Р. Малчески, А. Малчески, Скопје

ПРЕСЛИКУВАЊА ВО РАМНИНА ПРЕКУ КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ III

(Продолжение!)

6.6. Да ги разгледаме кружниците (K_1) и (K_2) чии равенки се $|z-c_1|=R_1$ и $|z-c_2|=R_2$, соодветно.

Ако $R_1 \neq R_2$, тогаш пресликувањето $S:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ дефинирано со

$$w=S(z)=\tfrac{R_2}{R_1}z+\tfrac{R_1c_2-R_2c_1}{R_1} \qquad (1)$$

е хомотетија со коефициент $\frac{R_2}{R_1}$ и центар $\frac{R_1c_2-R_2c_1}{R_1-R_2}$. Од два добиваме дека $z=\frac{R_1w-R_1c_2+R_2c_1}{R_2}$ и ако замениме во равенката на кружницата (K_1) ја добиваме равенката $\left|\frac{R_1w-R_1c_2+R_2c_1}{R_2}-c_1\right|=R_1$, која е еквивалентна на равенката на кружницата (K_2). Да забележиме дека за $R_1=R_2$ пресликувањето (1) е транслација за вектор c_2-c_1 и истото кружницата (K_1) ја пресликува во кружницата (K_2).

Аналогно се докажува дека пресликувањето $S:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ дефинирано со

$$w=S(z)=-\tfrac{R_2}{R_1}z+\tfrac{R_1c_2+R_2c_1}{R_1} \qquad (2)$$

е хомотетија со коефициент $-\frac{R_2}{R_1}$ и центар $\frac{R_1c_2+R_2c_1}{R_1+R_2}$, и дека истото кружницата (K_1) ја пресликува во кружницата (K_2).

Од досега изнесеното следува дека точноста на следната теорема.

Теорема. Кои било две кружници се хомотетични, т.е. постои хомотетија која едната ја пресликува во другата. ♦

6.7. Пример. Нека B и C се точки од дадена кружница, кои не лежат на еден дијаметар, и тангентите на таа кружница во овие точки се сечат во точката A. Нека P е произволна точка од кружницата. Со A_1, B_1, C_1 да ги означиме подножјата на нормалите спуштени од точката P кон правите BC, CA, AB, соодветно. Докажете дека $\overline{PA_1}^2=\overline{PB_1}\cdot\overline{PC_1}$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека дадената кружница е единечна и дека афиксот на точката P е 1 (зошто?).

Нека афиксите на точките B и C се b и c, соодветно. Тогаш, од забелешка 3.13 г) и д) за афиксите на точките A и A_1 имаме $a=\frac{2bc}{b+c}$ и $a_1=\frac{b+c+1-bc}{2}$, соодветно. За да го определиме афиксот b_1 на точката B_1 ќе искористиме дека таа лежи на правата AC и дека PB_1 е нормална на AC. Имаме, $\frac{b_1-c}{a-c}=\frac{\overline{b_1}-\overline{c}}{\overline{a}-\overline{c}}$ и $\frac{b_1-1}{a-c}=-\frac{\overline{b_1}-1}{\overline{a}-\overline{c}}$. Ако во последните две равенки замениме за a, после средувањето добиваме:

$$\begin{cases} b_1+\overline{b}_1c^2=2c \\ b_1-\overline{b}_1c^2=1-c^2 \end{cases}$$

од што следува $b_1=\frac{1+2c-c^2}{2}$. Аналогно наоѓаме $c_1=\frac{1+2b-b^2}{2}$. Според тоа,

$$\overline{PA_1}^2=|1-a_1|^2=\tfrac{1}{4}|bc-b-c+1|^2$$

$$=\tfrac{1}{2}|b-1|^2\cdot\tfrac{1}{2}|c-1|^2=|1-b_1|\cdot|1-c_1|=\overline{PB_1}\cdot\overline{PC_1}$$

што и требаше да се докаже.. ♦

6.8. Според 4.10 и 5.5 директната сличност која не е идентитет или транслација има единствена неподвижна точка и тоа е центарот на директната сличност. За правата $(p):\ z=\eta\overline{z}+c$ ќе велиме дека е **неподвижна** за директната сличност S ако $S(p)=p$, т.е. ако директната сличност ја пресликува правата (p) во самата себе. За кружницата $(K):\ |z-c|=R$ ќе велиме дека е **неподвижна** за директната сличност S ако $S(K)=K$.

6.9. Според теорема 4.5 сликата на кружницата $(K):\ |z-c|=R$ при директната сличност $w=S(z)=az+b$ е кружница

(K'): $|z-(ac+b)|=R\cdot|a|$. Според тоа, кружницата (K) е неподвижна при директната сличност ако и само ако $|a|=1$ и $c=\frac{b}{1-a}$, што значи ако и само ако S е движење кое не е транслација и центарот на кружницата се совпаѓа со центарот на движењето.

Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема. а) Директната сличност има неподвижна кружница ако и само ако таа е движење кое не е транслација.

б) За движењето кое не транслација единствени неподвижни кружници се кружниците чии центри се совпаѓаат со центарот на движењето. ♦

6.10. Според теорема 4.4 сликата на права (p): $z=\eta\bar{z}+c$ при директната сличност $w=S(z)=az+b$ е права (p'): $w=(\frac{a}{\bar{a}}\eta)\bar{w}+b+ac-\frac{a}{\bar{a}}\bar{b}\eta$. Според тоа, правата (p) е неподвижна при директната сличност S ако и само ако $\frac{a}{\bar{a}}\eta=\eta$ и $b+ac-\frac{a}{\bar{a}}\bar{b}\eta=c$, т.е. ако и само ако $a\in\mathbf{R}$ и $b+ac-\bar{b}\eta=c$. Од досега изнесеното следува дека правата (p): $z=\eta\bar{z}+c$ е неподвижна за директната сличност ако и само ако $a=1$ и $b=\bar{b}\eta$ или $a\neq 1$ и $\frac{b}{2}=\eta\frac{\bar{b}}{2}+c$, т.е. ако и само ако S е транслација и правата (p) е паралелна со векторот на транслација или S е хомотетија и правата (p) минува низ нејзиниот центар.

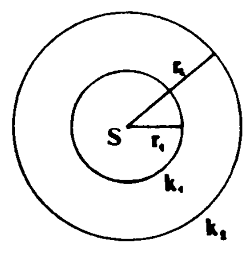
Теорема. Директната сличност има неподвижна права ако и само ако таа е

а) транслација и во овој случај неподвижни се сите прави кои се паралелни со векторот на транслација, или

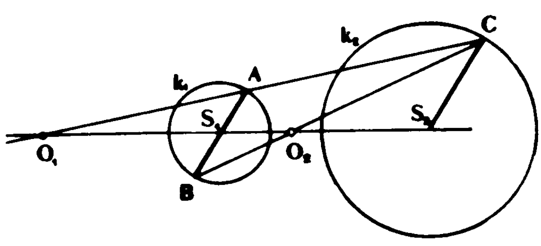
б) хомотетија и во овој случај неподвижни се сите прави кои минуваат низ нејзиниот центар. ♦

6.11. Забелешка. Од доказот на теорема 6.6 следува дека две концентрични кружници имаат само еден центар на сличност кој се совпаѓа со центарот на кружниците (црт. 1), а неконцентрични кружници може да имаат или еден или два центри на сличност, во зависност од тоа дали нивните радиуси се еднакви или не, соодветно. Во случај кога неконцентричните кружници имаат различни радиуси центарот на сличност на хомотетијата (1) го нарекуваме **надворешен** центар на сличност, а центарот на хомотетијата (2) го нарекуваме **внатрешен** центар на сличност (црт. 2).

6.12. Забелешка. Споре теорема 6.5 секоја хомотетија произволна права ја пресликува во права паралелна на неа. Ова ни овозможува да го определиме центарот на сличност на хомотетијата во случај кога имаме неконцентрични кружници (K_1) и (K_2). Низ центарот S_1 повлекуваме дијаметар AB на кружницата (K_1) и низ центарот S_2 повлекуваме радиус S_2C паралелен со дијаметар AB (црт. 2). Ако $R_1\neq R_2$, тогаш правите AC и BC ја сечат правата S_1S_2 во точките O_1 и O_2, кои се надворешен и внатрешен центар на сличност на разгледуваните хомотетии, соодветно. Ако, пак $R_1=R_2$, тогаш правата



Црт. 1



Црт. 2

Со тоа ја докажавме следната теорема.

AC ќе биде паралелна на правата S_1S_2, а правата BC ќе ја сече правата S_1S_2 во внатрешниот центар на сличност.

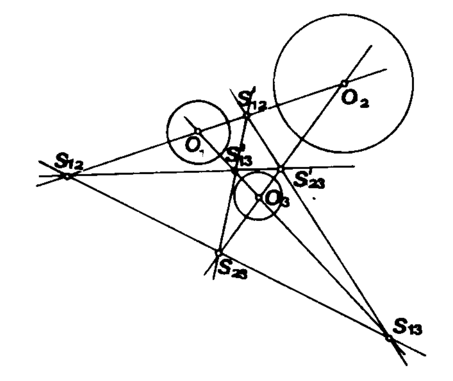
Да забележиме дека, ако t е заедничка тангента на кружниците (K_1) и (K_2), тогаш ако $R_1 = R_2$, таа е паралелна со правата S_1S_2, а ако $R_1 \neq R_2$, таа минува низ еден од центрите на сличност (зошто?). Според тоа, ако $R_1 \neq R_2$, тогаш за да ги конструирале заедничките тангенти на (K_1) и (K_2), треба да ги најдеме нивните центри на сличност и од нив да ги повлечем тангентите на една од кружниците.

6.13. Да ги разгледаме кружниците $(K_i), i=1,2,3$ чии равенки се $|z-c_i| = R_i$, $i=1,2,3$, соодветно и $R_i \neq R_j$, за $i \neq j$, а нивните центри не се колинеарни (црт. 3). Од доказот на теорема 6.6 следува дека $\frac{R_1c_2-R_2c_1}{R_1-R_2}, \frac{R_2c_3-R_3c_2}{R_2-R_3}$ и $\frac{R_1c_3-R_3c_1}{R_1-R_3}$ се афиксите на центрите на хомотетиите S_{12}, S_{23} и S_{13} кои ја пресликуваат (K_1) во (K_2), (K_2) во (K_3), и (K_1) во (K_3), соодветно. Притоа

$$\frac{\frac{R_1c_3-R_3c_1}{R_1-R_3}-\frac{R_1c_2-R_2c_1}{R_1-R_2}}{\frac{R_2c_3-R_3c_2}{R_2-R_3}-\frac{R_1c_2-R_2c_1}{R_1-R_2}} = \frac{R_1(R_2-R_3)}{R_2(R_1-R_3)} \in \mathbf{R},$$

па од последица 1.4 следува дека точките S_{12}, S_{23} и S_{13} се колинеарни. Аналогно се докажува дека: точките S_{12}, S'_{23}, S'_{13} се колинеарни, точките S'_{12}, S'_{23}, S_{13} се колинеарни, и точките S'_{12}, S_{23}, S'_{13} се колинеарни.

Со тоа ја докажавме следната теорема.



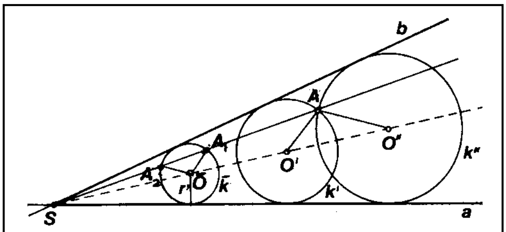
Црт. 3

Теорема. Ако центрите на кружниците $(K_i), i=1,2,3$ се неколинеарни и нивните радиуси се меѓусебно различни, тогаш нивните центри на хомотетија S_{12}, S_{23}, S_{13}, $S'_{12}, S'_{23}, S'_{13}$ лежат на четири прави, така што на секоја од нив лежат по три центри на хомотетија. ♦

6.14. Пример. Да се конструира кружница, која што минува низ дадена точка и допира две дадени прави.

Решение. Нека се дадени правите (a) и (b) и точката A. Ќе го разгледаме само случајот кога правите (a) и (b) се сечат, а точката A не лежи на ниедна од правите (a) и (b) и не лежи на симетралите на аглите што ги образуваат правите (a) и (b) (црт. 4). Останатите случаи ги оставаме на читателот за вежба.

Нека $S=(a)\cap(b)$ и нека $K(O,r)$ е бараната кружница. Бидејќи (K) ги допира правите (a) и (b), нејзиниот центар O



Црт. 4

лежи на симетралата (s) на оној агол обрзуван од правите (a) и (b) во кој лежи точката A. Ако H е хомотетија со центар во S и произволен коефициент, тогаш $\mathrm{H}(a)=a$, $\mathrm{H}(b)=b$, а $\mathrm{H}(K)=\overline{K}$ ќе биде кружница што ги допира правите (a) и (b). Значи за да ја конструираме кружницата (K), најпрво конструираме произволна кружница $(\overline{K})$ која ги допира правите (a) и (b). Нека A_1 и A_2 се пресечните точки на кружницата $(\overline{K})$ со правата SA. Ако H_1 и H_2 се хомотетии со центар во S и коефициенти $\overline{OA}:\overline{OA}_1$ и

$\overline{OA}:\overline{OA_2}$, соодветно, тогаш $H_1(A_1)=A$ и $H_2(A_2)=A$. Значи, $H_1(\overline{K})=K'$ и $H_2(\overline{K})=K''$ ќе минуваат низ точката A и ќе ги допираат правите (a) и (b). Нивните центри ќе бидат $H_1(\overline{O})=O'$ и $H_2(\overline{O})=O''$. Според тоа, треба да повлечеме прави паралелни со правите OA_1 и OA_2 и во пресеците со правата (s) ќе ги добиеме точките O' и O''.

Од претходните разгледувања следува дека задачата има две решенија. ♦

7. ИНДИРЕКТНИ СЛИЧНОСТИ

7.1. Дефиниција. Пресликувањето $S:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ дефинирано со

$$S(z)=a\overline{z}+b,\ a,b\in\mathbf{C},\ a\neq 0 \qquad (1)$$

го нарекуваме **индиректна сличност**. Во натамошните разгледувања множеството индиректни сличности ќе го означуваме со $\boldsymbol{IS}$.

7.2. Теорема. Индиректната сличност $S:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ дефинирана со (1) е биекција и нејзиното инверзно пресликување $S^{-1}:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ е дефинирано со

$$S^{-1}(z)=\tfrac{1}{\overline{a}}\overline{z}-\tfrac{\overline{b}}{\overline{a}},\ a,b\in\mathbf{C},\ a\neq 0\,, \qquad (2)$$

при што важи $S^{-1}\in\boldsymbol{IS}$.

Доказ. Ако $S(z_1)=S(z_2)$, тогаш $a\overline{z_1}+b=a\overline{z_2}+b$, од што следува $z_1=z_2$, т.е. S е инјекција. Ако $w\in\mathbf{C}$, тогаш за $z=\frac{\overline{w}-\overline{b}}{\overline{a}}$ важи

$$S(z)=S\left(\tfrac{\overline{w}-\overline{b}}{\overline{a}}\right)=a\,\tfrac{w-b}{a}+b=w$$

т.е. S е сурјекција, па значи тоа е биекција.

Пресликувањето $S_1(z)=\frac{1}{\overline{a}}\overline{z}-\frac{\overline{b}}{\overline{a}}$ е индиректна сличност и притоа важи

$$S(S_1(z))=S_1(S(z))=z\,,$$

што значи $S^{-1}=S_1\in\boldsymbol{IS}$. ♦

7.3. Теорема. Композиција на две индиректни сличности е директна сличност, а композицвија на директна и индиректна сличност е индиректна сличност.

Доказ. Ако $S_1,S_2\in\boldsymbol{IS}$, тогаш

$$S_1(z)=a\overline{z}+b,\ a,b\in\mathbf{C},\ a\neq 0 \text{ и}$$

$$S_2(z)=c\overline{z}+d,\ c,d\in\mathbf{C},\ c\neq 0\,.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}S_1(S_2(z))&=S_1(c\overline{z}+d)=a\overline{(c\overline{z}+d)}+b\\&=(a\overline{c})z+(a\overline{d}+b),\end{aligned}$$

$a\overline{c},a\overline{d}+b\in\mathbf{C},\ a\overline{c}\neq 0$ т.е. $S_1\circ S_2\in\boldsymbol{DS}$. Значи, композиција на две индиректни сличности е директна сличност.

Ако $S_1\in\boldsymbol{DS}$ и $S_2\in\boldsymbol{IS}$, тогаш

$$S_1(z)=az+b,\ a,b\in\mathbf{C},\ a\neq 0 \text{ и}$$

$$S_2(z)=c\overline{z}+d,\ c,d\in\mathbf{C},\ c\neq 0\,.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}S_1(S_2(z))&=S_1(c\overline{z}+d)=a(c\overline{z}+d)+b\\&=(ac)\overline{z}+(ad+b),\end{aligned}$$

$ac,ad+b\in\mathbf{C},\ ac\neq 0$ т.е. $S_1\circ S_2\in\boldsymbol{IS}$. Аналогно се докажува дека $S_2\circ S_1\in\boldsymbol{IS}$. Значи, композиција на индиректна и директна сличност е индиректна сличност. ♦

7.4. Директните и индиректните сличности со едно име ќе ги нарекуваме сличности. Во натамошните разгледувања множеството сличности ќе го означуваме со $\boldsymbol{S}$. Со непосредна проверка се докажува дека за сличностите во однос на операцијата композиција на пресликувања важи асоцијативниот закон. Од претходно кажаното и од теоремите 6.2, 7.2 и 7.3 следува точноста на следната теорема.

Теорема. Множеството сличности $\boldsymbol{S}$ во однос на операцијата композиција на пресликувања е група. ♦

7.5. Теорема. Секоја индиректна сличност еднозначно е определена со два пара придружени точки.

Доказ. Нека S е произволна индиректна сличност за која важи $S(z_1)=w_1$ и $S(z_2)=w_2$. Тогаш, $S(z)=a\overline{z}+b,$ каде $a,b\in\mathbf{C},\ a\neq 0$ се непознати коефициенти кои треба да ги определиме. Според теорема 7.2 секоја индиректна сличност е биекција, па затоа од $z_1\neq z_2$ следува

$w_1 \neq w_2$. Со замена во $S(z)=a\overline{z}+b$ добиваме

$$\begin{cases} w_1 = a\overline{z}_1 + b \\ w_2 = a\overline{z}_2 + b \end{cases} \qquad (3)$$

Решавајќи го системот (3) по непознати a и b наоѓаме $a=\frac{w_1-w_2}{\overline{z}_1-\overline{z}_2}$ и $b=\frac{\overline{z}_1 w_2-\overline{z}_2 w_1}{\overline{z}_1-\overline{z}_2}$ и $a \neq 0$, т.е. коефициентите на индиректната сличност се наполно определени со два пара придружени точки $(z_1, S(z_1))$ и $(z_2, S(z_2))$. ♦

7.6. Теорема. Слика на права (p) при индиректна сличност е права (p').

Доказ. Нека

$$S_1(z)=a\overline{z}+b,\ a,b\in \mathbf{C},\ a\neq 0$$

е индиректна сличност и (p): $z=\eta\overline{z}+c$ е дадена права. Имаме, $z=\frac{\overline{w}-\overline{b}}{\overline{a}}$ и ако замениме во равенката на правата (p) добиваме дека таа се пресликува во права (p') чија равенка е

$$w=(\tfrac{a}{\overline{a}}\overline{\eta})\overline{w}+(b-ac\overline{\eta}-\tfrac{a\overline{b}}{\overline{a}}\overline{\eta}).\ ♦$$

7.7. Теорема. Слика на кружница (K) при индиректна сличност е кружница (K').

Доказ. Нека

$$S_1(z)=a\overline{z}+b,\ a,b\in \mathbf{C},\ a\neq 0$$

е индиректна сличност и (K): $|z-c|=R$ е дадена кружница. Имаме, $z=\frac{\overline{w}-\overline{b}}{\overline{a}}$ и ако замениме во равенката на кружницата (K) добиваме дека таа се пресликува во кружница (K') чија равенка е $|w-(b+a\overline{c}|=R\cdot|a|$. ♦

7.8. Теорема. Ако A,B се произволни различни точки и A',B' се нивните слики при индиректната сличност (1) и ако $a=re^{i\varphi}$, тогаш $\overline{A'B'}=r\overline{AB}$, а ако α и α_1 се ориентираните агли меѓу реалната оска и правите AB и $A'B'$, тогаш $\alpha+\alpha_1=\varphi$.

Доказ. Нека z_1,z_2,w_1,w_2 се афиксите на точките A,B, A',B', соодветно. Тогаш, $z_2-z_1=\overline{AB}\cdot e^{i\alpha}$ и $w_2-w_1=\overline{A'B'}\cdot e^{i\alpha_1}$, каде α и α_1 се аглите кои ги зафаќа реалната оска со векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$, соодветно. Од равенствата $w_1=a\overline{z}_1+b$ и $w_2=a\overline{z}_2+b$ го добиваме равенството $w_2-w_1=a\overline{(z_2-z_1)}$, т.е. равенството $\overline{A'B'}\cdot e^{i\alpha_1}=r\overline{AB}\cdot e^{i(\varphi-\alpha)}$, од што следува $\overline{A'B'}=r\overline{AB}$ и $\alpha+\alpha_1=\varphi$. ♦

7.9. Дефиниција. За две фигури ќе велиме дека се **индиректно слични** ако постои индиректна сличност која едната од нив ја пресликува на другата.

Реалниот број r од претходната теорема го нарекуваме **коефициент** на индиректната сличност (1).

7.10. Последица. Ако ABC и $A'B'C'$ се индиректно слични триаголници, тогаш $\overline{A'B'}:\overline{A'C'}=\overline{AB}:\overline{AC}$ и $\angle A'B'C'=-\angle ABC$. ♦

7.11. Теорема. Нека точките A,B,C, A',B',C' имаат афикси z_1,z_2,z_3, w_1,w_2,w_3, соодветно. Триаголниците ABC и $A'B'C'$ се индиректно слични ако и само ако

$$z_1(\overline{w}_2-\overline{w}_3)+z_2(\overline{w}_3-\overline{w}_1)+z_3(\overline{w}_1-\overline{w}_2)=0. \quad (4)$$

Доказ. Триаголниците ABC и $A'B'C'$ се индиректно слични ако и само ако постои индиректна сличност од обликот (1) за која важи $w_i=a\overline{z}_i+b$, за $i=1,2,3$. Според тоа,

$$w_1-w_2=a\overline{(z_1-z_2)} \text{ и } w_1-w_3=a\overline{(z_1-z_3)}.$$

Ако ги поделиме последните две равенства го добиваме равенството

$$\frac{w_1-w_2}{w_1-w_3}=\overline{\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}},$$

кое е еквивалентно со равенството (4). ♦

7.12. Дефиниција. Индиректната сличност со коефициент 1 ќе ја нарекуваме **индиректна изометрија**. Движењата и индиректните изометрии со едно име ќе ги нарекуваме **изометрии**.

Во натамошните разгледувања множеството индиректни изометрии ќе го означуваме со $\boldsymbol{II}$, а множеството изометрии со I. Во врска со изометриите од претходните разгледувања непосредно следува точноста на следната теорема. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Теорема. Множеството изометрии I во однос на операцијата композиција на пресликувања е група. ♦

7.13. Теорема. Индиректната сличност е инволуторна ако и само ако е осна симетрија.

Доказ. Нека индиректната сличност $S:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ е инволуторна. Тогаш $S(z)=S^{-1}(z)$, за секој $z\in\mathbf{C}$, па затоа $a\bar{z}+b=\frac{1}{\bar{a}}\bar{z}-\frac{\bar{b}}{\bar{a}}$, за секој $z\in\mathbf{C}$. Од последното равенство добиваме $|a|=1$ и $\frac{b}{\bar{b}}=-a$. Според тоа, равенката $z=a\bar{z}+b$ е равенка на права. Да ги разгледаме точката z и нејзината слика $w=S(z)$. За овие две точки важи $w=a\bar{z}+b$, па од пример 1.9 следува дека тие се симетрични во однос на правата $z=a\bar{z}+b$, т.е. $S:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ е осна симетрија.

Обратното тврдење непосредно следува од пример 1.9. ♦

7.14. Точката z е **неподвижна** за индиректната сличност (1) ако и само ако $z=a\bar{z}+b$. Според тоа, $\bar{z}=\bar{a}z+\bar{b}$ и со замена во претходната равенка добиваме

$$z(1-a\bar{a})=a\bar{b}+b. \qquad (5)$$

Можни се следните три случаи.

1) Ако $a\bar{a}\neq 1$, тогаш (1) не е изометрија и има една неподвижна точка z за која од (5) добиваме $z=\frac{a\bar{b}+b}{1-a\bar{a}}$.

2) Ако $a\bar{a}=1$ и $a\bar{b}+b\neq 0$, тогаш (1) е индиректна изометрија, но не е осна симетрија и нема неподвижни точки.

3) Ако $a\bar{a}=1$ и $a\bar{b}+b=0$, тогаш $|a|=1$ и $\frac{b}{\bar{b}}=-a$, па од доказот на теорема 7.13 следува дека (1) е осна симетрија и како $z=a\bar{z}+b$ добиваме дека точката z лежи на оската на симетријата.

Со тоа ја докажавме теоремата.

Теорема. Индиректната сличност која не е изометрија има единствена неподвижна точка $z=\frac{a\bar{b}+b}{1-a\bar{a}}$. Ако индиректната сличност не е осна симетрија, тогаш таа нема неподвижни точки, а за осната симетрија единствени неподвижни точки се точките од оската на симетријата. ♦

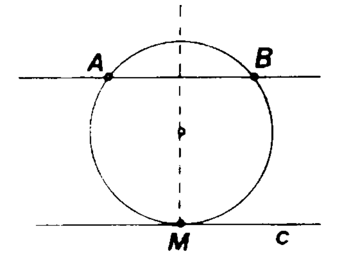
7.15. Дефиниција. Ако индиректната сличност (1) не е изометрија, тогаш неподвижната точка $\frac{a\bar{b}+b}{1-a\bar{a}}$ ја нарекуваме центар на разгледуваната сличност.

7.16. Дефиниција. За правата (p): $z=\eta\bar{z}+c$ ќе велиме дека е **неподвижна** за индиректната сличност (1) ако $S(p)=p$, т.е. ако индиректната сличност ја пресликува правата (p) во самата себе. За кружницата (K): $|z-c|=R$ ќе велиме дека е **неподвижна** за индиректната сличност (1) ако $S(K)=K$.

7.17. Теорема. а) Ако индиректната сличност (1) е осна симетрија, тогаш оската на симетрија и правите кои се нормални на неа се единствените неподвижни прави за (1).

б) Ако индиректната сличност (1) е осна симетрија, тогаш кружниците чии центри лежат на оската на симетрија се единствените неподвижни кружници за (1).

Доказ. а) Нека (1) е осна симетрија со оска (p): $z=a\bar{z}+b$, $|a|=1$ и $\frac{b}{\bar{b}}=-a$ и нека (q): $z=\eta\bar{z}+c$ е произволна права. Од $w=a\bar{z}+b$, наоѓаме $z=\frac{\bar{w}-\bar{b}}{\bar{a}}$. Ако замениме во равенката на (q) добиваме $\frac{\bar{w}-\bar{b}}{\bar{a}}=\eta\frac{w-b}{a}+c$ односно $w=\frac{a}{\eta\bar{a}}\bar{w}+\frac{b}{\eta\bar{a}}+b-\frac{c}{\eta\bar{a}}$. Правата (q) е неподвижна за осната симетрија (1) ако и само ако $\frac{a}{\eta\bar{a}}=\eta$ и $\frac{b}{\eta\bar{a}}+b-\frac{c}{\eta\bar{a}}=c$. Од $\frac{a}{\eta\bar{a}}=\eta$ и $|a|=1$ следува $\eta=\pm a$. Ако $\eta=a$, тогаш од $\frac{b}{\eta\bar{a}}+b-\frac{c}{\eta\bar{a}}=c$ следува $b=c$. Ако $\eta=-a$, тогаш равенството $\frac{b}{\eta\overline{a}}+b-\frac{c}{\eta\overline{a}}=c$ е исполнето за секој $c\in\mathbf{C}$ и $(q)\perp(p)$.

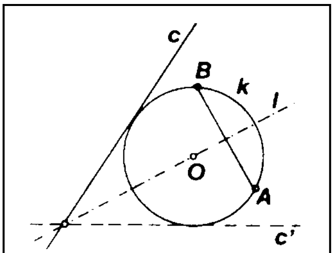


Црт. 5

б) Нека (1) е осна симетрија со оска (p) : $z=a\overline{z}+b$, $|a|=1$ и $\frac{b}{\overline{b}}=-a$ и нека (K): $|z-c|=R$ е произволна кружница. Од $w=a\overline{z}+b$ наоѓаме $z=\frac{\overline{w-b}}{\overline{a}}$. Ако замениме во равенката на (K) добиваме $|w-(b+a\overline{c})|=R$. Кружницата (K) е неподвижна за осната симетрија (1) ако и само ако $c=a\overline{c}+b$, што значи ако и само ако нејзиниот центар лежи на оската на симетријата. ♦

7.18. Пример. Да се конструира кружница, која што минува низ две дадени точки и допира дадена права.

Решение. Нека се дадени точките A и B и правата (c). Очигледно, ако точките A и B лежат во различни полурамнини во однос на правата (c) или и двете лежат на правата (c), тогаш задачата нема решение. Ако $A\in(c)$ и $B\notin(c)$, тогаш задачата има единствено решение. Центарот O на бара-



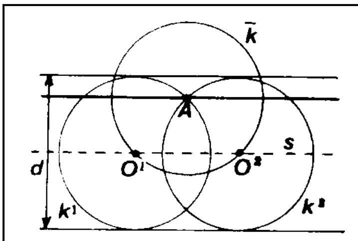
Црт. 6

ната кружница ќе лежи на симетралата на отсечката AB и на правата (p) која што минува низ A и е нормална на (c). Ако точките A и B лежат во иста полурамнина во однос на правата (c) и правата AB е паралелна со правата (c), тогаш задачата има две решенија. Едното решение е кружницата низ точките A, B и M, каде што M е пресечната точка на симетралата на отсечката AB со правата (c), а другото е правата AB, (црт. 5).

Нека точките A и B лежат во иста полурамнина во однос на правата (c) и правата AB не е паралелна со правата (c) (црт. 6). Бидејќи бараната кружница $K(O,R)$ минува низ точките A и B нејзиниот центар ќе лежи на симетралата (l) на отсечката AB. Нека σ_l е осна симетрија со оска на симетрија (l). Според претходната теорема $\sigma_l(K)=K$. Бидејќи правата (c) е тангента на кружницата $K(O,R)$, од последица 7.10 следува дека $\sigma_l(c)=c'$ е тангента на $K(O,R)$. Ако правите (c) и (c') не се паралелни, тогаш задачата се сведува на пример 6.14.

Ако правите (c) и (c') се паралелни, тогаш точката A лежи меѓу нив. Нека d е растојанието меѓу правите (c) и (c'). Кружницата $\overline{K}(A,\frac{d}{2})$ ја сече симетралата (s) во точки O_1 и O_2. Бараните кружници се $K_1(O_1,\frac{d}{2})$ и $K_2(O_2,\frac{d}{2})$, (црт. 7). ♦

7.19. Природно е да се запрашаме, дали постојат фиксни прави за индиректна сличност која не е осна симетрија, т.е. кога $|a|\neq 1$.



Црт. 7

Според теорема 7.6 сликата на правата (p): $z=\eta\overline{z}+c$ при индиректната сличност

(1) е права (p') чија равенка е $w=(\frac{a}{\bar{a}}\bar{\eta})\bar{w}+(b-a\bar{c}\bar{\eta}-\frac{a\bar{b}}{\bar{a}}\bar{\eta})$. Правите (p) и (p') се совпаѓаат ако и само ако $\frac{a}{\bar{a}}\bar{\eta}=\eta$ и $b-a\bar{c}\bar{\eta}-\frac{a\bar{b}}{\bar{a}}\bar{\eta}=c$. Од последните две равенства добиваме $\eta^2=\frac{a}{\bar{a}}=\frac{a^2}{|a|}$, т.е. $\eta_1=\frac{a}{|a|}$, $\eta_2=-\frac{a}{|a|}$ и $c_1=\frac{b\bar{a}-\bar{b}|a|}{\bar{a}(1+|a|)}$, $c_2=\frac{b\bar{a}+\bar{b}|a|}{\bar{a}(1-|a|)}$.

Значи, индиректната сличност која не е изометрија има две фиксни прави (p_1) и (p_2) чии равенки се

$$z=\frac{a}{|a|}\bar{z}+\frac{b\bar{a}-\bar{b}|a|}{\bar{a}(1+|a|)} \text{ и } z=-\frac{a}{|a|}\bar{z}+\frac{b\bar{a}+\bar{b}|a|}{\bar{a}(1-|a|)},$$

соодветно. Од последица 1.8. б) следува дека правите (p_1) и (p_2) се заемно нормални. Бидејќи

$$\frac{a}{|a|}\overline{(\frac{a\bar{b}+b}{1-a\bar{a}})}+\frac{b\bar{a}-\bar{b}|a|}{\bar{a}(1+|a|)}=\frac{a}{|a|}\frac{\bar{a}b+\bar{b}}{1-|a|^2}+\frac{b\bar{a}-\bar{b}|a|}{\bar{a}(1+|a|)}$$
$$=\frac{|a|(b\bar{a}+\bar{b})+(b\bar{a}-\bar{b}|a|)(1-|a|)}{\bar{a}(1-|a|^2)}=\frac{b\bar{a}+\bar{b}a\bar{a}}{\bar{a}(1-|a|^2)}=\frac{b+\bar{b}a}{1-|a|^2}$$

добиваме дека центарот $\frac{b+\bar{b}a}{1-|a|^2}$ на индиректната сличност (1), која не е изометрија, припаѓа на правата (p_1). Аналогно,

$$-\frac{a}{|a|}\overline{(\frac{a\bar{b}+b}{1-a\bar{a}})}+\frac{b\bar{a}+\bar{b}|a|}{\bar{a}(1-|a|)}=-\frac{a}{|a|}\frac{b\bar{a}+\bar{b}}{1-|a|^2}+\frac{b\bar{a}+\bar{b}|a|}{\bar{a}(1-|a|)}$$
$$=\frac{-|a|(b\bar{a}+\bar{b})+(b\bar{a}+\bar{b}|a|)(1+|a|)}{\bar{a}(1-|a|^2)}=\frac{b\bar{a}+\bar{b}a\bar{a}}{\bar{a}(1-|a|^2)}=\frac{b+\bar{b}a}{1-|a|^2}$$

т.е. центарот $\frac{b+\bar{b}a}{1-|a|^2}$ на индиректната сличност (1), која не е изометрија припаѓа на правата (p_2).

Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема. Индиректната сличност (1), која не е изометрија, има две заемно нормални фиксни прави кои минуваат низ центарот на сличноста. ♦

7.20. Нека (1) е индиректна сличност која не е изометрија. Правите (p_1) и (p_2) чии равенки се $z=\frac{a}{|a|}\bar{z}+\frac{b\bar{a}-\bar{b}|a|}{\bar{a}(1+|a|)}$ и $z=-\frac{a}{|a|}\bar{z}+\frac{b\bar{a}+\bar{b}|a|}{\bar{a}(1-|a|)}$, соодветно, ги нарекуваме **оски** на индиректната сличност (1).

Јасно, според теорема 7.19 оските се единствените фиксни прави на индиректната сличност која не е изометрија.

8. ИНВЕРЗИЈА

8.1. Нека $m\in\mathbf{R}$, $m>0$ и $a\in\mathbf{C}$. Разгледуваме пресликување $I:\mathbf{C}\setminus\{a\}\to\mathbf{C}\setminus\{a\}$ дефинирано со

$$I(z)=a+\frac{m}{\bar{z}-\bar{a}}. \qquad (1)$$

i) Ако $I(z_1)=I(z_2)$, тогаш од

$$a+\frac{m}{\bar{z}_1-\bar{a}}=a+\frac{m}{\bar{z}_2-\bar{a}}$$

следува $z_1=z_2$, т.е. I е инјекција.

ii) За $w\in\mathbf{C}\setminus\{a\}$, постои $z=a+\frac{m}{\bar{w}-\bar{a}}$ таков што $I(z)=w$, т.е. I е сурјекција.

Сега, од *i*) и *ii*) следува дека I е биекција.

Дефиниција. Пресликувањето

$$I:\mathbf{C}\setminus\{a\}\to\mathbf{C}\setminus\{a\}$$

дефинирано со (1) го нарекуваме **инверзија** со центар во a и коефициент $\sqrt{m}$.

8.2. Точката z е неподвижна за инверзијата (1) ако и само ако $z=a+\frac{m}{\bar{z}-\bar{a}}$, што значи ако и само ако $|z-a|=\sqrt{m}$. Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема. Точката z е неподвижна за инверзијата (1) ако и само ако припаѓа на кружницата $|z-a|=\sqrt{m}$. ♦

8.3. Дефиниција. Кружницата (K_0): $|z-a|=\sqrt{m}$, ја нарекуваме **кружница на инверзијата** (1).

8.4. Теорема. Инверзијата е инволуторно пресликување.

Доказ. Нека инверзијата е дефинирана со (1). Тогаш, за секој $z\in\mathbf{C}$ важи

$$I(I(z))=I(a+\frac{m}{\bar{z}-\bar{a}})=a+\frac{m}{\overline{a+\frac{m}{\bar{z}-\bar{a}}}-\bar{a}}=z=E(z)$$

т.е. $I^2=E$ и како I е биекција имаме $I=I^{-1}$, т.е. инверзијата е инволуторна. ♦