БМО2016

1. Определи ги сите инјективни функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секој реален број x и секој природен број n важи

$$|\sum_{i=1}^{n} i(f(x+i+1)-f(f(x+i)))|<2016\,.$$

Решение. Да означиме

$$S(x,n)=\sum_{i=1}^{n} i(f(x+i+1)-f(f(x+i)))\,.$$

Да фиксираме $x\in\mathbb{R}$. Од неравенствата

$$|S(x-n,n)|<2016 \text{ и } |S(x-n,n-1)|<2016$$

добиваме

$n\cdot|f(x+1)-f(f(x))|=|S(x-n,n)-S(x-n,n-1))|<4032$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Последното е можно само ако $f(f(x))=f(x+1)$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Но функцијата f е инјективна, па затоа $f(x)=x+1$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

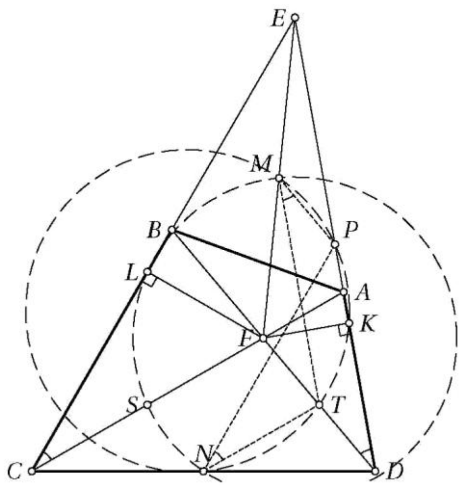
2. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник за кој $\overline{AB}<\overline{CD}$. Дијагоналите AC и BD се сечат во точката F, а правите AD и BC се сечат во точката E. Нека K и L се соодветно подножјата на нормалите повлечени од точката F на правите AD и BC, а M,S и T се средините на отсечките EF,CF и DF, соодветно. Докажи дека втората пресечна точка на кружниците опишани околу триаголниците MKT и MLS припаѓа на отсечката CD.

Решение. Ќе докажеме дека кружниците опишани околу триаголниците MKT и MLS минуваат низ средината на отсечката CD.

Кружницата MKT е Ојлеровата кружница за триаголникот DEF, па затоа таа минува низ средината P на отсечката DE. Бидејќи $PN\,||\,EC$, $MT\,||\,ED$, $MP\,||\,BD$ и $TN\,||\,AC$, во ориентираните агли важи

$\measuredangle PMT=\measuredangle BDA=\measuredangle BCF=\measuredangle PNT$,

па затоа N припаѓа на кружницата $MKPT$. Аналогно, N припаѓа на кружницата MLS.



Забелешка. Во случај кога CD е дијаметар на опишаната кружница околу четириаголникот $ABCD$ кружниците MKT и MLS се совпаѓаат.

3. Определи ги сите монични полиноми f со целобројни коефициенти кои го имаат следново својство: постои природен број N таков што $2(f(p)!)+1$ е делив со p за секој прост број $p>N$ за кој $f(p)$ е природен број.

   Напомена. Моничен полином е полином со водечки коефициент 1.

   Решение. Јасно е дека полиномот f не е константен. Од друга страна, од условот на задачата следува дека $p \nmid f(p)!$, т.е. $f(p)<p$ за секој $p>N$, па затоа мора да важи $\deg f=1$. Според тоа, $f(x)=x-c$, за некој $c\in\mathbb{N}$. Бидејќи според теоремата на Вилсон

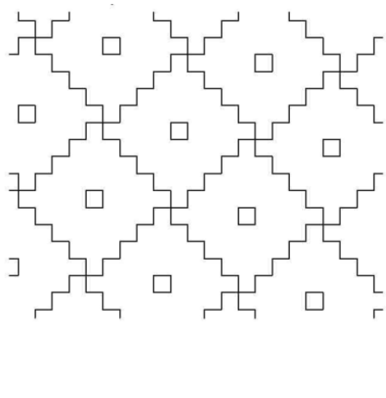
$$2(p-c)!\equiv -1\equiv (p-1)!\equiv (-1)^{c-1}(c-1)!(p-c)!\,(\mathrm{mod}\, p)$$

   за секој прост број $p>N$, следува дека $(-1)^{c-1}(c-1)!\equiv 2\,(\mathrm{mod}\, p)$, односно $(-1)^{c-1}(c-1)!=2$. Од последното равенство добиваме $c=3$, па затоа $f(x)=x-3$.

4. Рамнината е поделена на единечни квадрати со помош на две множества паралелни прави кои формираат бесконечна решетка. Секој единечен квадрат е обоен во една од 1201 боја така што ниту еден правоаголник со периметар 100 не содржи два единечни квадрати обоени со иста боја. Докажи дека ниту еден правоаголник со димензии 1×1201 (или 1201×1) не содржи два квадрата обоени со иста боја.

   Напомена. Се претпоставува дека страните на сите разгледувани правоаголници припаѓаат на решетката.

   Решение. Ќе сметаме дека центрите на полињата (т.е. единичните квадрати) се точки со целобројни координати. Дијамант со центар (a,b) го нарекуваме множеството од сите полиња со центри (x,y) за кои важи $|x-a|+|y-b|<24$. Секои две полиња од еден ист дијамант припаѓаат на еден правоаголник со периметар 100. Бидејќи дијамантот се состои од $24^2+25^2=1201$ полиња, меѓу нив мора да се појават сите 1201 бои.



   Да фиксираме една боја, да кажеме сина. Секое поле A припаѓа барем на еден дијамант со центар во сино поле. Навистина, дијамант со центар A содржи едно сино поле, да кажеме B, а тогаш A припаѓа на дијамантот со центар B. Од друга страна, ако некои два дијаманти со центри во сини полиња B и C имаат заедничко поле A, тогаш двете полиња B и C припаѓаат на дијамантот со центар A, што не е можно. Според тоа, дијамантите со сини центри го покриваат секое поле точно еднаш.

Лесно се гледа дека поплочувањето со дијаманти е единствено до симетрија (на цртежот е прикажано аналогно поплочување со помали дијаманти). Без ограничување на општоста, центрите на тие дијаманти се точки (x, y) за које $1201 \mid 24x - 25y$. Како за секој $x \in \mathbb{Z}$ постои точно еден ваков y по модул 1201, добиваме дека тврдењето на задачата е точно.