото го правиме се додека можеме, односно додека не се добие лист кој веќе не може да се сече. Колкава е должината на страната на најмалиот квадрат кој може така да се добие?

- (A) 1 mm (B) 4 mm (C) 6 mm (D) 10 mm (E) 12 mm

Решение.//Со една линија можеме да отсечеме еден квадрат и ќе остане правоаголник со страни 108x84. Ако пак со една линија отсечеме еден квадрат со страна 84 ќе ни остане правоаголник со страни 24x84. Сега со едниот пресек можеме да отсечеме квадрат со страна 24. Ќе ни остане правоаголник со димензии 60x24. Од него можеме да отсечеме поново квадрат со страна 24. Ќе ни остане правоаголник со димензии 36x24. Од последниот правоаголник можеме да исечеме нов квадрат со страна 24. Ќе ни остане правоаголник со димензии 12x24. Од него можеме да исечеме два квадрати со страна 12. Значи, најмалиот квадрат кој можеме да го исечеме е квадрат со страна 12.

6. Во ребусот $KEN = G.U + R.U$ со различни букви се означени различни цифри, а со исти букви се означени исти цифри. Определете ја разликата меѓу најголемиот и најмалиот трицифрен број KEN.

- A)10 B)15 C)20 D)25 E)30

Решение.//Јасно е дека KEN ќе биде најголем трицифрен број, ако U, G и R имаат најголеми вредности, а U е најголем меѓу нив. Тоа е можноста $U=9, G=8, R=7$. Тогаш имаме

$$G \cdot U + R \cdot U = 7 \cdot 9 + 8 \cdot 9 = 63 + 72 = 135.$$

Бидејќи $1 < 3 < 5$, тоа е најголем број кој може да биде решение. За случаите $U = 1, 2, 3, 4, 5$ за $G.U + R.U$ добиваме најмногу двоцифрен број, и таа варијанта не може да се решенија на ребусот. За

$$U = 1 \text{ најмал број се добива за } G = 2, R = 3, \text{ т.е. } G \cdot U + R \cdot U = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 3 + 2 = 5$$

$$U = 2 \text{ најмал број се добива за } G = 3, R = 4, \text{ т.е. } G \cdot U + R \cdot U = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14$$

$$U = 3 \text{ најмал број се добива за } G = 4, R = 5, \text{ т.е. } G \cdot U + R \cdot U = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 12 + 15 = 27$$

$$U = 4 \text{ најмал број се добива за } G = 5, R = 6, \text{ т.е. } G \cdot U + R \cdot U = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 20 + 24 = 44$$

$$U = 5 \text{ најмал број се добива за } G = 5, R = 7, \text{ т.е. } G \cdot U + R \cdot U = 5 \cdot 6 + 5 \cdot 7 = 30 + 35 = 65$$

$$U = 6 \text{ најмал број се добива за } G = 7, R = 8, \text{ т.е. } G \cdot U + R \cdot U = 6 \cdot 7 + 6 \cdot 8 = 42 + 48 = 90$$

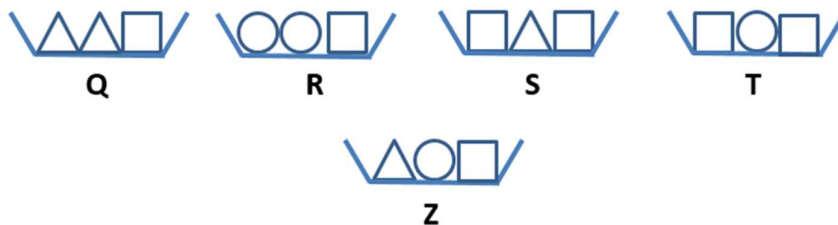
$$U = 7 \text{ најмал број се добива за } G = 8, R = 9, \text{ т.е. } G \cdot U + R \cdot U = 7 \cdot 8 + 7 \cdot 9 = 56 + 63 = 119$$

$$U = 8 \text{ најмал број се добива за } G = 9, R = 6, \text{ т.е. } G \cdot U + R \cdot U = 8 \cdot 9 + 8 \cdot 6 = 72 + 48 = 120.$$

Значи $U = 8, G = 9, R = 6$ и $K = 1, E = 2, N = 0$ е бараното решение за најмал број.

Нивната разлика е еднаква на $135 - 120 = 15$.

7. Катерина сака да постави пет чинии на маса распоредени според нивната тежина од лево кон десно. Таа веќе ги поставила чиниите Q, R, S и T. Садот T е најтежок. Каде треба да го постави садот Z?



- (A) лево од садот Q
- (Б) помеѓу сад Q и сад R
- (B) помеѓу садот R и садот S
- (Г) помеѓу садот S и садот T
- (Д) десно од садот T

Решение.//Бидејќи садот T е најтежок, добиваме дека квадратчето тежи повеќе од триаголникот. Ако ги споредиме садот T и садот S добиваме дека кругчето тежи повеќе од триаголникот. Ако пак ги споредиме садот T и садот R, добиваме дека квадратчето тежи повеќе од кругчето. Според тоа распоредени по тежина се квадратче, кругче па триаголник. Значи, садот Z ќе биде поставен меѓу садите Q и R. Точен е одговорот под B).

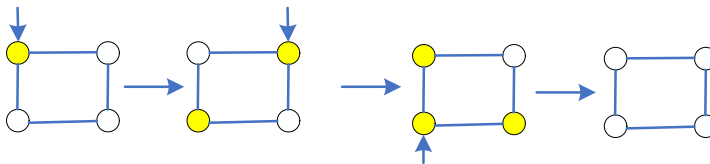
8. Во една соба има четири светилки(ламби) кои се распоредени во темињата на еден квадрат. Најмалку една од нив е запалена, и најмалку една од нив е изгасната, во еден момент. Тие се поврзани меѓу себе, при што, ако една од нив ја менува состојбата(ако е запалена се гасни и ако изгасната се пали), тогаш двете нејзини соседни сијалици(поврзани со страните на квадратот) ја менуваат својата состојба(ако е некоја од нив запалена се гасни а а ако е изгасната се пали). Дали е можно сите сијалици во исто време да се изгаснати?

- A) Не може сите да се изгаснати во исто време
- B) Може да се изгаснати сите во исто време
- C) Може да се изгаснат после бесконечен број на менување на нивната состојба
- D) Задачата нема смисла

Решение.//На почеток може да се запалени една, две или три светилки.

Случај 1 Запалена е една светилка а три од нив се изгаснати

Запалената светилка ја гаснине. Тогаш две светилки кои се изгаснати ќе се запалат. Значи сега имаме две запалени светилки и две изгаснати светилки. Секоја запалена светилка се граничи со изгаснати светилки, и обратно, секоја изгасната светилка се граничи со запалени светилки. Во вториот чекор гаснине една од запалените светилки. Ќе се запалат две изгаснати светилки. Сега ќе имаме три запалени и една изгасната светилка. Во третиот чекор, светилката која е запалена и се наоѓа меѓу две запалени светилки ја гаснине. Тогаш сите светилки ќе бидат изгаснати.



Случај 2 Запалени се две светилки

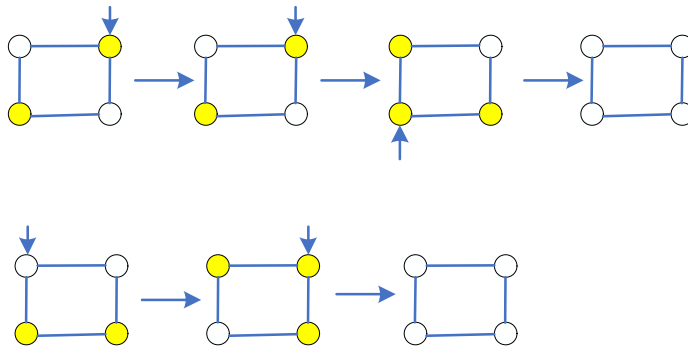
Овде имаме две можности:

- а) запалени се две светилки кои се една до друга

Една од запалените светилки ја гаснине. Тогаш ќе имаме ситуација да една од светилките ќе биде запалена а три ќе бидат изгаснати. Тоа е случајот 1.

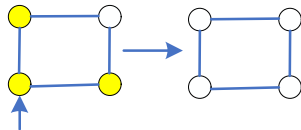
- б) Запалени се две светилки кои не се една до друга

Во оваа ситуација се гасни една од запалените светилки. Тогаш двете соседни изгаснати светилки ќе се запалат и ќе имаме три запалени светилки. Тоа се сведува на случајот 3.



Случај 3 Запалени се три светилки.

Во овој случај се гасни средната од трите запалени светилки. Со тоа четирите светилки ќе бидат изгаснати.



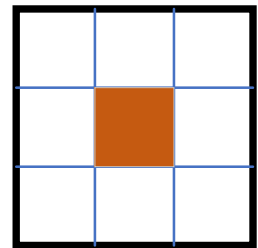
Случај 4. Запалени се сите светилки

Една од светилките ја гаснине. Со тоа три сијалици ќе бидат изгаснати. Тоа е случајот 1.

Други случаи немаме. Значи, точен е одговорот под В).

9. Распоредете ги цифрите од 1 до 8 во единечните квадратчиња на квадратната 3x3 шема. При тоа во средното квадратче не смее да има запишан број. Збирот на цифрите во првата колона, збирот на цифрите во третата колона, збирот на цифрите во првата редица и збирот на цифрите во третата редица треба да е ист. Колку изнесува тој збир ако тој е најголем?

A)11 B)12 C)13 D)14 E)задачата нема смисла



Решение.//Еден распоред на цифрите од 1 до 8 во кој збирот на цифрите е 12 е даден на следниот цртеж:

1	5	6
8		4
3	7	2

Втор распоред на цифрите од 1 до 8 во кој збирот на цифрите е 13 е даден на следниот цртеж.

1	7	5
8		2
4	3	6

Трет распоред на цифрите од 1 до во кој збирот на цифрите е 14 е даден на следниот цртеж:

8	5	1
2		6
4	3	7

Четврт распоред на цифрите од 1 до во кој збирот на цифрите е 15 е даден на следниот цртеж:

6	2	7
1		5
8	4	3

I. Цифрите не може да се распоредат а збирот да биде 16. При тоа цифрата 8 може да стои или во квадратче кое содржи теме на квадратот или во средно квадратче.

Случај кога цифрата 8 стои во квадратче кое содржи теме на големиот квадрат

Во вториот ред се дадени три квадратчиња. Две цифри кои заедно со цифрата 8 формираат збир 16 се: 1 и 7, или 2 и 6, или 4 и 5. Од тие три групи на цифри(по две за еден квадрат), може да се формираат долниот ред од три квадрати(види цртеж подолу).

-Во првиот квадрат мора втората колона да се пополни со 4 и 5 и во втората редица(гледано од горе на долу) не може да има збир 16, бидејќи

$$6+5+3=14.$$

-Во вториот квадрат мора втората колона да се пополни со цифрите 4 и 7, и во таа ситуација во втората редица(гледано од горе надолу) не може да има збир 16, бидејќи

$$7+6+1=14$$

-Во третиот квадрат, за преостанатите три полиња остануваат цифрите 2,4 и 6. Но од тие цифри не може да се формира збир 16. Навистина

$$7+6+4=17$$

$$7+4+2=13$$

$$7+6+2=15$$

$$5+6+4=15$$

$$5+4+2=11$$

$$5+6+2=13$$

Случај кога цифрата 8 стои во средно квадратче

На ист начин како и претходно, две цифри, кои заедно со цифрата 8 формираат збир 16 се: 1 и 7, или 2 и 6, или 4 и 5. Тие се поставени во првата колона на секој од трите квадрати кои се првиот ред на квадрати(види цртеж).

6	3	7
8		5
2		4

1

1		
8		
7	3	6

2 4 5

1		
8		
7	4	5

2 3 6

3	6	7
8		
5		

1 2 4

8	1	7
2		4
6		5

3

8	3	5
2		4
6		7

1

8	3	5
1		
7		

2 4 6

-Во првиот квадрат: заедно со цифрата 6 има уште две цифри кои даваат збир 16. Тоа се цифрите 3 и 7(види прв квадрат-јасно е зошто цифрата 7 е поставена во квадратче кое содржи теме на големиот квадрат). Цифрата 7, од преостанатите цифри 1,4,5 дава збир 16 само со цифрите 5 и 4(види трета колона). Но тогаш збирот во третата редица е $1+2+4=7$.

-Во вториот и третиот квадрат со цифрата 8 се поставени цифрите 1 и 7. Со цифрата 7 единствени цифри од преостанатите кои даваат збир 16 се цифрите 6 и 3 или 5 и 4. Навистина

$$7+6+3=16$$

$$7+5+4=16$$

Но во таа ситуација имаме максимални зборови

$$6+5+4=15$$

и

$$5+6+3=14,$$

односно немаме збир 16.

-Во четвртиот квадрат заедно со цифрата 3 има уште две цифри кои даваат збир 16. Тоа се цифрите 6 и 7,

$$3+6+7=16.$$

Навистина

$$3+6+4=13$$

$$3+7+4=14.$$

Но сега, во преостанатата колона и преостанатата редица добиваме максимални зборови

$$7+4+2=13$$

И

$$5+4+3=12.$$

Значи немаме збир 16.

II. Цифрите не може да се распоредат а збирот да биде 17. При тоа цифрата 8 може да стои или во квадратче кое содржи теме на квадратот или во средно квадратче. Дискусијата е слична како во случајот кога збирот е 16(претходниот дел од дискусијата). Во прилог се квадратните шеми кои при тоа се добиваат:

6	7	4
8		
3		

1 5 2

2		
8		
7	4	6

1 3 5

4	6	7
8		
5		

1 3 2

8	4	5
2		
7		

1 3 6

8	4	5
3		
6		

1 7 2

8	2	7
6		
3		

1 4 5