Џајкоска Лилјана, Прилеп

ТЕОРЕМА ЗА СИМПСОНОВА ПРАВА И НЕЈЗИНА ПРИМЕНА

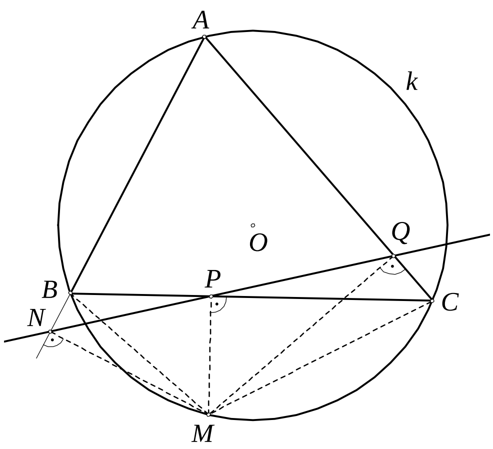
Во наставните планови и програми по геометрија за средно училиште не се застапени голем број значајни теореми кои имаат голема примена при решавањето на некои посложени задачи од геометрија. Меѓу тие теореми спаѓаат секако теоремите на Чева, Менелај, Аполониј, Стјуарт, Штајнер, Хамилтон, Лајбниц и уште некои други.

Во оваа статија ќе стане збор за една од тие теореми, која е позната како теорема за Симсонова права. (Robert Simpson ,1687-1768).

Теорема. Подножјата на нормалите спуштени од било која точка на кружницата опишана околу даден триаголник, на страните на тој триаголник, лежат на една права.

(Таа права се нарекува Симпсонова права)

Доказ. Нека M е било која точка од кружницата k опишана околу триаголникот ABC, различна од темињата на триаголникот. (Ако M е едно од темињата на триаголникот, тогаш ортогоналните проекции на точката M врз страните на триаголникот кои се составуваат во тоа теме е темето на триаголникот, па правата низ M и ортогоналната проекција на точката M врз третата страна, ги содржи ортогоналните проекции на точката M врз сите три страни на триаголникот).



Црт. 1

Ги означуваме со N,P,Q ортогоналните проекции на точката M врз страните AB, BC, CA (или на нивните продолженија) соодветно.

Секогаш барем една од тие проекции лежи внатре во страната на триаголникот. Нека тоа е точката P. Притоа важи:

$$\angle ABM + \angle ACM = 180^\circ .$$

Ако $\angle ABM = \angle ACM$, тогаш $N \equiv B$, $Q \equiv C$, што значи дека точките N, P, Q лежат на правата BC.

Нека $\angle ABM \neq \angle ACM$ и нека на пример $\angle ACM$ е остар, а агол $\angle ABM$ е тап. Точката Q лежи на страната CA, а N лежи на продолжението на страната AB преку B и точките N и Q лежат на различни страни на правата BC.

Доволно е да се докаже дека

$$\angle CPQ = \angle BPN \tag{1}$$

Поради $\angle MPC = \angle MQC = 90^\circ$, точките P и Q лежат на кружница со дијаметар MC. Заради $\angle MNB = \angle MPB = 90^\circ$, точките N и P лежат на кружница со дијаметар MB. Затоа

$$\angle CMQ = \angle CPQ \tag{2}$$

односно

$$\angle BPN = \angle BMN \tag{3}$$

Од (1), (2) и (3) доволно е да се покаже дека

$$\angle CMQ = \angle BMN \tag{4}$$

Равенството (4) е очигледно, затоа што за тетивниот четириаголник $ACMB$ важи:

$$\angle ACM = 180^\circ - \angle ABM = \angle MBN$$

Одовде, заради $\angle ACM = 90^\circ - \angle CMQ$ и $\angle MBN = 90^\circ - \angle BMN$, добиваме

$$90^\circ - \angle CMQ = 90^\circ - \angle BMN$$

т.е. $\angle CMQ = \angle BMN$, што значи равенството (4) е исполнето, односно точките N, P, Q се колинеарни.

Забелешка. Може да се докаже дека важи и обратната теорема :

"Точка припаѓа на кружницата опишана околу триаголник, ако ортогоналните проекции на точката врз правите одредени со страните на триаголникот, припаѓаат на една права."

Задача. Нека p е Симсоновата права за точката P која лежи на кружницата k опишана околу триаголникот ABC, и нека P' е точка на пресек на нормалата повлечена од точката P на правата BC и кружницата k .

Да се докаже дека правите AP' и p се паралелни.

Решение. Нека S, R, T се точки од Симсоновата права за точката P , т.е. $PS \perp AB$, $PR \perp BC$, $PT \perp CA$. Бидејќи

$$\angle PSB = \angle PRB = 90^\circ,$$

точките S и R лежат на кружница k_1 со радиус $r = \frac{\overline{PB}}{2}$ и PB е нејзин дијаметар. Заради тоа

$$\angle BSR = \angle BPR \tag{1}$$

како периферириски агли над ист кружен лак во конструираната кружницата k_1 . Исто така

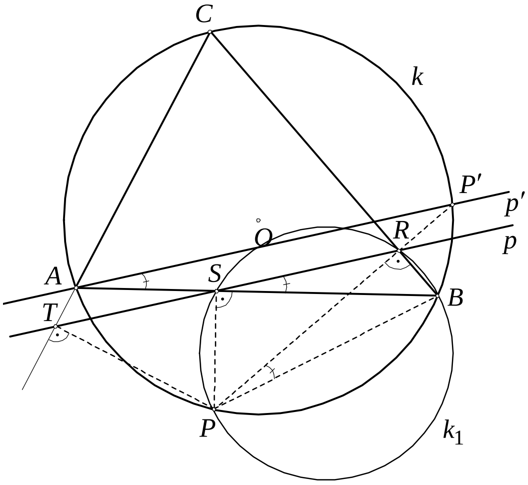
$$\angle BPP' = \angle BAP' \tag{2}$$

како периферириски агли над ист кружен лак во почетната кружница k . Според (1) и (2), добиваме дека

$$\angle BPR = \angle BAP' \tag{2*}$$

Од (1) и (2*) добиваме дека

$$\angle BSR = \angle BAP' \tag{3}$$



Црт. 2

Бидејќи $BS \parallel BA$ (припаѓаат на иста права) и заради (3) добиваме дека и другите два краци се паралелни меѓу себе, т.е. $SR \parallel AP'$. Значи $p \parallel AP'$, што и требаше да се докаже.

Задача. Ако P и Q се дијаметрално спротивни точки на кружницата опишана околу триаголникот ABC , тогаш Симпсоновите прави p_1 и p_2 за тие точки соодветно се заемно нормални.

Решение. Нека P и Q се дијаметрално спротивни точки од кружницата

k и S_1, R_1, T_1 и S_2, R_2, T_2 се точки од правите AB, BC и CA соодветно така што $PS_1 \perp AB$, $PR_1 \perp BC$, $PT_1 \perp CA$ и $PS_2 \perp AB$, $PR_2 \perp BC$, $PT_2 \perp CA$.

Заради равенството $\angle PR_1B = \angle PS_1B = 90^\circ$, точките S_1 и R_1 лежат на една кружница k_{PB}, со дијаметар PB. Аналогно, од $\angle QS_2B = \angle QR_2B = 90^\circ$, точките S_2 и R_2 лежат на кружница k_{QB} со дијаметар QB. Затоа,

$$\angle PBS_1 = \angle PR_1S_1 \qquad (1)$$

како перифериски агли над ист кружен лак во k_{PB}. Бидејќи $PB \perp BQ$ (PQ е дијаметар, и $QS_2 \perp AB$ имаме

$$\angle PBS_1 = \angle BQS_2 \qquad (2)$$

како агли со заемно нормални краци.

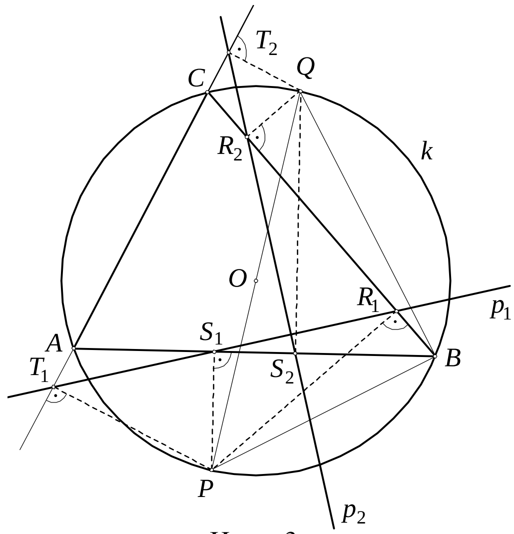
Од друга страна

$$\angle S_2R_2B = \angle BQS_2 \qquad (3)$$

како перифериски агли над ист кружен лак во кружницата k_{QB}. Од (2) и (3) следува

$$\angle PR_1S_1 = \angle S_2R_2B$$

Бидејќи $PR_1 \perp BR_2$, взаемно нормални се и другите два краци на претходните агли, т.е. $S_1R_1 \perp S_2R_2$, односно $p_1 \perp p_2$.



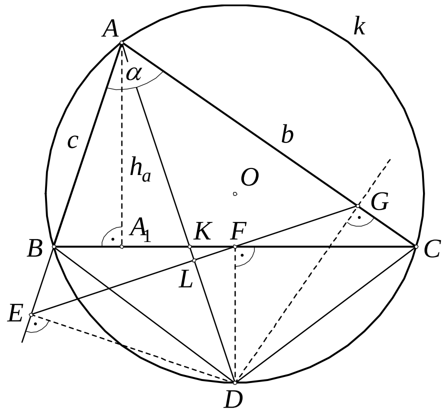
Црт. 3

Со помош на теоремата за Симсонова права ќе решиме една конструктивна задача за триаголник.

Задача. Да се конструира триаголник, ако се дадени α, $b+c$, h_a.

Решение. Нека ABC е бараниот триаголник и k е опишаната кружница околу него. Нека D е средина на лакот BC на кружницата k што не го содржи темето A. Нека E, F, G се нормалните проекции на точката D врз правите AB, BC, CA соодветно и K е пресек на правите AD и BC а L е пресек на правите AD и EG.

Очигледно, полуправата AD е симетрала на $\angle BAC$ и затоа $\overline{DE} = \overline{DG}$.



Црт. 4

Точките E, F и G се колинеарни (Симпсонова права), а бидејќи F е средина на страната BC, правата EG сече точно една од правите AB и AC, на пример AC.

Бидејќи $\angle DBA + \angle DBE = 180^\circ$, важи $\angle DBE = \angle DCA (= \angle DCG)$. Освен тоа, исполнето е $\angle DEB = \angle DGC = 90^\circ$ и $\overline{DE} = \overline{DG}$, па според тоа $\Delta DEB \cong \Delta DGC$. Значи, $\overline{BE} = \overline{CG}$, и заради тоа $\overline{AE} = \overline{AG} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) = \frac{1}{2}(b+c)$. Бидејќи $\angle DAE = \angle DAG = \frac{\alpha}{2}$

и $\angle E = \angle G = 90^\circ$, триаголниците ΔADE и ΔADG можат да се конструираат.

Нека $\overline{AA_1} = h_a$. Бидејќи $AD \perp EG$, имаме $KL \perp EG$, па според тоа $\Delta AKA_1 \approx \Delta FLK$. Заради тоа што $\Delta FLK \approx \Delta DFL$ и претходното, имаме $\Delta AKA_1 \approx \Delta DFL$. Значи,

$$\frac{\overline{DL}}{\overline{AA_1}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AD} - \overline{DK}} \tag{5}$$

Од сличноста на триаголниците DFK и DFL добиваме

$$\overline{DF}^2 = \overline{DL} \cdot \overline{DK} \tag{6}$$

а од сличноста на триаголниците ADG и добиваме

$$\overline{DG}^2 = \overline{DL} \cdot \overline{DA} \tag{7}$$

Од (5), (6) и (7) добиваме

$$\overline{DF} \cdot \overline{AA_1} - \overline{DL} \cdot \overline{DA} + \overline{DL} \cdot \overline{DK} = 0$$

односно

$$\overline{DF}^2 + \overline{DF} \cdot \overline{AA_1} - \overline{DG}^2 = 0 .$$

Бидејќи должините на отсечките AA_1 и DG се познати, задачата се сведува на конструкција на решенијата на равенката

$$x^2 + px - q^2 = 0 \tag{8}$$

каде $p = h_a$ и $q = \overline{DG}$.

Конструкцијата може да се изведе на следниот начин:

Се конструира отсечка MN ($\overline{MN} = p$) и произволна кружница k_1 која минува низ точките M и N. Потоа се конструира точката P на правата MN, така да тангентната отсечка од точката P на кружницата k_1 има должина q. Ако распоредот на точките е $M - N - P$, тогаш $\overline{PN} = x$. Навистина, од $\overline{PN} \cdot \overline{PM} = q^2$, добиваме $\overline{PN}(\overline{PN} + p) = q^2$, односно

$$\overline{PN}^2 + p\overline{PN} - q^2 = 0 ,$$

т.е. $\overline{PN} = x$.

Според претходната дискусија, лесно можеме да го конструираме бараниот триаголник. Конструираме четириаголник $AEDG$, во кој

$$\overline{AE} = \overline{AG} = \tfrac{1}{2}(b+c), \quad \angle EAG = \alpha \quad \text{и} \quad \angle AED = \angle AGD = 90^\circ .$$

Потоа конструираме отсечка со должина x која е решение на равенката (8) и кружница k_2 со центар во точката D и радиус x. Ја означуваме со F пресечната точка на кружницата k_2 со правата EG. Во точката F конструираме нормала на правата DF, која ги сече правите AE и AG во точките B и C, соодветно. Тогаш ABC е триаголникот кој ги има бараните својства. Јасно,

i) ако $h_a < \frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}$ постојат две решенија.

ii) ако $h_a = \frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}$ постои едно решение

iii) ако $h_a > \frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}$ задачата нема решенија.