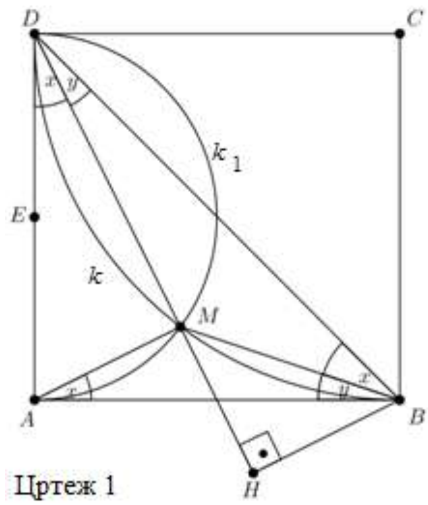
Драгољуб Милошевиќ,
Горњи Милановац

КВАДРАТ И ТОЧКА

Елементарните геометриски фигури често пати имаат неочекувани својства, за чиј доказ најчесто се доволни знаењата со кои се стекнуваш во училиштето. Во оваа статија ќе разгледаме низа вакви својства поврзани со квадратот и точка M. За таа цел најпрво ќе ја разгледаме следнава задача.

Задача 1. Нека е даден квадрат $ABCD$ и точката M нека е пресек на полукружницата со дијаметар AD и кружницата $k(C,BC)$ (цртеж 1). Докажи ги следниве равенства:

1) $\angle AMB = 135^0$,
2) $\overline{BM} = \overline{AM}\sqrt{2}$,
3) $\overline{AM}^2 + \overline{CM}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{DM}^2$,
4) $P_{\Delta AMD} = P_{\Delta BMD}$,
5) $P_{\Delta ABM} = \frac{1}{10} P_{\Diamond ABCD}$.



Цртеж 1

Решение. 1) Позната ни е следнава теорема: *Во произволна кружница централниот агал е два пати поголем од периферниот агол над истиот лак на кружницата.* Во нашите разгледувања ќе ги користиме следниве последици на оваа теорема:

a) *Периферниот агол над дијаметарот на произволна кружница е еднаков на прав агол, т.е. тој е еднаков на* 90^0.
b) *Аголот меѓу тетивата и тангентата повлечена во една од крајните точки на тетивата на произволна кружница е еднаков на периферниот агол над тетивата.*

Со E да ја означиме средината на страната AD на квадратот $ABCD$. Аголот $\angle MAB = x$ е агол меѓу тангентата AB и тетивата AM на кружницата $k_1(E,AE)$, а аголот $\angle MBA = y$ е агол меѓу тангентата AB и тетивата BM на кружницата k. Затоа $\angle ADM = \angle MAB = x$ и $\angle BDM = \angle MBA = y$ (цртеж 1). Бидејќи

$$45^0 = \angle ADB = \angle ADM + \angle BDM = x + y \text{, т.е. } x + y = 45^0 \text{,}$$

од триаголникот ΔABM имаме:

$$\angle AMB = 180^0 - (\angle MAB + \angle ABM) = 180^0 - (x+y) = 180^0 - 45^0,$$

а оттука $\angle AMB = 135^0$.

2) Троуголниците ABM и BDM имаат еднакви агли, па затоа се слични, што значи дека $\overline{AM} : \overline{MB} = \overline{AB} : \overline{BD}$. Оттука, заради $\overline{BD} = \overline{AB}\sqrt{2}$, добиваме $\overline{AM} : \overline{MB} = 1 : \sqrt{2}$, т.е. $\overline{BM} = \overline{AM}\sqrt{2}$.

3) Од $\angle AMD = 90^0$, како периферен агол над дијаметар, следува дека триаголникот AMD е правоаголен. Сега од Питагоровата теорема следува: $\overline{AM}^2 + \overline{DM}^2 = \overline{AD}^2$. Од, $\overline{BM} = \overline{AM}\sqrt{2}$, т.е. $\overline{BM}^2 = 2\overline{AM}^2$ и $\overline{AD} = \overline{CM}$ добиваме

$$\begin{aligned}\overline{BM}^2 + \overline{DM}^2 &= (\overline{AM}^2 + \overline{AM}^2) + \overline{DM}^2 = \overline{AM}^2 + (\overline{AM}^2 + \overline{DM}^2) \\ &= \overline{AM}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{CM}^2.\end{aligned}$$

4) Нека е H подножјето на нормалата од тачката B на правата DM (цртеж 1). Триаголникот BMH е рамнокрак и правоаголен бидејќи

$$\angle BHM = 90^0, \angle BMH = 180^0 - 135^0 = 45^0, \angle MBH = 45^0.$$

Од Питагоровата теорема применета на овој правоаголен триаголник имамо: $\overline{BH}^2 + \overline{MH}^2 = \overline{BM}^2$. Одовде, заради $\overline{BH} = \overline{MH}$ важи $2\overline{BH}^2 = \overline{BM}^2$ или $\overline{BH}^2 = \frac{1}{2} BM^2$, т.е. $\overline{BH} = \frac{\overline{BM}}{\sqrt{2}}$. Плоштината на триаголникот BDM е

$$P_{\Delta BDM} = \frac{1}{2}\overline{DM} \cdot \overline{BH} = \frac{1}{2}\overline{DM} \cdot \frac{\overline{BM}}{\sqrt{2}},$$

а на правоаголниот триаголник AMD е

$$P_{\Delta AMD} = \frac{1}{2}\overline{AM} \cdot \overline{DM}.$$

Бидејќи $\overline{BM} = \overline{AM}\sqrt{2}$, имамњ:

$$P_{\Delta BDM} = \frac{1}{2}\overline{DM} \cdot \frac{\overline{AM}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\overline{DM} \cdot \overline{AM},$$

па је $P_{\Delta AMD} = P_{\Delta BDM}$.

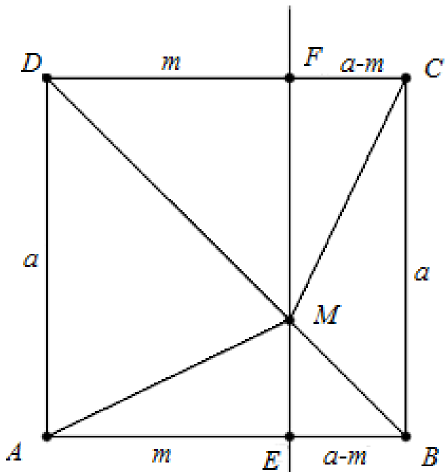
5) Докажавме дека триаголниците ABM и BDM се слични, пришто се должините на страните на триаголникот BDM поголеми $\sqrt{2}$ пати од должините на соодветните страни на триаголникот ABM. Тоа, пак, значи дека

$$P_{\Delta BDM} = (\sqrt{2})^2 P_{\Delta ABM},$$

односно $P_{\Delta BDM} = 2P_{\Delta ABM}$. Бидејќи

$$\tfrac{1}{2}P_{ABCD} = P_{\Delta ABD} = P_{\Delta ABM} + P_{\Delta BDM} + P_{\Delta AMD}$$
$$= P_{\Delta ABM} + 2P_{\Delta BDM} = P_{\Delta ABM} + 2\cdot 2P_{\Delta ABM}$$

Имамо $P_{\Delta ABM} = \frac{1}{10}P_{ABCD}$. ■



Цртеж 2

Задача 2. Равенството 3) важи за произволна точка M из внатрешноста на даден квадрат $ABCD$.

Решение. Нека правата која ја содржи тачку M и е паралелна со страните AD и BC ги сече страните AB и CD во тачките E и F соодветно (цртеж 2). Тогаш

$\overline{AE} = \overline{DF} = m$ и $\overline{BE} = \overline{CF} = a - m$.

Од Питагоровата теорема применета на триаголониците AEM и BME, имаме

$$\overline{ME}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{AM}^2 - m^2 \text{ и } \overline{ME}^2 = \overline{BM}^2 - \overline{BE}^2 = \overline{BM}^2 - (a-m)^2,$$

а оттука добиваме

$$\overline{AM}^2 - m^2 = \overline{BM}^2 - (a-m)^2.$$

На сличен начин добиваме

$$CM^2 - (a-m)^2 = DM^2 - m^2.$$

Со собирање на последните две равенства го добиваме равенството

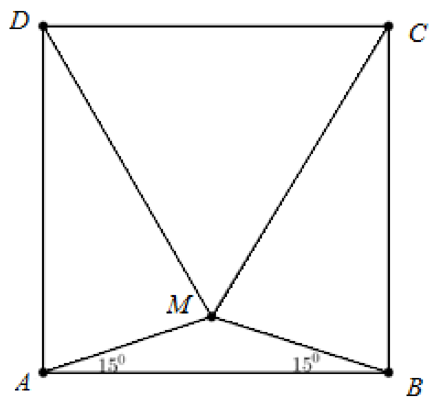
$$\overline{AM}^2 - m^2 + \overline{CM}^2 - (a-m)^2 = \overline{BM}^2 - (a-m)^2 + \overline{DM}^2 - m^2,$$

од каде следува равенството

$$\overline{AM}^2 + \overline{CM}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{DM}^2. \ ■$$

Задачи за самостојна работа

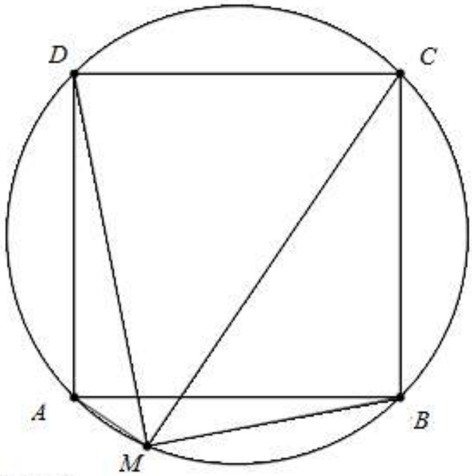
1. Ако се P и Q подножја на нормалите од тачката M на страните AB и AD, соодветно (цртеж 1), колку изнесува $\overline{MP} : \overline{MQ}$?
2. Нека во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е избрана точка



Цртеж 3

M таква да е $\angle ABM = \angle BAM = 15^0$ (цртеж 3). Докажи дека ΔCDM е рамностран.

3. На малиот лак AB на кружницата опишана околу квадратот $ABCD$ произволно е изабрана точка M. Дали важи равенството $\overline{AM}^2 + \overline{CM}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{DM}^2$ (цртеж 4)?



Цртеж 4

4. Даден е квадрат $ABCD$ со должина на страна a. Точката E е средина на страната BC, а точката F е подножје на нормалата од A на отсечката DE. Докажи дека ΔABM е рамнокрак.
5. а) Докажи дека во произволен триаголник ABC важи равенството

$$\overline{AM}^2 = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}{2} - \frac{\overline{BC}^2}{4}, \text{ (} AM \text{ е тежишна линија).}$$

б) Ако е точката P во внатрешноста на квадратот $ABCD$, со помош на претходното равенство докажи дека $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{DP}^2$.