Алекса Малчески
Ристо Малчески
Методи Главче
Самоил Малчески
Димитар Треневски

РЕПЕТИТОРИЈ ПО ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА – ТРЕТ ДЕЛ

Скопје, 2020

Рецензенти

Слаѓана Брсаковска
Даниел Велинов
Сања Костадинова

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски",
Скопје

511.3(075.3)(076)
514.11(075.3)(076)

РЕПЕТИТОРИЈ по елементарна математика. Д. 3 / Алекса Малчески ... [и др.]. - Скопје : Армаганка, 2020. - 223 стр. ; 25 см

Други автори: Ристо Малчески, Методи Главче, Самоил Малчески, Димитар Треневски. - Библиографија: стр. 217-223

ISBN 978-608-4904-59-5
1. Малчески, Алекса [автор] 2. Малчески, Ристо [автор] 3. Главче, Методи [автор] 4. Малчески, Самоил [автор] 5. Треневски, Димитар [автор]
а) Елементарна математика - Задачи за средно образование
COBISS.MK-ID 112056586

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Репетиториј по елементарна математика – трет дел* е наменета за ученици од средното образование. Идејата на оваа серија од четири збирки задачи е да овозможи повторување на материјалот за кој авторите сметаат дека е неопходен за успешно продолжување на студиите на полето на математиката, физиката, информатиката, електротехничките, машинските и градежните науки. Книгава содржи 480 решени задачи. Како и во првите два дела од оваа серија, така и во оваа книга повеќето од задачите кои се на ниво на задачите кои се задаваат на општинските и регионалните натпревари по математика, но во книгава се поместени и задачи кои со се значително поголема тежина. Оттука, оваа збирка задачи може да им послужи и на учениците кои се подготвуваат за натпреварите по математика.

Во книгава четири одделни целини се обработени задачи од експоненцијалните и логаритамсклите функции, равенки и неравенки, тригомотеријата, аналитичката геометрија и неравенствата. Притоа, задачите се распределени по области. Така, на пример, задачите од неравенствата се распределени во шест дела, и тоа: Елементарни неравенства, Математичка индукција и неравенства, Неравенства меѓу средините, Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц, Логаритамски неравенства и Тригонометриски неравенства.

Рецензентите, д-р Слаѓана Брсаковска, д-р Даниел Велинов и д-р Сања Костадинова, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје   Авторите
јануари, 2020 г.

I ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ И ЛОГАРИТАМСКИ ФУНКЦИИ, РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

1. ИДЕНТИТЕТИ

1. Нека a, b и x да се позитивни реални броеви различни од 1. Докажи дека

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b .$$

Решение. Последователно добиваме

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = \log_x ab \cdot \log_a x = (\log_x a + \log_x b)\log_a x = \log_x a \log_a x + \log_x b \cdot \log_a x$$

$$= 1 + \frac{\log_a x}{\log_b x} = 1 + \frac{\log_x b}{\log_x a} = 1 + \log_a b.$$

2. Нека $x > 0$. Докажи го равенството

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \ldots + \frac{1}{\log_n x} = \frac{1}{\log_{n!} x} .$$

Решение. Користејќи го равенството $\log_a b \log_b a = 1$, за $a, b > 0$ добиваме

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \ldots + \frac{1}{\log_n x} = \log_x 2 + \log_x 3 + \ldots + \log_x n = \log_x n! = \frac{1}{\log_{n!} x} .$$

3. Нека $x > 0$. Докажи го равенството

$$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \ldots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} = (1 - \frac{1}{n})(\frac{1}{\log_x 2})^2 .$$

Решение. Равенството ќе го докажеме со користење на равенствата

$$\log_a x^n = n \log_a x \,,\ (x > 0) \quad \text{и} \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} .$$

Имаме:

$$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \ldots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} = \frac{1}{1 \cdot 2(\log_x 2)^2} + \frac{1}{2 \cdot 3(\log_x 2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n(\log_x 2)^2}$$

$$= (\frac{1}{\log_x 2})^2 (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n})$$

$$= (1 - \frac{1}{n})(\frac{1}{\log_x 2})^2.$$

4. Докажи го равенството

$$\log_2 (\log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}_{n}) = -n .$$

Решение. Имаме

$$\log_2 (\log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}_{n}) = \log_2 \log_2 (\ldots((2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\ldots)^{\frac{1}{2}} = \log_2 \log_2 2^{1/2^n} = \log_2 \log_2 2^{2^{-n}}$$

$$= \log_2 (2^{-n} \log_2 2) = \log_2 2^{-n} = -n \log_2 2 = -n.$$

5. Ако a и b се катети, c хипотенуза на правоаголен троиаголник и $c-b\neq 1$ и $c+b\neq 1$, докажи дека

$$\log_{b+c} a+\log_{c-b} a=2\log_{c+b} a\cdot\log_{c-b} a.$$

Решение. Заради $c^2=a^2+b^2>b^2$ и позитивноста на броевите a,b и c добиваме $c>b$. Значи $c-b>0$, $c-b\neq 1$ и $c+b\neq 1$, па постојат $\log_{c-b} a$ и $\log_{c+b} a$. . Ако го логаритмираме равенството

$$a^2=c^2-b^2=(c-b)(c+b),$$

прв пат со основа $c+b$, а втор пат со основа $c-b$, ги добиваме равенствата:

$$2\log_{c+b} a=\log_{c+b}(c-b)+1,\ 2\log_{c-b} a=\log_{c-b}(c+b)+1.$$

Ако ги поможиме овие две равенства, добиваме:

$$\begin{aligned}4\log_{c+b} a\log_{c-b} a&=\log_{c+b}(c-b)+\log_{c-b}(c+b)+1+\log_{c+b}(c-b)\cdot\log_{c-b}(c+b)\\&=\log_{c+b}(c-b)+\log_{c-b}(c+b)+2\\&=2\log_{c-b} a-1+2\log_{c+b} a-1+2\\&=2\log_{c-b} a+2\log_{c+b} a.\end{aligned}$$

Од последното равенство следува бараното равенство.

6. Докажи ги идентитетите

$$\log\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}=-2\log(\sqrt{x^2+1}+x)=2\log(\sqrt{x^2+1}-x)$$

Решение. Јасно, за секој реален број x важи $\sqrt{x^2+1}\pm x>0$. Според тоа,

$$\log\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\log\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\log(\sqrt{x^2+1}+x)^{-2}=-2\log(\sqrt{x^2+1}+x) \text{ и}$$

$$\log\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\log\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}-x}=\log(\sqrt{x^2+1}-x)^2=2\log(\sqrt{x^2+1}-x),$$

Што и требаше да се докаже.

7. Докажи дека

а) $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$,

б) $\sum_{k=1}^{n}\log(1+k)+k\log(1+\frac{1}{k})=(1+n)\log(1+n).$

Решение. а) Имаме:

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k=\frac{2\cdot 3^2\cdot 4^3\cdot\ldots\cdot(n+1)^n}{1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^n}=\frac{(n+1)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

б) Доволно е равенството под а) да се помножи со $(n+1)!$ и да се логаритмира добиеното равенство. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

8. Ако $x>0, x\neq 1, a_k>0$ и $a_k\neq 1\,(k=1,2,3,\ldots,n)$, докажи го равенството

$$\log_{a_1a_2\ldots a_n} x=\frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x}+\frac{1}{\log_{a_2} x}+\ldots+\frac{1}{\log_{a_n} x}}$$

Решение. Имаме

$$\log_{a_1a_2...a_n} x = \frac{1}{\log_x a_1a_2...a_n} = \frac{1}{\log_x a_1+\log_x a_2+...+\log_x a_n} = \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x}+\frac{1}{\log_{a_2} x}+...+\frac{1}{\log_{a_n} x}}.$$

9. Нека $n_1, n_2, ..., n_k$ се сите делители на природниот број n, различни од 1 и n. Докажи дека

$$\frac{2}{\log n}(\log n_1 + \log n_2 + ... + \log n_k) = k.$$

Решение. Нека $n_1 < n_2 < ... < n_k$. Тогаш $n_1 n_k = n_2 n_{k-1} = ... = n_k n_1 = n.$ Оттука $(n_1 n_2 ... n_k)^2 = n^k$ па според тоа

$$k \log n = 2(\log n_1 + \log n_2 + ... + \log n_k).$$

10. Позитивните реални броеви a и b го исполнуваат равенството

$$\log(1+a^2) - \log a - 2\log 2 = 1 - \log(100+b^2) + \log b.$$

Пресметај го збирот $a+b$.

Решение. Од својствата на логаритми добиваме

$$\log(1+a^2) + \log(100+b^2) = \log a + \log 4 + \log 10 + \log b$$

$$\log[(1+a^2)(100+b^2)] = \log 40ab$$

Бидејќи $y = \log x$ е монотона функција, имаме

$$\log[(1+a^2)(100+b^2)] = \log 40ab,$$

$$(1+a^2)(100+b^2) = 40ab \qquad (*)$$

Од тоа што $a, b \in \mathbb{R}^+$, според неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме $1+a^2 \geq 2a$ и $100+b^2 \geq 20b$, при што и во двата случаи важи равенство ако и само ако $a=1$ и $b=10$. Значи, ако $a \neq 1$ или $b \neq 10$, тогаш

$$(1+a^2)(100+b^2) > 40ab,$$

што противречи на (*). Според тоа, $a=1, b=10$ па затоа

$$a+b = 1+10 = 11.$$

11. Најди $\log_{35} 28$, ако $\log_{14} 7 = a$ и $\log_{14} 5 = b$.

Решение. Имаме:

$$\log_{35} 28 = \frac{\log_{14} 28}{\log_{14} 35} = \frac{\log_{14} 14+\log_{14} 2}{\log_{14} 5+\log_{14} 7} = \frac{1+\log_{14}\frac{14}{7}}{a+b} = \frac{1+\log_{14} 14-\log_{14} 7}{a+b} = \frac{2-a}{a+b}.$$

12. Да се пресметаат $\lg 2$ и $\lg 5$ ако се знае дека $\lg 2 \cdot \lg 5 = 0,210$.

Решение. Нека $\lg 2 = x_1$ и $\lg 5 = x_2$. Тогаш за x_1 и x_2 важи

$$x_1 \cdot x_2 = 0,210 \text{ и } x_1 + x_2 = 1$$

па затоа x_1 и x_2 се решенија на квадратната равенка

$$x^2 - x + 0,210 = 0.$$

Решенијата на ова равенка се $0,7$ и $0,3$. Бидејќи $\lg 2 < \lg 5$, добиваме дека

$$\lg 2 = 0,3 \text{ и } \lg 5 = 0,7 .$$

13. Нека $x > 0$. Докажи го идентитетот

$$\frac{1}{\log_5 x} + \frac{1}{\log_{5^2} x} + \frac{1}{\log_{5^3} x} + \ldots + \frac{1}{\log_{5^{10}} x} = \frac{55}{\log_5 x} .$$

Решение. Ако го искористиме идентитетот $(\log_a b)^{-1} = \log_b a$, добиваме

$$\frac{1}{\log_5 x} + \frac{1}{\log_{5^2} x} + \frac{1}{\log_{5^3} x} + \ldots + \frac{1}{\log_{5^{10}} x} = \log_x 5 + \log_x 5^2 + \ldots + \log_x 5^{10}$$

$$= \log_x 5 + 2\log_x 5 + \ldots + 10\log_x 5$$

$$= (1+2+3+4+\ldots+10)\log_x 5$$

$$= 55\log_x 5 = \frac{55}{\log_5 x}.$$

14. Нека $a,b,c,N > 0$**.** Докажи дека

$$\log_a N \cdot \log_b N + \log_b N \cdot \log_c N + \log_c N \cdot \log_a N = \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N} .$$

Решение. Користејќи ги особините на логаритамската функција имаме

$$\log_a N \cdot \log_b N + \log_b N \cdot \log_c N + \log_c N \cdot \log_a N =$$

$$= \frac{\log_{abc} N \cdot \log_{abc} N}{\log_{abc} a \cdot \log_{abc} b} + \frac{\log_{abc} N \cdot \log_{abc} N}{\log_{abc} b \cdot \log_{abc} c} + \frac{\log_{abc} N \cdot \log_{abc} N}{\log_{abc} a \cdot \log_{abc} c}$$

$$= \frac{\log_{abc}^2 N \cdot (\log_{abc} a + \log_{abc} b + \log_{abc} c)}{\log_{abc} a \cdot \log_{abc} b \cdot \log_{abc} b}$$

$$= \frac{\log_{abc}^2 N \cdot 1}{\log_{abc} a \cdot \log_{abc} b \cdot \log_{abc} b}$$

$$= \frac{\log_{abc}^2 N}{\frac{\log_{abc} N}{\log_a N} \cdot \frac{\log_{abc} N}{\log_b N} \cdot \frac{\log_{abc} N}{\log_c N}}$$

$$= \frac{\log_a N \cdot \log_a N \cdot \log_a N}{\log_{abc} N}.$$

15. Нека $a, x > 0$. Докажи дека

$$\frac{1}{\log_x a \cdot \log_x a^2} + \frac{1}{\log_x a^2 \cdot \log_x a^3} + \ldots + \frac{1}{\log_x a^{n-1} \cdot \log_x a^n} = \frac{n-1}{n} \log_a^2 x .$$

Решение. Аналогно како во задача 3 добиваме:

$$\frac{1}{\log_x a \cdot \log_x a^2} + \frac{1}{\log_x a^2 \cdot \log_x a^3} + \ldots + \frac{1}{\log_x a^{n-1} \cdot \log_x a^n} =$$

$$= \frac{1}{\log_x a \cdot 2\log_x a} + \frac{1}{2\log_x a \cdot 3\log_x a} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\log_x a \cdot n\log_x a}$$

$$= \frac{1}{\log_x^2 a}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)$$

$$= \frac{1}{\log_x^2 a}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)$$

$$= \frac{1}{\log_x^2 a}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n} \log_a^2 x.$$

2. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ И ЛОГАРИТАМСКИ РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

1. Да се реши равенката

$$3^{x-1}+3^{x-2}+3^{x-3}+3^{x-4}+3^{x-5}+3^{x-6}=364.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
&3^5 3^{x-6}+3^4 3^{x-6}+3^3 3^{x-6}+3^2 3^{x-6}+3^1 3^{x-6}+3^{x-6}=364\\
&364\cdot 3^{x-6}=364\\
&3^{x-6}=3^0\\
&x=6.
\end{aligned}$$

2. Да се реши равенката $2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}=2\cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$.

Решение. Ќе воведеме смена $x=t^{12}$, $t\geq 0$, при што $\sqrt[12]{x}=t$, $\sqrt[4]{x}=t^3$ и $\sqrt[6]{x}=t^2$. Притоа добиваме:

$$2^t+2^{t^3}=2\cdot 2^{t^2}.$$

Бидејќи 2^t и 2^{t^3}, и t и t^3 се ненегативни реални броеви, од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме

$$2^t+2^{t^3}\geq 2\sqrt{2^t\cdot 2^{t^3}}=2\cdot 2^{\frac{t+t^3}{2}}\geq 2\cdot 2^{t^2}.$$

Равенство е исполнето ако и само ако $2^t=2^{t^3}$ и $t=t^3$. Во двата случаи добиваме дека решенија се $t_1=0$, $t_2=1$ и $t_3=-1$. Јасно, t_3 не е решение.

Конечно, решенија на почетната равенка се $x_1=0$ и $x_2=1$.

3. Определи ги решенијата на равенката

$$8^x+27^x+64^x+125^x=24^x+30^x+40^x+60^x.$$

Решение. Ако воведеме смени $a=2^x$, $b=3^x$, $c=4^x$ и $d=5^x$, равенката го добива обликот

$$a^3+b^3+c^3+d^3=abc+abd+acd+bcd,$$

каде $a,b,c,d>0$.

Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме

$$\begin{cases}a^3+b^3+c^3\geq 3abc\\ a^3+b^3+d^3\geq 3abd\\ a^3+c^3+d^3\geq 3acd\\ b^3+c^3+d^3\geq 3bcd\end{cases}\tag{1}$$

Ако овие неравенства ги собереме, добиваме

$$3a^3+3b^3+3c^3+3d^3\geq 3abc+3abd+3acd+3bcd$$

$$a^3+b^3+c^3+d^3\geq abc+abd+acd+bcd\tag{2}$$

Во (2) равенство важи ако и само ако неравенствата во (1) се равенства. Во (1) неравенствата се равенства, ако и само ако

$$a = b = c = d\ .$$

Од $a = c$, добиваме $2^x = 4^x$. Единствено рашение на последната равенка е $x = 0$.

Не е тешко да се провери дека тоа е решение и на почетната равенка.

4. Да се реши равенката $3\sqrt[x]{81} - 10\sqrt[x]{9} + 3 = 0$.

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во обликот

$$3 \cdot (9^{\frac{1}{x}})^2 - 10 \cdot 9^{\frac{1}{x}} + 3 = 0.$$

Воведуваме смена $9^{\frac{1}{x}} = y$ и ја добиваме равенката $3y^2 - 10y + 3 = 0$ чии решенија се $y_1 = 3$ и $y_2 = \frac{1}{3}$. Според тоа, $9^{\frac{1}{x}} = 3$ па затоа $3^x = 9$ т.е. $x = 2$ и $9^{\frac{1}{x}} = 3^{-1}$ па затоа $3^{-x} = 9$ и $x = -2$.

5. Дадена е функцијата $f(x) = (k - \alpha)x^2 - (3k - 2)x + 3k + 1,$ каде α е збирот на корените на равенката $16^x - 5 \cdot 4^x + 64 = 0$ и k е реален параметар.

а) Да се најде α.

б) Ако $\alpha = 3,$ да се најдат сите вредности на параметарот k, за кои корените на равенката $f(x) = 0$ се позитивни.

Решение. а) Со смената $y = 4^x$ дадената равенка се сведува на системот:

$$\begin{cases} y^2 - 20y + 64 = 0 \\ y > 0 \end{cases},$$

чии решенија се $y = 4$ и $y = 16.$ Оттука наоѓаме $x = 1$ и $x = 2$, па затоа $\alpha = 3.$

б) Ако $k = 3$, тогаш равенката $f(x) = 0$ го добива обликот $-7x + 10 = 0$ и нејзиното решение е $x_0 = \frac{10}{7} > 0.$ Нека $k \neq 3$. Тогаш од Виетовите формули следува дека корените x_1 и x_2 на равенката $f(x) = 0$ се позитивни ако и само ако

$$\begin{cases} D = -3k^2 + 20k + 16 \geq 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{3k-2}{k-3} > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{3k+1}{k-3} > 0 \end{cases}$$

Од првото неравенство имаме $k \in [\frac{10-2\sqrt{37}}{3}, \frac{10+2\sqrt{37}}{3}],$ од второто добиваме $k \in (-\infty, \frac{2}{3}) \cup (3, +\infty),$ а од третото $k \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (3, +\infty).$ Конечно, од пресекот на добиените интервали заедно со случајот $k = 3$ добиваме:

$$k \in [\frac{10-2\sqrt{37}}{3}, -\frac{1}{3}) \cup [3, \frac{10+2\sqrt{37}}{3}].$$

6. Да се определат реалните решенија на равенката

$$8^{\frac{x-3}{2x-7}} \sqrt[3]{\sqrt[x]{0,5^{4x+3}}} = 1\ .$$

Решение. Имајќи предвид дека $8=2^3$ и $0,5=2^{-1}$, дадената равенка ја сведуваме на равенката $2^{\frac{x-3}{2x-7}}\cdot 2^{\frac{-4x-3}{3x-3}}=1$, од каде што добиваме $2^{\frac{x-3}{2x-7}+\frac{-4x-3}{3x-3}}=1$. Но $2^y=1$ ако и само ако $y=0$, па од претходната равенка ја добиваме равенката $\frac{3x-9}{2x-7}+\frac{-4x-3}{3x-3}=0$, која што се сведува на квадратната равенка $x^2-14x+48=0$, чии решенија се $x_1=6$ и $x_2=8$.

За овие вредности на x, изразите во почетната равенка се дефинирани, а освен тоа за нив равенката е задоволена. Значи, равенката има две реални решенија $x_1=6$ и $x_2=8$.

7. Да се реши равенката

$$2^{3x}-\frac{6}{2^{3x}}-6(2^x-\frac{1}{2^{x-1}})=1.$$

Решение. Воведуваме смена $t=2^x$. Со замена во дадената равенка се добива равенката $t^3-\frac{8}{t^3}-6(t-\frac{2}{t})=1$, која што е еквивалентна со равенката $(t-\frac{2}{t})^3=1$. Од последната равенка се добива $t-\frac{2}{t}=1$ од каде што $t=-1$ или $t=2$. Со оглед на направената смена, t е позитивен број, па, значи $t=2$, од каде што добиваме $x=1$.

Лесно се проверува дека $x=1$ е навистина решение на дадената равенка.

8. Определи ги сите решенија на равенката

$$3^x+3^y+3^z=21897,$$

такви што $x,y,z\in\mathbb{N}$ и $x<y<z$.

Решение. Равенката можеме да ја запишеме во облик

$$3^x(1+3^{y-x}+3^{z-x})=27\cdot 811.$$

Бидејќи $\text{NZD}(3^x,811)=1$ и $\text{NZD}(1+3^{y-x}+3^{z-x},27)=1$, од последната равенка добиваме

$$\begin{cases}3^x=27\\ 1+3^{y-x}+3^{z-x}=811.\end{cases}$$

Од првата равенка добиваме $x=3$, а втората равенка го добива обликот

$$3^{y-3}+3^{z-3}=810$$
$$3^{y-3}(1+3^{z-y})=3^4\cdot 10.$$

Заради $\text{NZD}(3^{y-3},10)=1$ и $\text{NZD}(1+3^{y-z},3^4)=1$, добиваме

$$\begin{cases}3^{y-3}=3^4\\ 1+3^{z-y}=10.\end{cases}$$

Од првата равенка $y-3=4$, т.е. $y=7$, а втората равенка го добива обликот $3^{z-7}=3^2$, т.е. $z=9$.

Конечно, решение на почетната равенка е $x=3, y=7, z=9$.

9. Да се реши равенката $5^x \sqrt[x]{8^{x-1}} = 500$.

Решение. Со степенување на степен x на дадената равенка добиваме

$$5^{x^2} \cdot 8^{x-1} = 2^{2x} \cdot 5^{3x}, \text{ т.е. } 5^{x^2-3x} = 2^{3-x}.$$

Понатаму, со логаритмирање имаме

$$(x^2-3x)\log_2 5 = 3-x,$$
$$(x-3)(x\log_2 5+1) = 0,$$

од каде што добиваме $x_1 = 3, x_2 = -\log_5 2$.

10. Во множеството реални броевиа реши ја равенката

$$\log_{x+3}(x^2+7x-9)^4 = 8.$$

Решение. Имаме

$$\log_{x+3}(x^2+7x-9)^4 = 8 \Leftrightarrow 4\log_{x+3}|x^2+7x-9| = 8 \Leftrightarrow |x^2+7x-9| = (x+3)^2.$$

Од

$$x^2+7x-9 = (x+3)^2$$

се добива едно решение на равенката $x = 18$. Од

$$-x^2-7x+9 = x^2+6x+9$$
$$2x^2+13x = 0$$

се добиваат две решенија: $x = 0$ и $x = -\frac{13}{2}$. Решенија на дадената равенка се само $x = 0$ и $x = 18$, бидејќи за $x = -\frac{13}{2}$, x+3<0.

11. Во множеството реални броевиа реши ја равенката

$$\log_2(x^2+2x-7)\log_{x^2-6x+9} 4 = 1.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$\log_2(x^2+2x-7) = \log_4(x^2-6x+9)$$
$$\log_2(x^2+2x-7) = \log_2\sqrt{(x-3)^2}$$
$$x^2+2x-7 = |x-3|.$$

Решението на последната равенка е $x = -5$ и тоа е решение и на дадената равенка.

12. Во множеството реални броевиа реши ја равенката

$$\log_2(9^{x-1}+7) = \log_2(3^{x-1}+1)+2.$$

Решение. Бидејќи $9^{x-1} > 0, 3^{x-1} > 0$ добиваме дека дефинициона та област е $D = \mathbb{R}$. Сега, од $2 = \log_2 4$ и $\log_2 a + \log_2 b = \log_2 ab$ следува дека дадената равенка е еквивалентна на равенките

$$\log_2(9^{x-1}+7) = \log_2(3^{x-1}+1)+\log_2 4$$
$$\log_2(9^{x-1}+7) = \log_2 4(3^{x-1}+1).$$

Според тоа,

$$9^{x-1}+7=4(3^{x-1}+1)\ ,$$
$$9^{x-1}+7=4(3^{x-1}+1)$$
$$3^{2(x-1)}-4\cdot 3^{x-1}+7-4=0\ ,$$
$$3^{2(x-1)}-4\cdot 3^{x-1}+3=0.$$

Воведуваме смена $3^{x-1}=t$ и равенката ја сведуваме на квадратната равенка $t^2-4t+3=0$, чии решенија се $t_1=1, t_2=3$. Според тоа,

$$3^{x-1}=1=3^0 \text{ или } 3^{x-1}=3=3^1,$$

па добиваме дека $x-1=0$ или $x-1=1$.

Конечно, решенијата на почетната равенка се $x=1$ и $x=2$.

13. Во множеството реални броевиа реши ја равенката

$$\log_2(4^x+4)=x+\frac{1}{\log_{2^{x+1}-3} 2}\ .$$

Решение. Користејќи ги својствата на логаритамската функција $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$, $a=\log_b b^a$ и $\log_a(c\cdot d)=\log_a c+\log_a d$, дадената равенка ќе ја запишеме во облик:

$$\log_2(2^{2x}+4)=\log_2 2^x+\log_2(2^{x+1}-3)$$
$$\log_2(2^{2x}+4)=\log_2[2^x(2^{x+1}-3)]\ .$$

Воведуваме смена $2^x=y$ и равенката го добива обликот

$$\log_2(y^2+4)=\log_2[y(2y-3)]\text{, т.е. } y^2+4=y(2y-3)\ .$$

Квадратната равенка $y^2-3y-4=0$ има решенија $y_1=-1$ и $y_2=4$. Равенката $2^x=-1$ нема решенија, а равенката $2^x=4$ има решение $x=2$.

Со замена на $x=2$ во почетната равенка добиваме дека $x=2$ е решение на почетната равенка.

14. Во множеството реални броевиа реши ја равенката

$$\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)=4\ .$$

Решение. Бидејќи

$$9+12x+4x^2=(3+2x)^2 \text{ и } 6x^2+23x+21=(2x+3)(3x+7)\ ,$$

од дадената равенка следува равенката

$$2\log_{(3x+7)}(2x+3)+1+\log_{(2x+3)}(3x+7)=4\ ,$$

т.е. равенката

$$2[\log_{(3x+7)}(2x+3)]^2-3\log_{(3x+7)}(2x+3)+1=0\ ,$$

од каде што добиваме

$$\log_{(3x+7)}(2x+3)=1 \text{ или } \log_{(3x+7)}(2x+3)=\tfrac{1}{2}\ .$$

Решавајќи ги овие равенки добиваме

$$x_1=-4\ ,\ x_2=-2 \text{ и } x_3=-\tfrac{1}{4}\ .$$

Лесно се проверува дека решение на почетната равенка е само $x_3 = -\frac{1}{4}$.

15. Во множеството реални броевиа реши ја равенката

$$\log_3(4\cdot 3^x - 1) = 2x+1.$$

Решение. Дадената равенка има смисол за $4\cdot 3^x - 1 > 0$ од што следува $3^x > \frac{1}{4}$ т.е. $x > \log_3 \frac{1}{4}$. Понатаму од $\log_3(4\cdot 3^x - 1) = 2x+1$ последователно добиваме

$$4\cdot 3^x - 1 = 3^{2x+1},$$

$$4\cdot 3^x - 1 = 3\cdot (3^x)^2.$$

Воведуваме смена $y = 3^x$ и од последната равенка ја добиваме равенката $3y^2 - 4y + 1 = 0$ чии решенија се $y_1 = \frac{1}{3}$ и $y_2 = 1$. Според тоа, $3^x = \frac{1}{3}$, па е $x_1 = -1$ или $3^x = 1$, па е $x_2 = 0$. Со непосредна проверка наоѓаме дека $x_1 > \log_3 \frac{1}{4}$ и $x_2 > \log_3 \frac{1}{4}$, што значи дека најдените решенија се решенија и на почетната равенка.

16. Во множеството реални броевиа реши ја равенката

$$\log_6(3\cdot 4^{-\frac{1}{x}} + 2\cdot 9^{-\frac{1}{x}}) + \frac{1}{x} = \log_6 5.$$

Решение. Јасно е дека за $x = 0$ равенката не е дефинирана. За $x \neq 0$ воведуваме смена $-\frac{1}{x} = y$, при што равенката последователно го добива обликот

$$\log_6(3\cdot 4^y + 2\cdot 9^y) = y + \log_6 5,$$

$$\log_6(3\cdot 4^y + 2\cdot 9^y) = \log_6 6^y + \log_6 5,$$

$$\log_6(3\cdot 4^y + 2\cdot 9^y) = \log_6 5\cdot 6^y.$$

Ако антилогартимираме, добиваме

$$3\cdot 4^y + 2\cdot 9^y = 5\cdot 6^y,$$

$$3\cdot (\tfrac{2}{3})^{2y} + 2 - 5\cdot (\tfrac{2}{3})^y = 0.$$

Воведуваме смена $(\frac{2}{3})^y = t$, при што добиваме $3t^2 - 5t + 2 = 0$. Решенијата на последната квадратна равенка се $t_1 = 1$ и $t_2 = \frac{2}{3}$.

За $t_1 = 1$, ја добиваме равенката $(\frac{2}{3})^y = 1$, од каде имаме $y = 0$. Равенката $-\frac{1}{x} = 0$ нема решенија.

За $t_2 = \frac{2}{3}$, ја добиваме равенката $(\frac{2}{3})^y = \frac{2}{3}$ која има единствено решение $y = 1$. Решение на равенката $-\frac{1}{x} = 1$ е $x = -1$.

Значи, единствено решение напочетната равенка е $x = -1$.

17. Во множеството реални броевиа реши ја равенката

$$x^{\frac{1+\log x}{4}} = 10^{\log x+1}.$$

Решение. Јасно $x > 0$. Ако ја логаритмираме дадената равенка последователно добиваме

$$\frac{\log x+1}{4}\log x = \log x + 1,$$

$$(1+\log x)(1-\tfrac{1}{4}\log x) = 0$$

од што следува $\log x + 1 = 0$ или $1 - \frac{1}{4}\log x = 0$ т.е. $x_1 = 10^{-1}$ или $x_2 = 10^4$.

18. Во множеството реални броевиа реши ја равенката

$$x^2 + 3 + \log_2(x^2 - 4x + 6) = 4x.$$

Решение. Ја запишуваме равенката во видот

$$\log((x-2)^2 + 2) = 1 - (x-2)^2.$$

Бидејќи

$$\log((x-2)^2 + 2) \geq \log_2 2 = 1$$

следува

$$\log((x-2)^2 + 2) \geq 1 \geq 1 - (x-2)^2.$$

Равенство е исполнето за $x - 2 = 0$, т.е. $x = 2$ кое е и единствено решение на дадената равенката.

19. Определи ги реалните решенија на равенката:

$$\log_2(1+\sqrt{x}) = \log_3 x.$$

Решение. Воведуваме смена $\log_3 x = y$, од каде што се добива $\sqrt{x} = \sqrt{3^y}$. Заменувајќи во почетната равенка, добиваме

$$\log_2(1+\sqrt{3^y}) = y,$$

$$1+\sqrt{3^y} = 2^y,$$

$$(\tfrac{1}{2})^y + (\tfrac{\sqrt{3}}{2})^y = 1.$$

Едно очигледно решение на последната равенка е $y = 2$. Ако $y > 2$, тогаш

$$(\tfrac{1}{2})^y < (\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4} \text{ и } (\tfrac{\sqrt{3}}{2})^y < (\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2 = \tfrac{3}{4},$$

од каде

$$(\tfrac{1}{2})^y + (\tfrac{\sqrt{3}}{2})^y < \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4} = 1.$$

Ако пак $y < 2$, тогаш $(\frac{1}{2})^y > (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ и $(\frac{\sqrt{3}}{2})^y > (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{4}$, од каде

$$(\tfrac{1}{2})^y + (\tfrac{\sqrt{3}}{2})^y > \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4} = 1.$$

Значи, $y = 2$ е единственото решение на равенката $(\frac{1}{2})^y + (\frac{\sqrt{3}}{2})^y = 1$, од каде што се добива, (враќајќи се во извршената смена), дека $x = 9$ е единственото решение на почетната равенка.

20. Во множеството реални броевиа реши ја равенката

$$\log_{3x+4}(2x+1)^2+\log_{2x+1}(6x^2+11x+4)=4.$$

Решение. За основите на логаритмите да бидат позитивни треба $3x+4>0$ и $2x+1>0$, од каде што се добива дека $x>-\frac{1}{2}$. За ваквите вредности на x, $2x+1$ и $6x^2+11x+4=(2x+1)(3x+4)$ се, исто така, позитивни. Значи, равенката има смисла само за $x>-\frac{1}{2}$. По ред имаме:

$$\log_{3x+4}(2x+1)^2+\log_{2x+1}(6x^2+11x+4)=4$$
$$2\log_{3x+4}(2x+1)+\log_{2x+1}(2x+1)(3x+4)=4$$
$$\log_{3x+4}(2x+1)+\log_{2x+1}(3x+4)=3$$
$$\log_{3x+4}(2x+1)+\frac{1}{\log_{3x+4}(2x+1)}=3.$$

Воведуваме смена $\log_{3x+4}(2x+1)=t$ и ја добиваме равенката $2t+\frac{1}{t}=3$, чии што решенија се 1 и $\frac{1}{2}$. Заменувајќи ги овие вредности за t во направената смена, се добиваат решенија за x и тоа $x_1=-3$, $x_2=-1$ и $x_3=\frac{3}{4}$. Од нив само за третата вредност на x равенката е осмиследна. Значи, единственото решение на дадената равенка е $x_3=\frac{3}{4}$.

21. Во множеството реални броевиа реши ја равенката

$$3^{\log_x 3}\cdot x^{\log_3 x}=9.$$

Решение. Равенката ја логаритмираме со логаритам со основа 3, од каде се добива равенката

$$\log_x 3+(\log_3 x)^2=2.$$

Ставајќи $\log_3 x=u$ и користејќи го равенството $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ се добива равенката $\frac{1}{u}+u^2=2$, т.е. $u^3-2u+1=0$, односно $(u-1)(u^2+u-1)=0$. Според тоа, $u_1=1$ и од $u^2+u-1=0$ добиваме $u_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ и $u_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Според тоа, решенија на дадената равенка се $x_1=3$, $x_2=3^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ и $x_3=3^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$.

22. Во множеството реални броевиа реши ја равенката

$$(x^{\log_2 x}-1)^2=1.$$

Решение. По ред имаме:

$$x^{2\log_2 x}-2x^{\log_2 x}+1=1$$
$$x^{2\log_2 x}=2x^{\log_2 x}$$
$$2(\log_2 x)^2=\log_2 2+(\log_2 x)^2$$
$$(\log_2 x)^2=1$$
$$\log_2 x=\pm 1$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 2.$$

23. Во множеството реални броевиа реши ја равенката

$$\log_2[1+\log_2(1+\log_2 x)] = \sqrt{\tfrac{1}{2}x - x^2}.$$

Решение. Мора да биде $1+\log_2 x > 0$, т.е. $x > \frac{1}{2}$. Исто така, мора да биде $\frac{1}{2}x - x^2 \geq 0$ од каде што следува $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Според тоа, множеството решенија на равенката е празно множество, па затоа дадената равенка нема еални решенија

24. Во множеството реални броевиа реши ја равенката

$$4^{\log_{10} x} - 32 + x^{\log_{10} 4} = 0.$$

Решение. Јасно е дека равенката е определена за $x > 0$. За $x > 0$, $\log_{10} x$ можеме да го запишеме во облик

$$\log_{10} x = \frac{\log_4 x}{\log_4 10} = \log_4 x \cdot \log_{10} 4,$$

од каде добиваме

$$4^{\log_{10} x} = 4^{(\log_4 x)(\log_{10} 4)} = (4^{\log_4 x})^{\log_{10} 4} = x^{\log_{10} 4}.$$

Сега, равенката можеме да ја запишеме во обликот

$$4^{\log_{10} x} - 32 + 4^{\log_{10} x} = 0,$$

$$2 \cdot 4^{\log_{10} x} - 32 = 0,$$

$$4^{\log_{10} x} = 4^2,$$

$$\log_{10} x = 2.$$

Значи, решение на равенката е $x = 100$.

25. Во множеството реални броевиа реши ја равенката

$$\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0.$$

Решение. Дефиниционата област D на равенката е определена со $x > 0$, $x \neq 1$.

Дадената равенка е еквивалентна со

$$\log_x 2 - \frac{1}{\log_x 2^2} + \frac{7}{6} = 0,$$

односно со

$$\log_x 2 - \frac{1}{2\log_x 2} + \frac{7}{6} = 0.$$

Воведуваме смена $\log_x 2 = t$, со што последната равенка се трансформира во $6t^2 + 7t - 3 = 0$, со решенија $t_1 = \frac{1}{3}$ и $t_2 = -\frac{3}{2}$.

Конечно, враќајќи се во смената, добиваме $x = 8$ и $x = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$, вредности кои припаѓаат на дефиниционата област на појдовната равенка, па се и нејзини решенија.

26. Во множеството реални броевиа реши ја равенката

$$\log_2(-x^2 + 7x - 10) + 3\sqrt{\cos(\pi\sqrt{x^2+7}) - 1} = 1.$$

Решение. Мора да биде $-x^2+7x-10>0$, од каде што се добива $2<x<5$. Исто така, мора да биде $\cos(\pi\sqrt{x^2+7})-1\geq 0$ од каде се добива $\cos(\pi\sqrt{x^2+7})=1$, т.е. $\pi\sqrt{x^2+7}=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ или $\sqrt{x^2+7}=2k$, $k\in\mathbb{Z}$. Од $\sqrt{x^2+7}\geq 0$ добиваме $\sqrt{x^2+7}=2k$ каде што $k=0,1,2,...$. Затоа, $2<x=\sqrt{4k^2-7}<5$ каде што $k=0,1,2,...$. За $k=0$ и $k=1$, x не постои во множеството на реалните броеви. За $k=2$ се добива $x=3$, а за $k\geq 3$ се добива $x\geq\sqrt{29}>5$ што не е можно. Значи, равенката има смисла само за $x=3$, а тоа е и нејзино решение.

27. Нека $a>0, a\neq 1; b>0, b\neq 1$. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\log_a x\cdot\log_b x=\log_a x+\log_b x..$$

Решение. Последователно добиваме

$$\frac{\log x}{\log a}\cdot\frac{\log x}{\log b}=\frac{\log x}{\log a}+\frac{\log x}{\log b}$$

$$\log^2 x=\log x\cdot(\log a+\log b)$$

$$\log^2 x=\log x\cdot\log(ab)\Leftrightarrow\log x\cdot[\log x-\log(ab)]\Leftrightarrow$$

$$\log^2 x=\log x\cdot\log(ab)$$

$$\log x\cdot[\log x-\log(ab)]$$

$$x=1\quad\vee\quad x=ab.$$

28. Нека a и b се рационални броеви такви што $a>1$, $b>0$ и $ab=a^b$ и $\frac{a}{b}=a^{3b}$. Определи ги вредностите за a?

Решение. *Прв начин.* Со логартимирање на дадените равенства со основа a добиваме

$$\begin{array}{lcl} \log_a ab=\log_a a^b & & \log_a \frac{a}{b}=\log_a a^{3b} \\ 1+\log_a b=b & \text{и} & 1-\log_a b=3b \\ \log_a b=b-1 & & \log_a b=1-3b \end{array}$$

Сега од последните две равенки имаме

$$b-1=1-3b$$

$$4b=2$$

$$b=\frac{1}{2}$$

Со замена во равенката $ab=a^b$ добиваме

$$a\cdot\frac{1}{2}=a^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{4}a^2=a$$

$$a^2=4a$$

Бидејќи $a>1$ добиваме дека $a=4$.

Втор начин. Од $\frac{a}{b}=a^{3b}$ следува дека $b=a^{1-3b}$. Ако замениме во $ab=a^b$ ќе добиеме $a^{2-3b}=a^b$. Од условот $a>1$ добиваме $2-3b=b$, $b=\frac{1}{2}$. Сега ако замениме во $ab=a^b$ имаме $\frac{a}{2}=\sqrt{a}$, од каде добиваме дека решение е $a=4$.

Според тоа, $a=4$ е единствениот број за кој се исполнети равенствата.

29. а) Нека $a, \in \mathbb{R}$. Во множеството реални броеви реши ја равеката

$$x^{\frac{a\lg x+1}{4}}=10^{b(\lg x+1)}.$$

б) За $a=b=1$ најди ги решенијата на равенката.

Решение. Со логаритмирање на дадената равенка со основа 10 се добива:

$$\frac{a\lg x+1}{4}\lg x=b(\log x+1)\lg 10$$

од каде после средувањето добиваме

$$a\lg^2 x+(1-4b)\lg x-4b=0.$$

Последната равенка при $a\neq 0$ е квадратна со непозната $\lg x$ и решенијата на истата се

$$\lg x=\frac{4b-1\pm\sqrt{(4b-1)^2+16ab}}{2a},$$

а ако $a=0$ е линеарна со непозната $\lg x$ и нејзиното решение е $\lg x=\frac{4b}{1-4b}$. Во првиот случај решенијата на равенката се

$$x_{1/2}=10^{\frac{4b-1\pm\sqrt{(4b-1)^2+16ab}}{2a}}$$

а во вториот случај $x=10^{\frac{4b}{1-4b}}$.

За да равенката има реални корени при $a\neq 0$ треба дискриминантата на квадратната равенка по $\lg x$ да е ненегативна од каде што се добива условот $(4b-1)^2+16ab\geq 0$, т.е. $16b(a+b)-8b+1\geq 0$.

Во случајот кога $a=0$ равенката има решение ако $1-4b\neq 0$, т.е. $b\neq\frac{1}{4}$.

б) Ако $a=b=1$, тогаш $x=10^{\frac{3\pm 5}{2}}$ т.е. $x=10^{-1}$ и $x=10^4$.

30. Најдете ги сите вредности на параметарот k, за кои што равенката

$$\lg(x^2+2kx)-\lg(8x-6k-3)=0$$

има двоен корен, а потоа одреди го тој корен.

Решение. Дадената равенка ја трансформираме во квадратна равенка

$$x^2+(2k-8)x+6k+3=0$$

која што има двоен корен ако дискриминантата е еднаква на нула, т.е. ако

$$(2k-8)^2-4(6k+3)=0,$$

односно $k^2-14k+13=0$. Оттука $k_1=1$, $k_2=13$.

За $k=1$, почетната равенка го добива обликот

$$\lg(x^2+2x)-\lg(8x-9)=0 \text{ или } x^2-6x+9=0,$$

од каде што следува $x = 3$.

За $k = 13$, на сличен начин наоѓаме дека $x_1 = x_2 = -9$, но за оваа вредност на x логаритмот не е дефиниран.

Значи, единствена вредност за k е 1, и во тој случај $x = 3$.

31. Нека $a > 1$. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\log_{ax} a + 3\log_{a^2 x} a = 0 .$$

Решение. Имаме

$$\log_{ax} a + 3\log_{a^2 x} a = 0$$

$$\frac{1}{\log_a ax} + \frac{3}{\log_a a^2 x} = 0$$

$$\frac{\log_a a^2 x + 3\log_a ax}{\log_a ax \cdot \log_a a^2 x} = 0 \qquad ;$$

$$\frac{\log_a a^5 x^4}{\log_a ax \cdot \log_a a^2 x} = 0,$$

и притоа треба да е $x \neq \frac{1}{a}$ и $x \neq \frac{1}{a^2}$. Според тоа, $\log_a a^5 x^4 = 0$, т.е. $x = \frac{1}{a\sqrt[4]{a}}$.

32. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\log_x a + \log_{\sqrt{x}} a + ... + \log_{\sqrt[8]{x}} a = \log_a x ,\ a > 0 .$$

Решение. Имаме

$$\log_x a + \log_{\sqrt{x}} a + ... + \log_{\sqrt[8]{x}} a = \log_a x ,\ a > 0$$

$$\log_x a + 2\log_x a + ... + 8\log_x a = \log_a x ,\ x > 0$$

$$36\log_x a = \log_a x$$

$$36\log_a^2 x = 1$$

$$\log_a x = \pm\frac{1}{6}$$

Решенија на равенката се: $x = \sqrt[6]{a}$ и $x = \frac{1}{\sqrt[6]{a}}$.

33. Определи ги сите цели броеви x, за кои $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ е исто така цел број.

Решение. Цели броеви x за кои $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ е определен се

$$x \in (-\infty, 2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}, +\infty) \cap \mathbb{Z} .$$

Нека n е цел број за кој постои $x \in \mathbb{Z}$ така што

$$\log_2(x^2 - 4x - 1) = n .$$

Тогаш

$$x^2 - 4x - (1 + 2^n) = 0 \tag{1}$$

од каде добиваме $x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{5 + 2^n}$, односно

$$x = 2 + \sqrt{5 + 2^n} \quad \text{или} \quad x = 2 - \sqrt{5 + 2^n} .$$

Бидејќи $x \in \mathbb{Z}$, постои $k \in \mathbb{Z}$ така што $5+2^n = k^2$. Значи, доволно е да ги определиме сите n за кои $5+2^n$ е полн квадрат. Ќе разгледаме неколку случаи.

а) Ако $n<0$, тогаш $2^n = k^2-5$, односно $1=2^{-n}(k^2-5)$. Бројот $2^{-n}(k^2-5)$ е парен, па според тоа последното равенство не е можно.

б) Ако $n=0$, тогаш $k^2=6$, т.е. $5+2^n$ не е полн квадрат. Значи и овој случај не е можен.

в) Ако $n>0$, тогаш $5+2^n$ е непарен, па затоа $k=2m-1$ за некој $m \in \mathbb{Z}$. Со алгебарски трансформации добиваме

$$m(m-1) = 2^{n-2}+1. \qquad (2)$$

Ако $n=1$, тогаш $2^{n-2}+1$ е рационален број и равенството (2) не е можно за ниту еден $m \in \mathbb{Z}$.

Ако $n>2$, тогаш $2^{n-2}+1$ е непарен број а $m(m-1)$ е парен, па равенство меѓу нив не е можно.

Ако $n=2$, тогаш $5+2^2=9=3^2$. Со замена во (2) ја добиваме квадратната равенка

$$x^2-4x+5=0$$

чии решенија се $x=-1$ и $x=5$. Не е тешко да се провери дека за најдените вредности за x, $\log_2(x^2-4x-1)$ е цел број и во двата случаи е еднаков на 2.

34. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\tfrac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\tfrac{a}{x}}} = a,$$

каде a е позитивен реален број различен од 1.

Решение. Да забележиме дека $x \neq 1$ и $x>0$ (за да постои $\log_x \sqrt[4]{ax}$). Со преоѓање на логаритми со основа a дадената равенка се трансформира во равенката

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax}\left(1+\tfrac{1}{\log_a x}\right)} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\tfrac{x}{a}}\left(1-\tfrac{1}{\log_a x}\right)} = a,$$

и со понатамошни трансформации го добива обликот:

$$\sqrt{\frac{(\log_a x+1)^2}{4\log_a x}} + \sqrt{\frac{(\log_a x-1)^2}{4\log_a x}} = a.$$

Оттука $\log_a x > 0$. Последната равенка е еквивалентна со

$$|\log_a x+1| + |\log_a x-1| = 2a\sqrt{\log_a x} \qquad (1)$$

За да ја решиме равенката (1) ќе разгледаме два случаи:

а) Нека $\log_a x > 1$, тогаш равенката преминува во равенката $\log_a x = a\sqrt{\log_a x}$. Одовде добиваме решение, $x_1 = a^{a^2}$. Натаму, заради $\log_a x > 1$ добиваме дека $a>1$.

б) Нека $0<\log_a x \leq 1$. Тогаш (1) преминува во равенката $2=2a\sqrt{\log_a x}$, чие решение $x_2 = a^{\frac{1}{a^2}}$. Овде да забележиме дека условот $0<\log_a x \leq 1$ ќе биде исполнет само ако $a \geq 1$. Но за $a = 1$ добиваме $x_2 = 1$, па тоа не е решение на дадената равенка, затоа за решението на равенката x_2 важи истото како и за x_1, т.е. е решение на почетната равенка само ако $a > 1$.

Според тоа, при $a > 1$ почетната равенка има две решенија $x_1 = a^{a^2}, x_2 = a^{\frac{1}{a^2}}$, додека за $0 < a < 1$ равенката нема решение.

35. Да се реши неравенката $3^{2x} > 2 \cdot 3^x + 3$.

Решение. Со замена $3^x = t$ се добива $t^2 - 2t - 3 > 0$. Дискриминантата на равенката $t^2 - 2t - 3 = 0$ е $D = 16 > 0$, а нејзините корени се $t_1 = 3$ и $t_2 = -1$. Според тоа, решението на неравенка $t^2 - 2t - 3 > 0$ е $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ и како $t = 3^x > 0$ добиваме дека $3^x \in (3, \infty)$, од што следува дека $x \in (1, \infty)$.

36. Да се реши неравенката $5^{2x} < 4 \cdot 5^x + 5$.

Решение. Воведуваме смена $y = 5^x$ и ја добиваме неравенката $y^2 - 4y - 5 < 0$. Решенија на квадратната равенка $y^2 - 4y - 5 = 0$ се $y_1 = -1$ и $y_2 = 5$ па затоа решение на последната неравенка е $y \in (-1, 5)$. Но, $y = 5^x > 0$ па затоа $5^x \in (0, 5)$ од што следува дека $x \in (-\infty, 1)$.

37. Реши ја неравенката $(\sqrt{2} + 1)^{\frac{|x|-1}{x+1}} \leq (\sqrt{2} - 1)^{-\frac{x}{6}}$.

Решение. Бидејќи важи $(\sqrt{2} - 1)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} + 1$, неравенката го добива обликот $(\sqrt{2} + 1)^{\frac{|x|-1}{x+1}} \leq (\sqrt{2} + 1)^{\frac{x}{6}}$. Оттука, бидејќи $\sqrt{2} + 1 > 1$ следува дека $\frac{|x|-1}{x+1} \leq \frac{x}{6}$, т.е. $\frac{6|x|-6-x^2-x}{6(x+1)} \leq 0$.

Ако $x \geq 0$, тогаш $\frac{5x-6-x^2}{6(x+1)} \leq 0$, односно $\frac{(x-2)(x-3)}{x+1} \geq 0$, па затоа $x \in [0, 2] \cup [3, \infty)$.

Ако $x < 0$, тогаш $\frac{-7x-6-x^2}{6(x+1)} \leq 0$, односно $\frac{(x+1)(x+6)}{x+1} \geq 0$, од каде добиваме дека $x \in [-6, -1] \cup (-1, 0)$.

Конечно $x \in [-6, -1] \cup (-1, 0) \cup [3, \infty)$.

38. Реши ја неравенката $|x+1|^{x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}} < 1$.

Решение. Прво да ја определиме дефиниционата област. Од својствата на експоненцијалната функција, следува $|x+1| > 0, |x+1| \neq 1$, од каде $x \neq -1$ и дефиниционата област е $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Имајќи предвид дека зависно од основата, експоненцијалната функција може да биде растечка или опаѓачка, ќе разгледаме два случаи:

Случај 1. Нека $0<|x+1|<1$. Тогаш бидејќи $x\neq -1$ добиваме

$$x\in(-2,-1)\cup(-1,0).$$

Тогаш од $|x+1|^{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}}<1=|x+1|^0$, добиваме $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}>0$. Решението на последната неравенка е По разложувањето на квадратниот трином имаме неравенка $x\in(-\infty,1)\cup(\frac{3}{2},+\infty)$ и како $x\in(-2,-1)\cup(-1,0)$, добиваме дека решението на дадената неравенка е $x\in(-2,-1)\cup(-1,0)$.

Случај 2. Нека $|x+1|>1$, односно $x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$. Тогаш од неравенката $|x+1|^{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}}<1=|x+1|^0$, следува дека $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}<0$, т.е. $x\in(1,\frac{3}{2})$.

Конечно, решение на почетната неравенка е $M=(-2,-1)\cup(-1,0)\cup(1,\frac{3}{2})$.

39. Реши ја неравенката $\log_3(x+2)\geq\log_{x+2}3$.

Решение. Нека $a=\log_3(x+2)$ и $b=\log_{(x+2)}3$. Тогаш $x+2=3^a$ и $3=(x+2)^b$, т.е. $x+2=(x+2)^{ab}$. Според тоа $ab=1$, т.е. $b=\frac{1}{a}$. Од $a\geq b$ следува дека $a\geq\frac{1}{a}$. За $a>0$, од $a^2\geq1$ следува дека $a\geq1$. Тогаш $x+2=3^a\geq3$, т.е. $x\geq1$. За $a<0$, од $a^2\leq1$ следува дека $-1\leq a<0$. Тогаш од $x+2=3^a$ се добива дека $3^{-1}\leq x+2<1$, т.е. $-\frac{5}{3}\leq x<-1$.

Значи решенија на неравенката се $x\geq1$ или $-\frac{5}{3}\leq x<-1$.

40. Реши ја неравенката $\log_3 x\geq\log_x 81$.

Решение. Областа на дефинираност на $\log_3 x$ и $\log_x 81$ е $(0,1)\cup(1,+\infty)$, па множеството решенија на дадената неравенка мора да е подмножество од таа област. Дадената неравенка се трансформира во:

$$\log_3 x\geq\frac{4}{\log_3 x}.$$

Можни се два случаи.

а) $\log_3 x>0$, т.е. $x>1$. Тогаш неравенката се трансформира во $\log_3 x\geq2$, а од тука се добива дека $x\geq3^2=9$. Множеството решенија во овој случај е $[9,+\infty)$.

б) $\log_3 x<0$, т.е. $0<x<1$. Тогаш неравенката се трансформира во $\log_3 x\geq-2$, а од тука се добива дека $x\geq\frac{1}{9}$. Множеството решенија во овој случај е $[\frac{1}{9},1)$.

Според тоа, множеството решенија на дадената неравенка е $[\frac{1}{9},1)\cup[9,+\infty)$.

41. Да се реши неравенката $\log_{\frac{1}{3}}(\log_4(x^2-5))>0$.

Решение. Бидејќи $\log_{\frac{1}{3}}x=\log_3 x^{-1}=-\log_3 x$ добиваме $-\log_3(\log_4(x^2-5))>0$, од каде следува $0<\log_4(x^2-5)<1$. Според тоа, $1<x^2-5<4$, т.е. $6<x^2<9$.

Решението на неравенката е $(-3,-\sqrt{6})\cup(\sqrt{6},3)$.

42. Реши ја неравенката

$$\log_{x^2}(3-2x)>1.$$

Решение. Прво да забележиме дека мора $x\neq 0$ и $3-2x>0$. Неравенката е еквивалентна со $\log_{x^2}(3-2x)>\log_{x^2}x^2$. Ќе разгледаме два случаи:

1) $0<x^2<1$ т.е. $x\in(-1,1)\setminus\{0\}$. Неравенката се сведува на системот

$$\begin{cases}3-2x>0\\ x^2>3-2x\end{cases}$$

кој на горниот интервал нема решение.

2) $x^2>1$ т.е. $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ Неравенката се сведува на системот

$$\begin{cases}3-2x>0\\ x^2<3-2x\end{cases}$$

кој земајќи го предвид горниот интервал има решение интервалот $(-3,-1)$.

Конечно, решението на почетната неравенка е интервалот $(-3,-1)$.

43. Реши ја неравенката

$$\lg(5^x+x-20)>x-x\lg 2 .$$

Решение. Имаме

$$x-x\lg 2=x(\lg 10-\lg 2)=x\lg 5=\lg 5^x$$

па затоа неравенката го добива видот

$\lg(5^x+x-20)>\lg 5^x$.

Оттука

$$5^x+x-20>0$$

$$5^x+x-20>5^x$$

па затоа $x>20$.

44. Да се реши неравенката $\log_2(x^2-7x+10)\leq\log_2(3x-11)$.

Решение. Ако ги искористиме својствата на логаритмите добиваме дека дадената неравенка е еквивалентна со системот неравенки

$$\begin{cases}x^2-7x+10>0\\ 3x-11>0\\ x^2-7x+10\leq 3x-11\end{cases}$$

Решението на првата неравенка е $x\in(-\infty,2)\cup(5,+\infty)$, на втората $x\in(\frac{11}{3},+\infty)$ и на третата $x\in[3,7]$. Конечно, наоѓаме $x\in(5,7]$.

3. СИСТЕМИ ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ И ЛОГАРИТАМСКИ РАВЕНКИ

1. Во множеството реални броеви реши го системот

$$\begin{cases} x^{\log y} + \sqrt{y^{\log x}} = 110 \\ xy = 1000. \end{cases}$$

Решение. Да забележиме дека мора $x, y > 0$. Ако воведеме ознаки $x^{\log y} = a$ и $y^{\log x} = b$, тогаш $\log a = \log x \log y = \log b$, па затоа $a = b$. Значи, може да воведеме смена $x^{\log y} = y^{\log x} = t$.

Првата равенка од системот го добива облик $t + \sqrt{t} = 110$, а со смена $\sqrt{t} = z$, каде $t, z \geq 0$ добиваме квадратна равенка $z^2 + z - 110 = 0$ со решенија $z_1 = -11$ и $z_2 = 10$. Заради позитивноста останува само $z = 10$, односно $t = 100$. Почетниот систем сега може да се запише во облик

$$\begin{cases} x^{\log y} = 100 \\ xy = 1000 \end{cases}$$

Ги логаритмираме двете равенки и добиваме

$$\begin{cases} \log x \cdot \log y = 2 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$$

Може да забележиме дека $\log x$ и $\log y$, согласно Виетовите правила, се корени на квадратна равенка $p^2 - 3p + 2 = 0$ чии решенија се $p_1 = 1, p_2 = 2$. На крај од

$$\begin{cases} \log x = 1 \\ \log y = 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \log x = 2 \\ \log y = 1 \end{cases}$$

ги добиваме решенијата на системот $(x, y) \in \{(10,100), (100,10)\}$.

2. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} (\sqrt{3})^{x-y} = (\frac{1}{3})^{2y-x} \\ \log_2(x+y) + \log_2(x-y) = 4 \end{cases}$$

Решение. Имаме:

$$\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}} = 3^{x-2y} \\ \log_2(x^2 - y^2) = \log_2 16 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \frac{x-y}{2} = 2y - x \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 3x = 5y \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases},$$

од каде што добиваме $x=\pm 5$, $y=\pm 3$.

3. а) Дали има решение системот равенки

$$\begin{cases} 2^{x+y}-2^{x-y}=0 \\ 2^{x}+2^{-y}=0 \end{cases}$$

б) Реши го системот равенки

$$\begin{cases} 2^{x+y}-2^{x-y}=a \\ 2^{x}+2^{-y}=b2^{y} \end{cases}$$

каде $a,b\in\mathbb{R}$

Решение. а) Од $2^{x}+2^{-y}>0$, за секои $x,y\in\mathbb{R}$ следува дека дадениот систем нема решение.

б) Бидејќи $2^{x}+2^{-y}>0$ и $2^{y}>0$ од втората равенка на системот следува дека $b>0$. Понатаму, ако втората равенка ја помножиме со 2^{-y} и ја собереме со правата добиваме $2^{x+y}+2^{-2y}=a+b$, па затоа $a+b>0$.

Воведуваме смена $2^{x}=u, 2^{y}=v$ и дадениот систем го трансформираме во системот

$$\begin{cases} uv-\frac{u}{v}=a \\ u+\frac{1}{v}=bv \end{cases}$$

односно

$$\begin{cases} u=\frac{av}{v^2-1} \\ u=\frac{bv^2-1}{v} \end{cases}.$$

Според тоа, $\frac{av}{v^2-1}=\frac{bv^2-1}{v}$ од што ја добиваме биквадратната равенка

$$bv^4-(a+b+1)v^2+1=0. \qquad (1)$$

Равенката (1) има реални решенија ако $D=(a+b+1)^2-4b>0$ и како $b>0$ и $a+b+1>0$ добиваме $a+b+1>2\sqrt{b}$ и притоа

$$v^2=\frac{a+b+1-\sqrt{(a+b+1)^2-4b}}{2b} \text{ или } v^2=\frac{a+b+1+\sqrt{(a+b+1)^2-4b}}{2b}. \qquad (2)$$

Понатаму, $2^{y}=v>0$ па од (2) следува дека

$$v_1=\sqrt{\frac{a+b+1-\sqrt{(a+b+1)^2-4b}}{2b}} \text{ или } v_2=\sqrt{\frac{a+b+1+\sqrt{(a+b+1)^2-4b}}{2b}}. \qquad (3)$$

Ако од (3) замениме во $u=\frac{bv^2-1}{v}$ добиваме дека

$$u_1 = \frac{\frac{a+b-1-\sqrt{(a+b+1)^2-4b}}{2}}{\sqrt{\frac{a+b+1-\sqrt{(a+b+1)^2-4b}}{2b}}} \text{ или } u_2 = \frac{\frac{a+b-1+\sqrt{(a+b+1)^2-4b}}{2}}{\sqrt{\frac{a+b+1+\sqrt{(a+b+1)^2-4b}}{2b}}}. \qquad (4)$$

Но, $2^x = u > 0$, па затоа од претходната дискусија и од (4) следува дека при $b > 0$, $a+b+1 > 2\sqrt{b}$, $a+b > 1, a > 0$ почетниот систем има решенија

$$(x_i, y_i) = (\ln_2 u_i, \ln_2 v_i), \ i = 1, 2,$$

а при $b > 0$, $a+b+1 > 2\sqrt{b}$, $a+b < 1, a > 0$, $a+b > 0$ почетниот систем има решение $(x, y) = (\ln_2 u_2, \ln_2 v_2)$.

4. а) Да се реши равенката $2^{x+2} - 2^{2-x} = 6$.

б) Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} 2^{x+2} - 2^{y+2} = 8 \\ 4^x + 4^y = \frac{41}{8}. \end{cases}$$

Решение. а) Дадената равенка е еквивалентна на равенката $4 \cdot 2^x - \frac{4}{2^x} = 6$, т.е. на равенката $4 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^x - 4 = 0$. Во последната равенка ведуваме смена $y = 2^x$ и ја добиваме равенката $4y^2 - 6y - 4 = 0$ чии решенија се $y_1 = -\frac{1}{2}$ и $y_2 = 2$. Но, $y = 2^x > 0$ па затоа $2^x = 2$, т.е. $x = 1$ е единствено решение на почетната равенка.

б) Дадениот систем е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} 4 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^y = 8 \\ 2^{2x} + 2^{2y} = \dfrac{41}{8}. \end{cases}$$

Воведуваме смена на непознатите $u = 2^x$ и $v = 2^y$ и го добиваме системот

$$\begin{cases} u - v = 2 \\ u^2 + v^2 = \frac{41}{8}. \end{cases}$$

Од првата равенка наоѓаме $u = v + 2$ и ако замениме во втората после средувањето ја добиваме равенката $16v^2 + 32v - 9 = 0$ чии решенија се $v_1 = \frac{1}{4}$ и $v_2 = -\frac{9}{4}$. Меѓутоа, $v = 2^y > 0$ па затоа $v_1 = \frac{1}{4}$ и притоа добиваме $u_1 = \frac{9}{4}$. Конечно, ако се вратиме на старите непознати наоѓаме $2^x = \frac{9}{4}$ и $2^y = \frac{1}{4}$ што значи дека решение на дадениот систем е $x = \log_2 \frac{9}{4}$ и $y = -2$.

II ТРИГОНОМЕТРИЈА

1. ИДЕНТИТЕТИ

1. Пресметај $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$, ако $\sin x\cdot\cos x=\frac{2}{5}$.

Решение. Нека $A=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$. Тогаш

$$A^2=(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x})^2=\frac{1+2\sin x\cdot\cos x}{1-2\sin x\cdot\cos x}=\frac{1+2\cdot\frac{2}{5}}{1-2\cdot\frac{2}{5}}=9,$$

од каде $A=\pm 3$.

2. Ако $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, докажи дека

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma=1.$$

Решение. Од равенствата

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \text{ и } \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\gamma)=\operatorname{ctg}\gamma=\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}$$

добиваме $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}$. Оттука добиваме

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma=1.$$

3. Да се пресмета вредноста на изразот $A=\frac{\sin 2\alpha-\sqrt{3}\cdot\cos\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}$ ако $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ и $\sin\alpha>0$.

Решение. Од $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ и $\sin\alpha>0$, следува дека

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Според тоа,

$$A=\frac{\sin 2\alpha-\sqrt{3}\cdot\cos\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}=0.$$

4. Да се докаже идентитетот

$$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Решение. Имаме

$$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

5. Да се пресмета вредноста на изразот $A=\frac{\sin\alpha-\cos 2\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}$, ако $\sin\alpha=\frac{1}{2}$.

Решение. Од $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ следува

$$\cos^2\alpha=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \text{ и } \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

Според тоа,

$$A=\frac{\sin\alpha-\cos 2\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}=0\,.$$

6. Да се пресмета вредноста на изразот $A=\frac{\cos\alpha+\sqrt{3}\cdot\sin\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}$ **,** ако $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

Решение. Ако $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, тогаш $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$. Според тоа,

$$A=\frac{\cos\alpha+\sqrt{3}\cdot\sin\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot(\pm\frac{\sqrt{3}}{2})}{1+1}=\frac{\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}}{2}$$

т.е. A прима две вредности и тоа: 1 и $-\frac{1}{2}$.

7. Да се пресмета вредноста на изразот $A=\frac{\sin\alpha+\sqrt{3}\cdot\cos\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}$ ако $\sin\alpha=\frac{1}{2}$.

Решение. Ако $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, тогаш $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\pm\sqrt{\frac{4}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$. Според тоа,

$$A=\frac{\sin\alpha+\sqrt{3}\cdot\cos\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot(\pm\frac{\sqrt{3}}{2})}{1+1}=\frac{\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}}{2}\;,$$

т.е. A прима две вредности, и тоа: 1 и $-\frac{1}{2}$.

8. Да се пресмета вредноста на изразот $A=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha-2}{\sin\alpha+2\cos\alpha}$ ако се знае дека $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ и α е остар агол.

Решение. Бидејќи α е остар агол имаме $\sin\alpha>0$ па затоа

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}\,.$$

Според тоа,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{3}{4}$$

од што следува

$$A=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha-2}{\sin\alpha+2\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{3}+\frac{3}{4}-2}{\frac{4}{5}+\frac{6}{5}}=\frac{1}{24}\,.$$

9. Да се пресмета вредноста на изразот $B=\frac{\operatorname{tg}\alpha-6\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha-5\cos\alpha}$ ако се знае дека $\sin\alpha=\frac{12}{13}$ и α е остар агол.

Решение. Бидејќи α е остар агол имаме $\cos\alpha>0$ па затоа

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\frac{5}{13}\,.$$

Според тоа,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{12}{5},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{5}{12}$$

од што следува

$$B=\frac{\operatorname{tg}\alpha-6\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha-5\cos\alpha}=\frac{\frac{12}{5}-\frac{5}{2}}{\frac{12}{13}-\frac{25}{13}}=\frac{1}{10}.$$

10. Докажи дека

$$\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}=\frac{1}{8}.$$

Решение. Нека $x=\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}$. Равенството го множиме со $8\cos\frac{\pi}{14}$ и добиваме

$$\begin{aligned}8x\cdot\cos\frac{\pi}{14}&=8\cos\frac{\pi}{14}\cdot\sin\frac{\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}\cdot\sin\frac{5\pi}{14}=4\sin\frac{2\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}\cdot\sin\frac{5\pi}{14}\\&=2(\cos\frac{3\pi}{14}-\cos\frac{7\pi}{14})\sin\frac{3\pi}{14}=2\cos\frac{3\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}=\sin\frac{6\pi}{14}\\&=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{6\pi}{14})=\cos\frac{\pi}{14}.\end{aligned}$$

Следствено, $8x=1$, т.е.

$$\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}=\frac{1}{8}.$$

11. Докажи дека

$$4\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}=1-\sin\frac{\pi}{14}+\sin\frac{3\pi}{14}-\sin\frac{5\pi}{14}$$

Решение. Левата страна на равенството ќе ја трансформираме користејќи ги тригонометриските идентитети

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

При тоа, добиваме:

$$\begin{aligned}4\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}&=4\frac{1}{2}[\cos(-\frac{2\pi}{14})-\cos\frac{4\pi}{14}]\sin\frac{5\pi}{14}=2\sin\frac{5\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{14}-2\sin\frac{5\pi}{14}\cos\frac{4\pi}{14}\\&=(\sin\frac{7\pi}{14}+\sin\frac{3\pi}{14})-(\sin\frac{9\pi}{14}+\sin\frac{\pi}{14})=\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{14}-\sin\frac{9\pi}{14}-\sin\frac{\pi}{14}\\&=1-\sin\frac{\pi}{14}+\sin\frac{3\pi}{14}-\sin\frac{5\pi}{14},\end{aligned}$$

бидејќи $\sin\frac{9\pi}{14}=\sin\frac{5\pi}{14}$, што и требаше да се докаже.

Забелешка. Со не големи пресметки и трансфрормации, може да се докаже дека двете страни на равенството кое го окажуваме се енакви на $\frac{1}{2}$.

12. Докажи дека

$$\cos 36^\circ\cos 72^\circ=\frac{1}{4}.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}\cos 36^\circ\cos 72^\circ&=\frac{2\sin 36^\circ\cos 36^\circ\cos 72^\circ}{2\sin 36^\circ}=\frac{2\cos 72^\circ\sin 72^\circ}{4\sin 36^\circ}=\frac{\sin 144^\circ}{4\sin 36^\circ}\\&=\frac{\sin(180^\circ-36^\circ)}{4\sin 36^\circ}=\frac{\sin 36^\circ}{4\sin 36^\circ}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

13. Докажи го идентитетот

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{\sin\alpha}}=\frac{2\sin(15^\circ+\frac{\alpha}{2})\cos(15^\circ-\frac{\alpha}{2})}{\cos^2(45^\circ-\frac{\alpha}{2})}$$

Решение. Имаме:

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{\sin\alpha}}=1+\frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{1+2\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{2(\frac{1}{2}+\sin\alpha)}{1+\cos(90^\circ-\alpha)}=\frac{2(\sin 30^\circ+\sin\alpha)}{2\cos^2\frac{90^\circ-\alpha}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{30^\circ+\alpha}{2}\cos\frac{30^\circ-\alpha}{2}}{\cos^2(45^\circ-\frac{\alpha}{2})}=\frac{2\sin(15^\circ+\frac{\alpha}{2})\cos(15^\circ-\frac{\alpha}{2})}{\cos^2(45^\circ-\frac{\alpha}{2})}$$

14. Да се докаже идентитетот

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\sin\alpha\,.$$

Решение. Последователно добиваме:

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\frac{1-\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\sin\alpha+\cos\alpha-\cos\alpha=\sin\alpha.$$

15. Да се упрости изразот

$$\frac{\sin 53^\circ-2\cos 40^\circ\sin 13^\circ}{\cos 63^\circ}$$

Решение. Користејќи го тригонометрискиот идентитет

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\,,$$

имаме

$$\frac{\sin 53^\circ-2\cos 40^\circ\sin 13^\circ}{\cos 63^\circ}=\frac{\sin 53^\circ-[\sin(13^\circ+40^\circ)+\sin(13^\circ-40^\circ)]}{\cos 63^\circ}$$

$$=-\frac{-\sin(-27^\circ)}{\sin 63^\circ}=\frac{\cos(90^\circ-27^\circ)}{\sin 63^\circ}=\mathrm{tg}\,63^\circ.$$

16. Да се докаже дека

$$2+\mathrm{tg}1^\circ\,\mathrm{tg}\,2^\circ=\mathrm{ctg}1^\circ\,\mathrm{tg}\,2^\circ\ .$$

Решение. Од

$$\mathrm{tg}1^\circ=\mathrm{tg}(2^\circ-1^\circ)=\frac{\mathrm{tg}\,2^\circ-\mathrm{tg}1^\circ}{1+\mathrm{tg}\,2^\circ\,\mathrm{tg}1^\circ}$$

се добива

$$1+\mathrm{tg}\,2^\circ\cdot\mathrm{tg}1^\circ=\mathrm{ctg}\,2^\circ\,\mathrm{tg}1^\circ-1$$

односно

$$2+\mathrm{tg}1^\circ\,\mathrm{tg}\,2^\circ=\mathrm{ctg}1^\circ\,\mathrm{tg}\,2^\circ.$$

17. Да се пресмета $\sin^3 x+\cos^3 x$ ако $\sin x+\cos x=a$.

Решение. Изразот $\sin^3 x+\cos^3 x$ ќе го запишеме во обликот:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)^3 - 3\sin^2 x \cos x - 3\sin x \cos^2 x$$
$$= a^3 - 3(\sin x + \cos x)\sin x \cos x = a^3 - 3a \sin x \cos x.$$

Квадрирајќи го равенството $\sin x + \cos x = a$, добиваме

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = a^2;$$
$$1 + 2\sin x \cos x = a^2;$$
$$\sin x \cos x = \tfrac{a^2-1}{2}.$$

На крајот имаме

$$\sin^3 x + \cos^3 x = a^3 - 3a \cdot \tfrac{a^2-1}{2} = \tfrac{a}{2}(3-a^2).$$

18. Ако важи $\sin\alpha + \sin\beta = a$, $\cos\alpha + \cos\beta = b$, $a^2 + b^2 \neq 0$, тогаш

$$\sin(\alpha+\beta) = \tfrac{2ab}{a^2+b^2}.$$

Докажи!

Решение. Ако равенствата

$$\sin\alpha + \sin\beta = a \text{ и } \cos\alpha + \cos\beta = b$$

ги помножиме меѓусебно, ќе добиеме

$$ab = \sin(\alpha+\beta) + \sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta$$
$$= \sin(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2}[\sin 2\alpha + \sin 2\beta]$$
$$= \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$

Ако пак ги квадрираме и ги собереме, добиваме

$$a^2 + b^2 = 2 + 2(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta) = 2 + 2\cos(\alpha-\beta) = 2[1+\cos(\alpha-\beta)].$$

Според тоа, ќе имаме:

$$ab = \tfrac{a^2+b^2}{2}\sin(\alpha+\beta), \text{ т.е. } \sin(\alpha+\beta) = \tfrac{2ab}{a^2+b^2}.$$

што требаше да се докаже.

19. а) Да се упрости изразот $A = \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x - 1}$.

б) За кои вредности на x важи $A > 0$?

Решение. а) Користејќи ги тригонометриските идентитети, имаме

$$A = \tfrac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x - 1} = \tfrac{2\sin x\cos x - \cos^2 x + \sin^2 x + 1}{2\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x - 1}$$
$$= \tfrac{2\sin x(\cos x + \sin x)}{2\sin x(\cos x - \sin x)} = \tfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \tfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$$

при што $\sin x \neq 0$ и $\cos x \neq 0$.

б) $A > 0$ ако и само ако

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x > 0.$$

Според тоа

$$2x \in (2k\pi, \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi) \cup (\tfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi),$$

т.е.

$$x \in (k\pi, \tfrac{\pi}{4} + k\pi) \cup (\tfrac{3\pi}{4} + k\pi, \pi + k\pi), \; k \in \mathbb{Z}.$$

20. Ако $x+\frac{1}{x}=2\cos\alpha$, тогаш $x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\alpha$. Докажи!

Решение. *Прв начин.* Од $x+\frac{1}{x}=2\cos\alpha$ ја добиваме равенката

$$x^2-2x\cos\alpha+1=0$$

чии решенија се

$$x_1=\cos\alpha+i\sin\alpha,\ x_2=\cos\alpha-i\sin\alpha.$$

Бидејќи $\frac{1}{x_1}=x_2$, имаме:

$$x^n+\frac{1}{x^n}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n+(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n$$

$$=\cos n\alpha+i\sin n\alpha+\cos n\alpha-i\sin n\alpha=2\cos n\alpha.$$

Втор начин. Нека $S_n=x^n+\frac{1}{x^n}$. Прво да забележиме дека

$$S_{n+1}=S_nS_1-S_{n-1}.$$

Да претпоставиме дека равенството важи за секој природен број помал или еднаков на n. Тогаш имаме

$$S_{n+1}=4\cos n\alpha\cos\alpha-2\cos(n-1)\alpha=2(2\cos n\alpha\cos\alpha-\cos(n-1)\alpha)=2\cos(n+1)\alpha$$

Следствено, според принципот на математичка индукција, равенството важи и за секој природен број.

21. Даден е збирот

$$S=\cos\frac{n\pi}{7}+\cos\frac{3n\pi}{7}+\cos\frac{5n\pi}{7},\ n\in\mathbb{N}.$$

Ако n не е делив со 7, тогаш

$$S=-\frac{1}{2}\cos n\pi=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{за } n \text{ непарен број}\\ -\frac{1}{2}, & \text{за } n \text{ парен број}\end{cases}.$$

Докажи!

Решение. Ако n е делив со 7 ($n=7k$), тогаш

$$S=\cos k\pi+\cos 3k\pi+\cos 5k\pi.$$

Ако k е парен, тогаш $S=3$, а ако k е непарен, тогаш $S=-3$.

Нека n не е делив со 7; се воочува дека:

$$\sin\frac{2n\pi}{7}=2\sin\frac{n\pi}{7}\cos\frac{n\pi}{7},$$

$$\sin\frac{6n\pi}{7}-\sin\frac{4n\pi}{7}=2\sin\frac{n\pi}{7}\cos\frac{5n\pi}{7}$$

$$\sin\frac{4n\pi}{7}-\sin\frac{2n\pi}{7}=2\sin\frac{n\pi}{7}\cos\frac{3n\pi}{7}$$

Собирајќи ги овие равенства добиваме

$$\sin\frac{6n\pi}{7}=2S\sin\frac{n\pi}{7},$$

од каде што добиваме

$$S=\frac{\sin\frac{6n\pi}{7}}{2\sin\frac{n\pi}{7}}=\frac{\sin(n\pi-\frac{n\pi}{7})}{2\sin\frac{n\pi}{7}}=-\frac{1}{2}\cos n\pi.$$

22. Да се најдат сите вредности на α за кои збирот од квадратите на корените на равенката

$$x^2+(\sin\alpha-1)x-\tfrac{1}{2}\cos^2\alpha=0$$

е најголем. Колкав е тој збир?

Решение. Од Виетовите правила следува дека

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=[-(\sin\alpha-1)]^2-2(-\tfrac{1}{2}\cos^2\alpha)$$

$$=\sin^2\alpha-2\sin\alpha+1+\cos^2\alpha=2-2\sin\alpha=2(1-\sin\alpha)$$

Значи, $x_1^2+x_2^2$ има најголема вредност за $\sin\alpha=-1$ и тој збир $2(1+1)=4$.

23. Да се најде збирот

$$\log\operatorname{tg}1^\circ+\log\operatorname{tg}2^\circ+\ldots+\log\operatorname{tg}89^\circ.$$

Решение. Имаме

$$\log\operatorname{tg}1^\circ+\log\operatorname{tg}2^\circ+\ldots+\log\operatorname{tg}89^\circ=\log(\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}2^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}89^\circ)=$$

$$=\log(\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}2^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}44^\circ\cdot\operatorname{tg}45^\circ\cdot\operatorname{ctg}44^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{ctg}1^\circ)$$

$$=\log((\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{ctg}1^\circ)\cdot(\operatorname{tg}2^\circ\cdot\operatorname{ctg}2^\circ)\ldots\cdot(\operatorname{tg}44^\circ\cdot\operatorname{ctg}44^\circ)\cdot\operatorname{tg}45^\circ)$$

$$=\log(1\cdot1\cdot1\cdot\ldots\cdot1)=\log1=0.$$

24. Не користејќи таблици ниту калкулатор, да се пресмета остриот агол α ако се знае дека

$$\operatorname{ctg}\alpha=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\,.$$

Решение. Имаме

$$\operatorname{ctg}\alpha=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{\sin60^\circ+\sin45^\circ}{\sin45^\circ-\sin30^\circ}=\frac{2\sin\frac{105^\circ}{2}\cos\frac{15^\circ}{2}}{2\sin\frac{15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{15^\circ}{2}.$$

Бидејќи α е остар агол и $\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}7^\circ30'$, добиваме $\alpha=7^\circ30'$.

25. Докажи дека за секој природен број n, $\cos(nx)$ може да се изрази како полином по $\cos x$ од n-ти степен.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со помош на принципот на математичка индукција. Индукцијата ќе ја спроведуваме по n. Во доказот се користат формулите:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

и

$$\sin\alpha\sin\beta=\tfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))\,.$$

За $n=1$ тврдењето е очигледно.

Нека тврдењето важи за секој $n\le k$ и нека за такви n имаме:

$$\cos(nx)=P_n(\cos x)$$

каде што $P_n(\cos x)$ е полином по $\cos x$ од n-та степен. За $k+1$ добиваме:

$$\cos((k+1)x)=\cos(kx+x)=\cos kx\cos x-\sin kx\sin x$$

$$=\cos kx\cos x-\tfrac{1}{2}\cos((k-1)x)+\tfrac{1}{2}\cos((k+1)x)$$

од каде што се добива

$$\cos((k+1)x)=2\cos kx\cos x-\cos((k-1)x)=2P_k(\cos x)\cos x-P_{k-1}(\cos x)$$

Дадениот израз за $\cos((k+1)x)$ е полином по $\cos x$ од степен $k+1$. Според принципот на математичка индукција, тврдењето важи за секој природен број.

26. Да се определи аголот α, ако се знае дека $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$ и

$$\sin\alpha=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6-3\sqrt{2}}-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\sin\alpha&=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6-3\sqrt{2}}-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6-3\sqrt{2}}-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,\frac{\sqrt{6-3\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{6-3\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\\&=\frac{1-\sqrt{2}}{4(1-\sqrt{2})}(\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}})=\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\\&=\cos\frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}+\sin\frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\cos\frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}+\sin\frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}\\&=\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{8}=\sin(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{6})=\sin\frac{7\pi}{24},\end{aligned}$$

од каде што е јасно дека $\alpha=\frac{7\pi}{24}$.

27. Најди ги сите вредности на реалниот број k за кои изразот

$$\sin^6 x+\cos^6 x+k(\sin^4 x+\cos^4 x)$$

не зависи од x.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}&\sin^6 x+\cos^6 x+k(\sin^4 x+\cos^4 x)=\\&\qquad=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)+\\&\qquad\quad+k((\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x)\\&\qquad=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x+k(1-2\sin^2 x\cos^2 x)\\&\qquad=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x+k(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)=k+1-\frac{3+2k}{4}\sin^2 2x.\end{aligned}$$

Изразот не зависи од x ако $3+2k=0$, односно за $k=-\frac{3}{2}$.

28. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{\sin 3x}{\sin x}+\frac{\sin 6x}{\sin 2x}+\ldots+\frac{\sin 3nx}{\sin nx}-\frac{\cos 3x}{\cos x}-\frac{\cos 6x}{\cos 2x}-\ldots\frac{\cos 3nx}{\cos nx}.$$

Решение. Користејќи ја адиционата теорема

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha$$

и тригонометриската формула за двоен агол $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, добиваме

$$\begin{aligned}A&=\frac{\sin 3x}{\sin x}+\frac{\sin 6x}{\sin 2x}+\ldots+\frac{\sin 3nx}{\sin nx}-\frac{\cos 3x}{\cos x}-\frac{\cos 6x}{\cos 2x}-\ldots\frac{\cos 3nx}{\cos nx}\\&=[\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}]+[\frac{\sin 6x}{\sin 2x}-\frac{\cos 6x}{\cos 2x}]+\ldots+[\frac{\sin 3nx}{\sin nx}-\frac{\cos 3nx}{\cos nx}]\\&=\frac{\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x}{\sin x\cos x}+\frac{\sin 6x\cos 2x-\cos 6x\sin 2x}{\sin 2x\cos 2x}+\ldots+\frac{\sin 3nx\cos nx-\cos 3nx\sin nx}{\sin nx\cos nx}\end{aligned}$$

$$=\frac{\sin(3x-x)}{\sin x\cos x}+\frac{\sin(6x-2x)}{\sin 2x\cos 2x}+\ldots+\frac{\sin(3nx-nx)}{\sin nx\cos nx}$$
$$=\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}2\sin x\cos x}+\frac{\sin 4x}{\frac{1}{2}2\sin 2x\cos 2x}+\ldots+\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}2\sin nx\cos nx}$$
$$=\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x}+\frac{\sin 4x}{\frac{1}{2}\sin 4x}+\ldots+\frac{\sin 2nx}{\frac{1}{2}\sin 2nx}=\underbrace{2+2+\ldots+2}_{n}=2n$$

29. Провери ја точноста на равенството
$$\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+2^2\operatorname{tg}2^2\alpha+\ldots+2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-2^{n+1}\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha\ .$$

Решение. Не е тешко да се провери точноста на следното равенство
$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha\ . \tag{1}$$
Навистина
$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2\cos\alpha\sin\alpha}=2\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=2\operatorname{ctg}2\alpha\ .$$
Равенството (1) може да се трансформира во облик
$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha\ . \tag{2}$$

Сега
$$2\operatorname{tg}2\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha-4\operatorname{ctg}4\alpha$$
$$2^2\operatorname{tg}2\alpha=4\operatorname{ctg}4\alpha-2^3\operatorname{ctg}2^3\alpha$$
$$2^3\operatorname{tg}2\alpha=2^3\operatorname{ctg}4\alpha-2^4\operatorname{ctg}2^4\alpha$$
....
$$2^n\operatorname{tg}2\alpha=2^n\operatorname{ctg}2^n\alpha-2^{n+1}\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha$$
Ако ги собереме претходните равенство (2) го добиваме бараното равенство
$$\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+2^2\operatorname{tg}2^2\alpha+\ldots+2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-2^{n+1}\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha\ .$$

30. Определи ја најголемата вредност на изразот
$$\sin x\cos y\cos z+\cos x\sin y\sin z\ .$$

Решение. Од особините на апсолутна вредност, заради неравенството $|\sin x|\le 1$, имаме
$$\sin x\cos y\cos z\le|\sin x\cos y\cos z|=|\sin x|\cdot|\cos y\cos z|\le|\cos y\cos z|$$
Аналогно,
$$\cos x\sin y\sin z\le|\cos x\sin y\sin z|=|\cos x|\cdot|\sin y\sin z|\le|\sin y\sin z|$$
Со собирање на последните две неравенства добиваме
$$\sin x\cos y\cos z+\cos x\sin y\sin z\le|\cos y\cos z|+|\sin y\sin z|\ .$$
Добиениот израз на десната страна на последното неравенство има една од вредностите $\pm\cos(y\pm z)$. Било која од тие вредности не е поголема од 1. Значи, 1 е најголема вредност која може да се добие.

На пример, за $x=0,\ y=z=\frac{\pi}{2}$ имаме
$$\sin x\cos y\cos z+\cos x\sin y\sin z=\sin 0\cos\tfrac{\pi}{2}\cos\tfrac{\pi}{2}+\cos 0\sin\tfrac{\pi}{2}\sin\tfrac{\pi}{2}=1\ .$$

31. Пресметај ја вредноста на изразот

$$(1+\mathrm{tg}\,1^\circ)(1+\mathrm{tg}\,2^\circ)...(1+\mathrm{tg}\,44^\circ).$$

Решение. За било кое α, за кое $\mathrm{tg}\,\alpha$ е определено имаме

$$1+\mathrm{tg}\,\alpha=\mathrm{tg}\,45^\circ+\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos 45^\circ\cos\alpha}.$$

Но, тогаш

$$1+\mathrm{tg}\,1^\circ=\frac{\sin 46^\circ}{\cos 1^\circ\cos 45^\circ},\, 1+\mathrm{tg}\,2^\circ=\frac{\sin 47^\circ}{\cos 2^\circ\cos 45^\circ},...,$$

$$1+\mathrm{tg}\,43^\circ=\frac{\sin 88^\circ}{\cos 43^\circ\cos 45^\circ},1+\mathrm{tg}\,44^\circ=\frac{\sin 89^\circ}{\cos 44^\circ\cos 45^\circ}$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{tg}\,1^\circ)(1+\mathrm{tg}\,2^\circ)...(1+\mathrm{tg}\,44^\circ)&=\frac{\sin 46^\circ}{\cos 1^\circ\cos 45^\circ}\cdot\frac{\sin 47^\circ}{\cos 2^\circ\cos 45^\circ}...\frac{\sin 88^\circ}{\cos 43^\circ\cos 45^\circ}\cdot\frac{\sin 89^\circ}{\cos 44^\circ\cos 45^\circ}\\&=\frac{\cos 44^\circ}{\cos 1^\circ\cos 45^\circ}\cdot\frac{\cos 43^\circ}{\cos 2^\circ\cos 45^\circ}...\frac{\cos 2^\circ}{\cos 43^\circ\cos 45^\circ}\cdot\frac{\cos 1^\circ}{\cos 44^\circ\cos 45^\circ}\\&=\frac{1}{\cos^{44}45^\circ}=\frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^{44}}=2^{22}.\end{aligned}$$

32. Определи ја најголемата вредност на изразот $\sin(\cos x)+\cos(\sin x)$. За кои вредности на x таа се достигнува.

Решение. Тригонометриската функција $\cos x$ прима вредности во интервалот $[-1,1]$. На тој интервал тригонометриската функција $\sin x$ е монотоно растечка. Според тоа, најголема вредност на првиот собирок $\sin(\cos x)$ е $\sin 1$ и таа се достигнува во точките во кои $\cos x=1$. Решенија на последната равенка се реалните броеви $x=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Најголема вредност на вториот собирок е 1 и таа се достигнува во точките во кои $\sin x=0$. Решенија на последната равенка се сите реални броеви од облик $x=l\pi, l\in\mathbb{Z}$.

Збирот на двата собироци ќе биде најголем ако постојат точки во кои и двата собироци достигнуваат најголема вредност. Пресек на множествата $\{2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ и $\{l\pi, l\in\mathbb{Z}\}$ е $\{2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$. Во тие точки изразот достигнува најголема вредност и таа е $1+\sin 1$.

33. Нека α е остар агол таков што важи $\cos\alpha=\frac{3}{5}$. Докажи, дека α не е од облик $r\pi$, каде r е рационален број.

Решение. Доволно е со индукција по n да докажеме дека $\mathrm{tg}\,n\alpha$ може да се прикаже во облик $\frac{p_n}{q_n}$, каде $p_n,q_n\in\mathbb{Z}$ се такви што $p_n\equiv 3(\mathrm{mod}\,5),\ \ q_n\equiv 4(\mathrm{mod}\,5)$. Оттука следува дека $\mathrm{tg}\,n\alpha\neq 0$, т.е. $n\alpha\neq m\pi$, каде $m\in\mathbb{Z}$.

За $n=1$ имаме $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{3}{4}$, па тврдењето важи. Нека тврдењето важи за некој природен број n, т.е. нека постојат p_n,q_n со споменатите својства. Тогаш

$$\mathrm{tg}(n+1)\alpha=\frac{\mathrm{tg}\,n\alpha+\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}\,n\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}=\frac{4p_n+3q_n}{4q_n-3p_n}.$$

Ако $p_{n+1}=2(4p_n+3q_n)$, $q_{n+1}=2(4q_n-3p_n)$, тогаш $p_{n+1},q_{n+1}\in\mathbb{Z}$ и

$$p_{n+1}=2(4p_n+3q_n)\equiv 2(4\cdot 3+3\cdot 4)\equiv 3(\operatorname{mod}5) \text{ и}$$

$$q_{n+1}=2(4q_n-3p_n)\equiv 2(4\cdot 4-3\cdot 3)\equiv 4(\operatorname{mod}5),$$

со што доказот е завршен.

34. Најди ја најголемата и најмалата вредност која ја достигнува функцијата

$$f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x &= (\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)\\ &=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\\ &=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\tfrac{3}{4}\sin^2 2x \end{aligned}$$

Бидејќи $0\le\sin^2 2x\le 1$ добиваме $\max f(x)=1$ и $\min f(x)=\frac{1}{4}$.

35. Нека $\sin^2 x+\sin^2 y=m$ (m е дадена вредност). Да се најде најголемата вредност на

$$f(x,y)=\sin^2(x+y)\cos(x-y)+\sin^2(x-y)\cos(x+y)$$

при дадениот услов.

Решение. Изразот $f(x,y)$ го трансформираме на следниот начин:

$$\begin{aligned} f(x,y)&=[1-\cos^2(x+y)]\cos(x-y)+[1-\cos^2(x-y)]\cos(x+y)\\ &=\cos(x-y)-\cos^2(x+y)\cos(x-y)+\cos(x+y)-\cos^2(x-y)\cos(x+y)\\ &=\cos(x-y)[1-\cos(x+y)\cos(x-y)]+\cos(x+y)[1-\cos(x-y)\cos(x+y)]\\ &=[\cos(x-y)+\cos(x+y)][1-\cos(x-y)\cos(x+y)]\\ &=2\cos x\cos y\,[1-\tfrac{1}{2}(\cos 2x+\cos 2y)]\\ &=2\cos x\cos y(\sin^2 x+\sin^2 y). \end{aligned}$$

Бидејќи $\sin^2 x+\sin^2 y=m$, добиваме $f(x,y)=2m\cos x\cos y$. Ќе направиме оценка на производот $\cos x\cos y$. Од неравенството $(\cos x-\cos y)^2\ge 0$ добиваме

$$\cos^2 x+\cos^2 y\ge 2\cos x\cos y$$

односно,

$$2\cos x\cos y\le 2-m.$$

Според тоа најголема вредност на функцијата е $m(2-m)$.

36. Докажи дека

$$\operatorname{tg}(\alpha+k\beta)-\operatorname{tg}(\alpha+(k-1)\beta)=\frac{\sin\beta}{\cos(\alpha+k\beta)\cos(\alpha+(k-1)\beta)}.$$

Користејќи го тоа пресметај го збирот $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos(\alpha+(k-1)\beta)\cos(\alpha+k\beta)}$

Одговор. $\frac{\mathrm{tg}(\alpha+n\beta)-\mathrm{tg}\,\alpha}{\sin\beta}$

37. Пресметај го збирот $\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{\cos(k-1)\alpha\cos k\alpha}$.

Упатство. Искористи ја претходната задача: наместо β стави α и наместо $n+1$ стави n Бараниот збир е $\frac{\mathrm{tg}\,n\alpha-\mathrm{tg}\,\alpha}{\sin\alpha}$.

38. Докажи дека, за секој природен број n важи

а) $\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}$ (има вкупно n корени);

б) $\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}$ (има вкупно n корени).

Решение. а) За $n=1$ тврдењето е точно, бидејќи $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Да претпоставиме дека тврдењето е точно за природниот број n, т.е. дека важи равенството под а). За да тврдењето е точно за секој природен број доволно е да се докаже дека а) важи за $n+1$. Значи, треба да се докаже дека

$$\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}$$

(вкупно $n+1$ корени). Имаме:

$$\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}=\cos\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}{2}}\quad (n \text{ корени})$$

$$==\sqrt{\frac{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}\,(n+1 \text{ корени}).$$

б) Слично како под а), со тоа што $\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2}}$.

2. ТРИГОНОМЕТРИСКИ РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

1. Да се реши равенката:

$$\sin\frac{x}{2}\cos 2x=1.$$

Решение. Бидејќи $|\sin\frac{x}{2}|\le 1$, $|\cos 2x|\le 1$, дадената равенка е еквивалентна со вкупноста од следните два системи равенки:

$$\begin{cases}\sin\frac{x}{2}=1\\ \cos 2x=1\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}\sin\frac{x}{2}=-1\\ \cos 2x=-1\end{cases}$$

Решение на првиот систем е: $x=(4k+1)\pi$ и $x=t\pi,\ t,k\in\mathbb{Z}$ односно $x=(4k+1)\pi$.

Решение на вториот систем е: $x=(4m-1)\pi$ и $x=t\pi+\frac{\pi}{2}$ **,** $t,k\in\mathbb{Z}$ а таков x не постои.

Според тоа, решение на дадената равенка е : $x=(4k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

2. Да се реши равенката:

$$\sin\tfrac{x}{2}\cos 2x=-1 \text{ .}$$

Решение. Бидејќи $|\sin\tfrac{x}{2}|\leq 1$, $|\cos 2x|\leq 1$, дадената равенка е еквивалентна со вкупноста од следните два системи равенки:

$$\begin{cases}\sin\tfrac{x}{2}=1\\ \cos 2x=-1\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}\sin\tfrac{x}{2}=-1\\ \cos 2x=1\end{cases}$$

Решение на прviот систем е: $x=(4k+1)\pi$ и $x=t\pi+\tfrac{\pi}{2}$, $t,k\in\mathbb{Z}$ а таков x не постои. Решение на вториот систем е: $x=(4m-1)\pi$ и $x=t\pi$, односно $x=(4k-1)\pi$, $t,k\in\mathbb{Z}$.

Според тоа, решение на дадената равенка е $x=(4k-1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

3. Да се реши равенката

$$1-\cos^2 2x=\sin 3x-\cos(\tfrac{\pi}{2}+x) \text{ .}$$

Решение. Користејќи ги равенствата:

$$1-\cos^2 2x=\sin^2 2x,\ \cos(\tfrac{\pi}{2}+x)=-\sin x,\ \sin 3x+\sin x=2\sin 2x\cos x$$

дадената равенка ја трансформираме во еквивалентната равенка

$$\sin^2 2x=2\sin 2x\cos x$$

која е еквивалентна со равенката

$$\sin 2x\cos x(\sin x-1)=0 \text{ .}$$

Оттука ги добиваме решенијата:

$$x=\tfrac{k\pi}{2},\ x=\tfrac{(2s+1)\pi}{2},\ x=\tfrac{(4m+1)\pi}{2} \text{ за } k,s,m\in\mathbb{Z} \text{ .}$$

4. Да се реши равенката

$$\cos x-\sin^2 x=-\tfrac{1}{4} \text{ .}$$

Решение. Имаме

$$\cos x-\sin^2 x=-\tfrac{1}{4}$$

$$\cos x-(1-\cos^2 x)=-\tfrac{1}{4}$$

$$\cos^2 x+\cos x-\tfrac{3}{4}=0$$

Ова е квадратна равенка по $\cos x$ па затоа

$$\cos x=\tfrac{-1\pm\sqrt{1+3}}{2}=\tfrac{-1\pm 2}{2} \text{, т.е. } \cos x=-\tfrac{3}{2} \text{ и } \cos x=\tfrac{1}{2} \text{ .}$$

Но, $\cos x=-\tfrac{3}{2}$ не е можно, бидејќи $-1\leq\cos x\leq +1$, а од $\cos x=\tfrac{1}{2}$ имаме: $x=\pm\tfrac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

5. Да се реши равенката

$$\sin x - \cos^2 x = -\tfrac{1}{4}$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$\sin^2 x + \sin x - \tfrac{3}{4} = 0$$

од која добиваме $\sin x = -\frac{3}{2}$ и $\sin x = \frac{1}{2}$.

Не постојат вредности на x за кои што $\sin x = -\frac{3}{2}$, бидејќи $-1 \le \sin x \le 1$; додека од $\sin x = \frac{1}{2}$ следува

$$x = \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ и } x = \tfrac{5\pi}{6} + 2t\pi, \quad (k, t \in \mathbb{Z}).$$

6. а) Реши ја тригонометриската равенка

$$\sin(x + \tfrac{\pi}{6}) + \cos(x + \tfrac{\pi}{3}) = 2\cos^2 x$$

б) Ако најдените позитивни решенија се внатрешни агли во еден триаголник со страна $a = 4cm$, тогаш да се најдат радиусите на впишаната и опишаната кружница на триаголникот.

Решение. а) Од адиционите теореми:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

и

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

последователно добиваме имаме:

$$\sin x\cos\tfrac{\pi}{6} + \cos x\sin\tfrac{\pi}{6} + \cos x\cos\tfrac{\pi}{3} - \sin x\sin\tfrac{\pi}{3} = 2\cos^2 x$$

$$\tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \tfrac{1}{2}\cos x + \tfrac{1}{2}\cos x - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 2\cos^2 x$$

$$\cos x = 2\cos^2 x$$

$$\cos x(2\cos x - 1) = 0.$$

Според тоа, $\cos x = 0$ па затоа

$$x = \tfrac{\pi}{2} + k\pi, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

или $\cos x = \frac{1}{2}$ па затоа

$$x = \pm\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

б) Аглите на триаголникот се $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{6}$ и тоа е половина од рамностран триаголник.

Ако страната $a = 4cm$ лежи наспроти аголот $\frac{\pi}{6}$, тогаш другите две страни се $c = 8cm$ и $b = 4\sqrt{3}cm$. Плоштината на триаголникот е $P = 8\sqrt{3}cm^2$, а неговиот полупериметар е $s = \frac{a+b+c}{2} = (6 + 2\sqrt{3})cm$, па затоа за радиусот на впишаната кружница имаме $r = \frac{P}{s} = \frac{4\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}cm$, а за радиусот на опишаната кружница имаме $R = \frac{abc}{4P} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3}}{4 \cdot 8\sqrt{3}}cm = 4cm$.

Ако страната a лежи наспроти аголот $\frac{\pi}{2}$, тогаш аналогно се добива

$$r=\frac{P}{s}=\frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}cm \text{ и } R=\frac{abc}{4P}=\frac{4\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}}{4\cdot 2\sqrt{3}}cm=2cm\,.$$

Ако страната a лежи наспроти аголот $\frac{\pi}{3}$, тогаш аналогно се добива

$$r=\frac{P}{s}=\frac{\frac{8\sqrt{3}}{3}}{2+\frac{6\sqrt{3}}{3}}cm=\frac{4}{3+\sqrt{3}}cm \text{ и } R=\frac{abc}{4P}=\frac{4\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{8\sqrt{3}}{3}}{4\cdot\frac{8\sqrt{3}}{3}}cm=\frac{4\sqrt{3}}{3}cm\,.$$

7. а) По непозната x да се реши равенката

$$\sin(x+\alpha)+\cos(x+\beta)=2\cos^2 x,\quad (\alpha+\beta=90^\circ)$$

б) Ако α,β и најмалото позитивно решение по x на равенката различно од α и β се агли на триаголник со страна acm, тогаш да се определат висините и тежишните линии на триаголникот.

Решение. а) Од адиционите теореми имаме:

$$\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha+\cos x\cos\beta-\sin x\sin\beta=2\cos^2 x$$

и го како $\beta=90^\circ-\alpha,$ односно $\cos\beta=\sin\alpha$; $\sin\beta=\cos\alpha$ добиваме

$$\cos x\sin\alpha=\cos^2 x,$$

од каде што следува

$$\cos x(\sin\alpha-\cos x)=0.$$

Од последната равенка добиваме

$$\cos x=0 \text{ т.е. } x=\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$$

или

$$\sin\alpha-\cos x=0 \text{ т.е. } \cos x=\sin\alpha=\cos(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\beta \text{ т.е. } x=\beta+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\,.$$

б) Најмалото позитивно решение на дадената равенка, што е различно од β, е $\frac{\pi}{2}$ што значи дека навистина станува збор за триаголник, кој е правоаголен. Јасно, висините во триаголникот се

$$h_b=a,\ h_a=b,\ h_c=a\sin\beta\,.$$

Понатаму, за страните на триаголникот имаме $b=a\,\mathrm{tg}\beta$ и $c=\frac{a}{\cos\beta}$, па затоа неговите тежишни линии се

$$t_c=\frac{c}{2}=\frac{a}{2\cos\beta}\,,\ t_a=\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{4tg^2\beta+1}}{2} \text{ и } t_b=\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}=\frac{a\sqrt{tg^2\beta+4}}{2}\,.$$

8. Да се реши равенката

$$\frac{2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x}{\sqrt{\cos(x+\pi)}}=0.$$

Решение. Бидејќи функцијата на левата страна на равенката е периодична со период 2π, доволно е равенката да ја решиме на интервалот $[0,2\pi]$. Равенката има смисол ако $\cos(x+\pi)>0,$ т.е. $\cos x<0,$ што значи $x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$. За овие вредности на x дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$\sin x(\sin x-\sqrt{3}\cos x)=0\,.$$

Од последната равенка имаме $\sin x = 0$ и $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$. Од тука и од условот $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ наоѓаме дека во интервалот $[0, 2\pi]$ решенија се $x = \pi$ и $x = \frac{4\pi}{3}$. Конечно, сите решенија на дадената равенка се

$$x = (2k+1)\pi \text{ и } x = \frac{4\pi}{3} + 2t\pi, \quad (k, t = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) .$$

9. Дадена е тригонометриската равенка $a\cos^2 x = \operatorname{tg} x$, каде a е реален параметар. Ако едно решение на дадената равенка е $x_0 = \frac{5\pi}{12}$, да се докаже дека $a = [2(2+\sqrt{3})]^2$.

Решение. Во дадената равенка заменуваме $\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ и ја добиваме еквивалентната равенка

$$\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x = a. \qquad (1)$$

Пресметуваме

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = 2 + \sqrt{3}.$$

Конечно, бидејќи $x_0 = \frac{5\pi}{12}$ е решение на дадената равенка која е екви-валентна на равенката (1) добиваме:

$$\begin{aligned} a &= (2+\sqrt{3})^3 + (2+\sqrt{3}) = (2+\sqrt{3})[(2+\sqrt{3})^2 + 1] \\ &= (2+\sqrt{3})(8+4\sqrt{3}) = [2(2+\sqrt{3})]^2. \end{aligned}$$

10. Да се реши равенката

$$\cos x + \sin x = -1 .$$

Решение. Имаме:

$$\sin x + \cos x = -1 \quad / \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = 5\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{, т.е. } x = (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

или

$$x + \frac{\pi}{4} = 7\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{, т.е. } x = 3\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) .$$

11. Да се реши равенката

$$\cos x - \sin x = 1$$

Одговор. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ или $x = (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

12. Да се реши равенката

$$\sin x + \cos x = -\sqrt{2} .$$

Решение. Ако дадената равенка ја помножиме со $\frac{\sqrt{2}}{2}$, добиваме

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=-1 \text{ т.е. } \sin(x+\tfrac{\pi}{4})=-1$$

па затоа $x+\frac{\pi}{4}=3\frac{\pi}{2}+2k\pi$ или $x=5\frac{\pi}{4}+2k\pi, \quad (k\in\mathbb{Z})$

13. Да се реши равенката $\sin x-\cos x=-\sqrt{2}.$

Одговор. $x=7\frac{\pi}{4}+2k\pi, \quad (k\in\mathbb{Z})$

14. Да се реши равенката

$$3\sin x-2\cos^2 x=0\ .$$

Решение. Од $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ со замена во дадената равенка добиваме $2\sin^2 x+3\sin x-2=0$. Воведуваме замена $\sin x=t$ и ја добиваме квадратна равенка $2t^2+3t-2=0$, чии решенија се $t_1=\frac{1}{2}, t_2=-2$. Бидејќи $|\sin x|\leq 1$, вториот корен отпаѓа, па затоа $\sin x=\frac{1}{2}$. Конечно, решенија на почетната равенка се

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbb{Z} \ \text{ и } \ x=2t\pi+\frac{5\pi}{6},\ t\in\mathbb{Z}\ .$$

15. Да се реши равенката

$$2\sin^2 x-7\cos x=5\ .$$

Решение. Од $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ со замена во дадената равенка добиваме

$$2\cos^2 x-7\cos x+3=0\ .$$

Воведуваме замена $\cos x=t$ и ја добиваме квадратна равенка

$$2t^2-7t+3=0,$$

чии решенија се $t_1=\frac{1}{2}, t_2=3$. Бидејќи $|\cos x|\leq 1$, вториот корен отпаѓа, па затоа $\cos x=\frac{1}{2}$. Конечно, решенија на почетната равенка се

$$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\ .$$

16. Да се реши равенката

$$\sin x+\cos x=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x\ .$$

Решение. Дадената равенка се трансформира во равенка

$$\sin x+\cos x=\frac{1}{\sin x\cos x},$$

т.е. во

$$\sin x+\cos x=\frac{2}{\sin 2x}\ .$$

Со квадрирање и средување се добива:

$$\sin^2 2x+\sin^3 2x=4\ .$$

Бидејќи $-1\leq\sin 2x\leq 1$, следува дека $\sin^2 2x+\sin^3 2x\leq 2<4$, т.е. дадената равенка нема решение.

17. Да се најдат решенијата на равенката

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}=2\sqrt{2}$$

во интервалот $0\leq x\leq\pi$.

Решение. Бројот x е решение на горната равенка ако и само ако x е решение на системот

$$(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x})^2=8 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}\geq 0 \qquad (2)$$

Од равенката (1) имаме

$$\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{2}{\sin x\cos x}=8;$$

$$\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}-\frac{2}{\sin x\cos x}=8;$$

$$\frac{4}{\sin^2 2x}-\frac{4}{\sin 2x}=8,$$

$$2\sin^2 2x+\sin 2x-1=0.$$

Ставајќи $y=\sin 2x$ добиваме квадратна равенка по y чии решенија се $y_1=-1$, $y_2=\frac{1}{2}$. Решенија на равенката $\sin 2x=-1$ во интервалот $[0,\pi]$ се $x=\frac{3\pi}{4}$ и $x=\frac{\pi}{12}$, а на равенката $\sin 2x=\frac{1}{2}$ е $x=\frac{5\pi}{12}$. Останува да се провери дали за овие вредности е исполнето неравенството (2), т.е. $\frac{1}{\sin x}\geq\frac{1}{\cos x}$.

Бидејќи на интервалот $[0,\pi]$, $\sin x\geq 0$, неравенството (2) е секогаш исполнето за $\cos x<0$, т.е. за сите $x\in(\frac{\pi}{2},\pi]$. Ако $\cos x>0$, тогаш неравенството се трансформира во $\cos x\geq\sin x$, кое е исполнето за сите $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$.

Конечно, решенија на почетната равенка се решенијата на (1) кои лежат во

$$(0,\tfrac{\pi}{4}]\cup(\tfrac{\pi}{2},\pi], \text{ т.е. } x=\tfrac{3\pi}{4} \text{ и } x=\tfrac{\pi}{12}.$$

18. Да се реши тригонометриската равенка

$$\sin(\tfrac{\pi}{10}+\tfrac{3x}{2})=2\sin(\tfrac{3\pi}{10}-\tfrac{x}{2}).$$

Решение. Запишувајќи ја дадената равенка во обликот

$$\sin(\tfrac{\pi}{10}+\tfrac{3x}{2})-\sin(\tfrac{3\pi}{10}-\tfrac{x}{2})=\sin(\tfrac{3\pi}{10}-\tfrac{x}{2})$$

и користејќи ја формулата за разлика на синуси се добива

$$2\cos(\tfrac{x}{2}-\tfrac{\pi}{5})\sin(x-\tfrac{\pi}{10})=\sin(\tfrac{3\pi}{10}-\tfrac{x}{2}).$$

Користејќи ја тригонометриската врска $\cos\alpha=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ равенката ја трансформираме во

$$2\sin(\tfrac{3\pi}{10}-\tfrac{x}{2})\sin(x-\tfrac{\pi}{10})=\sin(\tfrac{3\pi}{10}-\tfrac{x}{2}), \text{ т.е. } \sin(\tfrac{3\pi}{10}-\tfrac{x}{2})[2\sin(x-\tfrac{\pi}{10})-1]=0.$$

Од последната равенка, следува

$$\sin(\tfrac{3\pi}{10}-\tfrac{x}{2})=0 \text{ или } \sin(x-\tfrac{\pi}{10})=\tfrac{1}{2}.$$

Од првата равенка се добива

$$\tfrac{3\pi}{10}-\tfrac{x}{2}=k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

а од втората

$$x-\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{6}+2k\pi\,,\ x-\frac{\pi}{10}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$$

Значи решенијата на дадената равенка се:

$$x=\frac{3+10k}{5}\pi\,,\quad x=\frac{4+30k}{4}\pi\,,\ x=\frac{14+30k}{15}\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\,.$$

19. Да се реши системот равенки:

$$\begin{cases}\sin x\cos y=-\frac{1}{2}\\ \cos x\sin y=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Решение. Со собирање на двете равенки и одземање на првата од втората равенка, добиваме

$$\begin{cases}\sin(x+y)=0\\ \sin(y-x)=1.\end{cases}$$

Тогаш: $x+y=n\pi$, $y-x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, од каде што следува дека:

$$x=\pi(\frac{n}{2}-k-\frac{1}{4})\,,\ y=\pi(\frac{n}{2}+k+\frac{1}{4})\,,\ n,k\in\mathbb{Z}\,.$$

20. За кои реални броеви x и y важи равенството

$$4x^2+12x\sin(xy)+9=0?$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}4x^2+12x\sin(xy)+9&=4x^2+12x\sin(xy)+9\sin^2(xy)+9\cos^2(xy)\\ &=(2x+3\sin(xy))^2+9\cos^2(xy)\end{aligned}$$

па дадената равенка ја запишуваме во обликот

$$(2x+3\sin(xy))^2+9\cos^2(xy)=0\,.$$

Од последната равенка следува дека

$$2x+3\sin(xy)=0 \quad \text{и} \quad \cos(xy)=0$$

Од втората равенка добиваме:

$$xy=\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\,,$$

Па заменувајќи во првата равенка ќе имаме $x_1=-\frac{3}{2}$, $x_2=\frac{3}{2}$ и соодветно

$$y_1=-\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\,,\ y_1=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\,,\ k\in\mathbb{Z}\,.$$

21. Да се најдат оние $x\in[0,2\pi]$, кои што ја задоволуваат неравенката

$$2\cos x\le|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\,|$$

Решение. Да забележиме прво дека неравенката е осмислена за секоја вредност на x.

Ако $\cos x<0$, левата страна на неравенката е негативна, а десната е ненегативна, па значи неравенката е задоволена за сите x за кои што $\cos x<0$, т.е. за сите $x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$.

Нека $\cos x \geq 0$, т.е. $x \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$. Во тој случај и двете страни на неравенката се негативни, па по квадрирањето насоката на неравенството се менува, и добиваме

$$4\cos^2 x \leq 2 - 2\sqrt{\cos^2 2x}$$

$$2\cos^2 2x \leq 1 - |\cos 2x|$$

$$|\cos 2x| \leq -\cos 2x$$

Последната неравенка е очигледно задоволена за сите x за кои што $\cos 2x \leq 0$, па водејќи сметка дека $x \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, добиваме дека $x \in x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}]$.

Заедно со другите решенија (кога $\cos x < 0$), добиваме дека $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$.

22. Да се реши неравенката

$$\operatorname{tg}^2 x_1 + \operatorname{tg}^2 x_2 + ... + \operatorname{tg}^2 x_{997} + \operatorname{ctg}^2 x_1 + \operatorname{ctg}^2 x_2 + ... + \operatorname{ctg}^2 x_{997} \leq 1994$$

Решение. Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката:

$$(\operatorname{tg} x_1 - \operatorname{ctg} x_1)^2 + (\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{ctg} x_2)^2 + ... + (\operatorname{tg} x_{997} - \operatorname{ctg} x_{997})^2 \leq 0,$$

од каде добиваме дека за секој $i \in \{1, 2, ..., 997\}$ важи:

$$\operatorname{tg} x_i - \operatorname{ctg} x_i = 0 \text{ односно } \operatorname{tg} x_i = \operatorname{ctg} x_i .$$

Од последната равенка добиваме дека за $i \in \{1, 2, ..., 997\}$ важи:

$$x_i \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{3\pi}{4} + m\pi \,|\, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

За ваквите вредности на x_i, всушност во неравенката важи равенство.

23. Нека $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ е функција така што за $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ важи

$$2f(\sin x) + 3f(\cos x) = \sin x . \tag{1}$$

а) да се определи $f(0)$,

б) да се определи функцијата f.

Решение. а) Ако во (1) замениме за $x = 0$ и за $x = \frac{\pi}{2}$, го добиваме системот линеарни равенки

$$\begin{cases} 2f(0) + 3f(1) = 0 \\ 2f(1) + 3f(0) = 1 \end{cases},$$

по чие решавање се добива $f(0) = \frac{3}{5}$.

б) Ако ја воведеме смената $t = \frac{\pi}{2} - x$, од (1), добиваме дека за $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ важи $2f(\cos t) + 3f(\sin t) = \cos t$, односно за $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ важи

$$2f(\cos x) + 3f(\sin x) = \cos x . \tag{2}$$

Решавајќи го системот равенки (1) и (2) по непознати $f(\sin x)$ и $f(\cos x)$, добиваме

$$f(\sin x) = \frac{1}{5}(3\cos x - 2\sin x) .$$

Конечно, ставајќи $\sin x = y$, добиваме дека за $y \in [0,1]$ важи

$$f(y)=\tfrac{3}{5}\sqrt{1-y^2}-\tfrac{2}{5}y\,.$$

Лесно се проверува дека добиената функција го задоволува равенството (1).

24. Во множеството на целите броеви решете ја равенката

$$\operatorname{arctg}\tfrac{1}{x}+\operatorname{arctg}\tfrac{1}{y}=\operatorname{arctg}\tfrac{1}{10}\,.$$

Решение. Ако користиме дека $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ и $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\alpha)=\alpha$, за секое $\alpha\in(-\infty,+\infty)$, $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\neq 1$, добиваме дека дадената равенка е еквивалентна по ред со равенките

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\tfrac{1}{x}+\operatorname{arctg}\tfrac{1}{y})=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\tfrac{1}{10})\,,$$

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{1-\frac{1}{x}\frac{1}{y}}=\frac{1}{10}\,,$$

$$(x-10)(y-10)=101\,.$$

Бидејќи 101 е прост број од последната равенка ги добиваме системите

$$\begin{cases}x-10=1\\ y-10=101\end{cases},\qquad \begin{cases}x-10=-1\\ y-10=-101\end{cases},\qquad \begin{cases}x-10=101\\ y-10=1\end{cases},\qquad \begin{cases}x-10=-101\\ y-10=-1\end{cases},$$

чии решенија се подредените парови $(11,111),\ (9,-91),\ (111,11),\ (-91,9)$, соодветно.

Конечно, решение е секој подреден пар

$$(x,y)\in\{(11,111),\ (9,-91),\ (111,11),\ (-91,9)\}\,.$$

25. Реши ја равенката $\sin 2x=\sqrt{2}\sin^2 x+(2-\sqrt{2})\cos^2 x$.

Решение. Ако $\cos x=0$, тогаш $\sin^2 x=1, \sin 2x=2\sin x\cos x=0$, па равенката нема решение. Дадената равенка ја делиме со $\cos^2 x$ и добиваме

$$\sqrt{2}\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}x+2-\sqrt{2}=0\,,$$

$$(\operatorname{tg}x-1)(\sqrt{2}\operatorname{tg}x+\sqrt{2}-2)=0$$

Значи $\operatorname{tg}x=1$ или $\operatorname{tg}x=\sqrt{2}-1$. Решенија на овие две равенки се:

$$x_1=\tfrac{\pi}{4}+k\pi\,,\ x_2=\tfrac{\pi}{8}+m\pi\,,\ (k,m\in\mathbb{Z}).$$

26. Да се реши неравенката

$$\frac{1-\sin x}{1-2\sin x}<\frac{1+\sin x}{1-4\sin^2 x}.$$

Решение. Очигледно $x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Имаме

$$\frac{1-\sin x}{1-2\sin x}-\frac{1+\sin x}{1-4\sin^2 x}<0\ \Leftrightarrow\ \frac{1+2\sin x-\sin x-2\sin^2 x-1-\sin x}{1-4\sin^2 x}<0\ \Leftrightarrow\ \frac{-2\sin^2 x}{1-4\sin^2 x}<0\,.$$

Понатаму, од $-2\sin^2 x\leq 0$ следува

$$1-4\sin^2 x>0\ \text{ т.е. }\ \tfrac{1}{4}>\sin^2 x$$

што значи $|\sin x|<\frac{1}{2}$. Конечно, решенијата на дадената неравенка се дадени со

$$(-\tfrac{\pi}{6}+2k\pi,\tfrac{\pi}{6}+2k\pi)\setminus\{2k\pi\},\quad k\in\mathbb{Z}\quad \text{и}$$
$$(\tfrac{5\pi}{6}+2k\pi,\tfrac{7\pi}{6}+2k\pi)\setminus\{(2k+1)\pi\},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

27. Реши ја равенката
$$\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=\tfrac{1}{16}.$$

Решение. Равенката можеме да ја запишеме во облик
$$16\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=1$$
Ако последната равенка ја помножиме со $\sin x$, добиваме
$$(2\cos x\sin x)(2\cos 2x)(2\cos 4x)(2\cos 8x)=\sin x,$$
и ако го искористиме идентитетот $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, добиваме
$$(2\sin 2x\cos 2x)(2\cos 4x)(2\cos 8x)=\sin x,$$
$$(2\sin 4x\cos 4x)(2\cos 8x)=\sin x,$$
$$2\sin 8x\cos 8x=\sin x,$$
$$\sin 16x=\sin x.$$
Ако го искористиме идентитетот $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, за равенката $\sin 16x-\sin x=0$, добиваме $2\sin\frac{15x}{2}\cos\frac{17x}{2}=0$. Равенката $\sin\frac{15x}{2}=0$ има решенија $x=\frac{2k\pi}{15}$, $k\in\mathbb{Z}$. Равенката $\cos\frac{17x}{2}=0$ има решенија $x=\frac{\pi+2k\pi}{17}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Решенија на равенката се $x=\frac{2k\pi}{15}$, $k\in\mathbb{Z}$ и $x=\frac{\pi+2k\pi}{17}$, $k\in\mathbb{Z}$, каде $k\neq 15s$ и $2k+1\neq 17s$, $s\in\mathbb{Z}$.

28. Да се реши системот равенки
$$\begin{cases} xy=1 \\ x+y+\cos^2 z=2 \end{cases}.$$

Решение. Од првата равенка добиваме дека реалните броеви x и y се со ист знак. Бидејќи $0\le\cos^2 z\le 1$ за било кој реален број z, добиваме дека
$$x+y=2-\cos^2 z\ge 1\ .$$
Бидејќи x и y се со ист знак, добиваме дека тие се позитивни.

Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина за позитивни реални броеви x и y за кои е исполнето $xy=1$, имаме $x+y\ge 2\sqrt{xy}=2$.

Од друга страна $x+y=2-\cos^2 z\le 2$, па според тоа $x+y=2$. Сега го добиваме системот
$$\begin{cases} xy=1 \\ x+y=2 \end{cases}.$$
Не е тешко да се провери дека единствено решение на системот кое е позитивно е $x=y=1$.

Тогаш од втората равенка на почетниот систем добиваме $\cos^2 z=0$, чии решенија се $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$. Конечно решенија на системот се $\{(1,1,\frac{\pi}{2}+k\pi)\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$.

29. Реши ја равенката

$$2^{|x|}-\cos y+\lg(1+x^2+|y|)=0\,.$$

Решение. Равенката ќе ја запишеме во обликот

$$2^{|x|}+\lg(1+x^2+|y|)=\cos y\,.$$

За произволни $x, y \in \mathbb{R}$, имаме $|x| \geq 0$ и $1+x^2+|y| \geq 1$, од каде добиваме дека неравенствата $2^{|x|} \geq 1$, $\lg(1+x^2+|y|) \geq 0$, $\cos y \leq 1$ се точни. Според тоа

$$\cos y \leq 1 \leq 2^{|x|}+\lg(1+x^2+|y|)\ . \tag{1}$$

Равенство е можно ако и само ако почениот и крајниот израз во (1) се еднакви на единица, т.е. $\cos y=1$ и $2^{|x|}+\lg(1+x^2+|y|)=1$. Од равенката $\cos y=1$, добиваме дека решенија се $y=0+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Од неравенството $2^{|x|} \geq 1$ во множеството реални броеви, за равенката

$$2^{|x|}+\lg(1+x^2+|y|)=1$$

добиваме

$$2^{|x|}=1, \tag{2}$$

$$\lg(1+x^2+|y|)=0\,. \tag{3}$$

Решение на (2) е $|x|=0$, односно $x=0$, а решение на (3) кога $x=0$ е $1+|y|=1$, односно $y=0$.

Конечно добиваме дека единствено решение на почетната равенка е $x=y=0$.

30. Реши ја равенката

$$\sqrt{1+3\sin^3 x}=3-\sqrt{1-\cos^4 x}\,.$$

Решение. Равенката ќе ја запишеме во облик

$$\sqrt{1+3\sin^3 x}+\sqrt{1-\cos^4 x}=3\,.$$

Може да ги направиме следниве оценки: $\sin x \leq 1$, односно $\sin^3 x \leq 1$, од каде $1+3\sin^3 x \leq 4$ и $\cos x \geq 0$, односно $-\cos^4 x \leq 0$, од каде $1-\cos^4 x \leq 1$. Тогаш за левата страна на равенката важи

$$\sqrt{1+3\sin^3 x}+\sqrt{1-\cos^4 x} \leq \sqrt{4}+\sqrt{1}=3\,.$$

Равенството важи ако и само ако истовремено

$$1+3\sin^3 x=4 \text{ и } 1-\cos^4 x=1,$$

односно $\sin x=1$ и $\cos x=0$ што е точно за $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, за $k\in\mathbb{Z}$.

31. Во множеството реални броеви, реши ја равенката

$$\frac{a\sin x+b}{b\cos x+a}=\frac{a\cos x+b}{b\sin x+a}\ ,\ a,b\in\mathbb{R} \text{ и } a,b>0\,.$$

Решение. Од равенката следува дека $b\cos x+a\neq 0$ и $b\sin x+a\neq 0$, па множејќи ја равенката со $(b\cos x+a)(b\sin x+a)$ ја добиваме равенката

$$(a\sin x+b)(b\sin x+a)=(a\cos x+b)(b\cos x+a)$$

која е еквивалентна на почетната.

Со множење и соодветно групирање, ја добиваме равенката

$$(\sin x-\cos x)(a^2+b^2+ab(\sin x+\cos x))=0\,.$$

Значи $\sin x-\cos x=0$ или $a^2+b^2+ab(\sin x+\cos x)=0$.

Од $\sin x-\cos x=0$ добиваме дека $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ се решенија на почетната равенка.

Од

$$a^2+b^2+ab(\sin x+\cos x)=0 \text{ и } ab>0$$

добиваме дека

$$\sin x+\cos x=-\frac{a^2+b^2}{ab}$$

Користејќи дека

$$a^2+b^2\geq 2ab$$

добиваме

$$\sin x+\cos x=-\frac{a^2+b^2}{ab}\leq-\frac{2ab}{ab}=-2\,.$$

Множејќи го ова неравенство со $\frac{\sqrt{2}}{2}$ добиваме

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=-2\frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

т.е.

$$\sin(\tfrac{\pi}{4}+x)=-\sqrt{2}\,,$$

што не е можно.

Значи равенката

$$a^2+b^2+ab(\sin x+\cos x)=0$$

нема решение.

Според тоа, сите решенија на почетната равенка се елементите на множеството $\{\frac{\pi}{4}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$.

32. Во множеството реални броеви реши ја равенката $x^2+6x\cos(xy)+9=0$.

Решение. *Прв начин.* Равенката ја трансформираме во облик

$$(x+3\cos(xy))^2+(3\sin(xy))^2=0\,.$$

Истото е можно само ако

$$x+3\cos(xy)=0,\ \ \sin(xy)=0\,.$$

Од основното тригонометриско равенство

$$\sin^2(xy)+\cos^2(xy)=1\,,$$

последните две равенства се еквивалентни со системот

$$\begin{cases} x+3\cos(xy)=0\\ \cos(xy)=\pm 1\end{cases}.$$

Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. $\cos(xy)=1$. Тогаш од првата равенка добиваме $x+3=0$, односно $x=-3$. Според тоа,

$$\cos(-3y)=1$$
$$\cos(3y)=1.$$

Решенија на последната равенка се $3y=2k\pi$, од каде добиваме $y=\frac{2k\pi}{3}$. Значи, решенија во овој случај се $\{(-3,\frac{2k\pi}{3})\mid k\in\mathbb{Z}\}$.

Случај 2. $\cos(xy)=-1$. Тогаш од првата равенка добиваме $x-3=0$, односно $x=3$. Според тоа, $\cos(3y)=-1$. Решенија на оваа равенка се $3y=(2k+1)\pi$, од каде добиваме $y=\frac{(2k+1)\pi}{3}$. Значи, решенија во овој случај се $\{(3,\frac{(2k+1)\pi}{3})\mid k\in\mathbb{Z}\}$.

Конечно, решенија на равенката се

$$\{(3,\frac{(2k+1)\pi}{3})\mid k\in\mathbb{Z}\}\cup\{(-3,\frac{2k\pi}{3})\mid k\in\mathbb{Z}\}.$$

Втор начин. Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме $x^2+9\geq 2\sqrt{9x^2}=6|x|$. Јасно е дека $x=0$ не е решение на дадената равенка.

Според тоа равенката можеме да ја запишеме во облик $\cos(xy)=-\frac{x^2+9}{6x}$.

Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. $x>0$. Тогаш,

$$\frac{x^2+9}{6x}\geq\frac{6|x|}{6x}=\frac{6x}{6x}=1,\ \cos(xy)=-\frac{x^2+9}{6x}\leq -1.$$

Равенство се достигнува ако и само ако $x^2=9$, т.е. $x=3$. Но тогаш, равенката го добива обликот $\cos(3y)=-1$, а нејзини решенија се

$$3y=\pi+2k\pi=(2k+1)\pi,\text{ т.е. } y=\frac{2k+1}{3}\pi.$$

Случај 2. $x<0$. Тогаш

$$\frac{x^2+9}{6x}\leq\frac{6|x|}{6x}=-\frac{6x}{6x}=-1,\ \cos(xy)=-\frac{x^2+9}{6x}\geq 1.$$

Равенство се добива ако и само ако $x^2=9$, односно $x=-3$. Но тогаш $\cos(-3y)=1$, односно $\cos(3y)=1$. Решенија на последната равенка се

$$3y=2k\pi,\text{ т.е. } y=\frac{2k}{3}\pi.$$

Значи, решенија на равенката се

$$\{(3,\frac{(2k+1)\pi}{3})\mid k\in\mathbb{Z}\}\cup\{(-3,\frac{2k\pi}{3})\mid k\in\mathbb{Z}\}.$$

33. Да се најдат сите агли α за кои множествата

$$\{\sin\alpha,\sin 2\alpha,\sin 3\alpha\},\ \{\cos\alpha,\cos 2\alpha,\cos 3\alpha\}$$

се совпаѓаат, т.е. се еднакви.

Решение. Ако двете множества се совпаѓаат, тогаш

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha.$$

Користејќи ги равенствата

$$\sin\alpha+\sin 3\alpha=2\sin\frac{4\alpha}{2}\cos\frac{-2\alpha}{2}=2\sin 2\alpha\cos\alpha$$

$$\cos\alpha+\cos 3\alpha=2\cos\frac{4\alpha}{2}\cos\frac{-2\alpha}{2}=2\cos 2\alpha\cos\alpha$$

добиваме

$$\sin 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos\alpha = \cos 2\alpha + 2\cos 2\alpha \cos\alpha$$
$$\sin 2\alpha(1+2\cos\alpha) = \cos 2\alpha(1+\cos\alpha)$$

Од последното равенство гледаме дека се можни два случаи.

Случај 1. $1+\cos\alpha = 0$. Во овој случај $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, од каде добиваме

$$\alpha = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi .$$

За добиените вредности на α важи $\sin 3\alpha = 0$ но $0 \notin \{\cos\alpha, \cos 2\alpha, \cos 3\alpha\}$.

Случај 2. $\sin 2\alpha = \cos 2\alpha$. Во овој случај $\operatorname{tg} 2\alpha = 1$, па $\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$. Не е тешко да се види дека за вака определените вредности за α е исполнето $\cos 3\alpha = \sin\alpha$ и $\sin 3\alpha = \cos\alpha$.

Значи, бараното множество вредности за α е $\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

3. РЕШАВАЊЕ НА ТРИАГОЛНИК И ЧЕТИРИАГОЛНИК

1. За аглите α, β, γ на $\triangle ABC$ важи

$$\cos\gamma = 2\sin\alpha \sin\beta - 1 .$$

Докажи, дека $\triangle ABC$ е рамнокрак.

Решение. Бидејќи $\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta)$, добиваме $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$. Значи, за $\triangle ABC$ важи

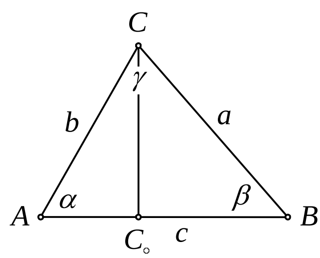
$$\cos(\alpha+\beta) + 2\sin\alpha \sin\beta = 1$$
$$\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta + 2\sin\alpha \sin\beta = 1$$
$$\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta = 1$$
$$\cos(\alpha-\beta) = 1.$$

Последното равенство е исполнето ако и само ако $\alpha - \beta = 360^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z}$ и како α и β се агли на триаголник мора да важи $k = 0$, т.е. $\alpha = \beta$. Според тоа, $\triangle ABC$ е рамнокрак.

2. За должините на страните a, b и c и аглите α, β и γ во еден триаголник е исполнето равенството

$$3a = b - a . \qquad (1)$$

Определи барем еден негов агол.



Решение. Нека ABC е триаголник со страни $\overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c$, агли $\measuredangle A = \alpha, \measuredangle B = \beta, \measuredangle C = \gamma$ и $C_\circ$ е подножје на висината спуштена од темето C кон AB. Од правоаголните триаголници $AC_\circ C$ и $CC_\circ B$ имаме

$$\overline{AC_\circ} = b\cos\alpha, \ \overline{BC_\circ} = a\cos\beta$$

Според тоа,

$$c=\overline{AC_{\circ}}+\overline{BC_{\circ}}=b\cos\alpha+a\cos\beta\,.$$

Сега, равенството (1) можеме да го запишеме во облик

$$ab\cos\gamma+c(b\cos\alpha+a\cos\beta)=c^2$$

$$ab\cos\gamma+c^2=c^2$$

$$ab\cos\gamma=0\,.$$

Бидејќи $a,b>0$, последното равенство е еквивалентно со $\cos\gamma=0$, и бидејќи $0<\gamma<\pi$, добиваме $\gamma=90^\circ$.

Значи, ако во траиголникот важи (1), тогаш тој е правоаголен.

3. Докажи дека еден триаголник ABC е рамнокрак, ако и само ако

$$\sin\measuredangle A+\cos\measuredangle A=\sin\measuredangle B+\cos\measuredangle B\,. \qquad (*)$$

Решение. Нека $\measuredangle A$ и $\measuredangle B$ се два остри агли во триаголник ABC кои се еднакви меѓу себе $\measuredangle A=\measuredangle B$. Тогаш јасно е дека

$$\sin\measuredangle A=\sin\measuredangle B$$

$$\cos\measuredangle A=\cos\measuredangle B$$

Сега јасно е дека (*) е исполнето.

Обратно, нека ABC е триаголник во кој што е исполнето (*). Тогаш

$$\sin\measuredangle A-\sin\measuredangle B=\cos\measuredangle B-\cos\measuredangle A,$$

од каде што го добиваме равенството

$$2\sin\tfrac{\measuredangle A-\measuredangle B}{2}[\cos\tfrac{\measuredangle A+\measuredangle B}{2}+\sin\tfrac{\measuredangle A+\measuredangle B}{2}]=0\,.$$

Бидејќи $0<\measuredangle A+\measuredangle B<180^\circ$, т.е. $0<\frac{\measuredangle A+\measuredangle B}{2}<90^\circ$, имаме

$$0<\cos\tfrac{\measuredangle A+\measuredangle B}{2},\ \sin\tfrac{\measuredangle A+\measuredangle B}{2}<1$$

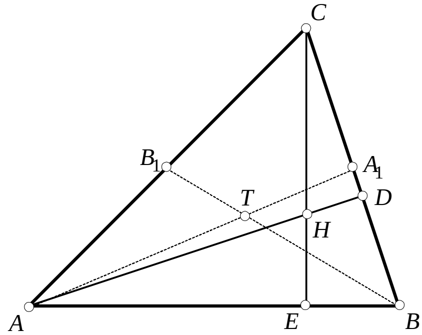
и последното равенство е можно ако и само ако

$$\sin\tfrac{\measuredangle A-\measuredangle B}{2}=0\,.$$

Од тоа што $|\measuredangle A-\measuredangle B|<90^\circ$, од последното равенство имаме $\measuredangle A-\measuredangle B=0$, т.е. $\measuredangle A=\measuredangle B$.

4. Докажи дека, отсечката што ги сврзува ортоцентарот и тежиштето на остроаголниот триаголник ABC е паралелна со страната AB ако и само ако

$$\operatorname{tg}\measuredangle A\cdot\operatorname{tg}\measuredangle B=3\,.$$



Решение. Нека H е ортоцентар, а T е тежиштето на остроаголниот триаголник ABC. Нека подножјата на висините спуштени од A и C кон спротивните страни се D и E (види цртеж).

Да забележиме дека H припаѓа на линијата (правата) паралелна со AB, а која минува низ тежиштето на триаголникот, ако и само ако

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{HE}} = 3 .$$

Според тоа, доволно е да се докаже дека

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{HE}} = \operatorname{tg}\measuredangle A \cdot \operatorname{tg}\measuredangle B .$$

Бидејќи

$$\measuredangle EAH = \measuredangle DHC \text{ и } \measuredangle E = \measuredangle D = 90^\circ ,$$

добиваме

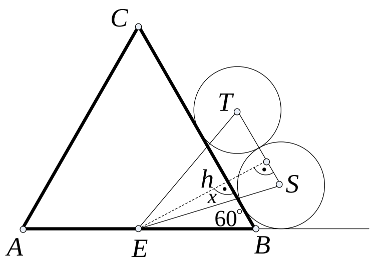
$$\measuredangle DAB = \measuredangle ECB .$$

Според тоа, $\triangle BDA \cong \triangle BEC$, а исто така $\triangle HEA \cong \triangle BEC$. Сега, $\operatorname{tg}\measuredangle B = \frac{\overline{CE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{HE}}$ и исто така $\operatorname{tg}\measuredangle A = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$, од каде добиваме

$$\operatorname{tg}\measuredangle A \cdot \operatorname{tg}\measuredangle B = \frac{\overline{AE}}{\overline{HE}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{HE}} .$$

5. Даден е рамностран триаголник ABC со страна 12 cm. Две кружници со ист радиус еднаков на $\sqrt{3}$ cm ја допираат страната BC од надворешната страна на триаголникот, се допираат меѓу себе и едната кружница ја допира правата AB. Да се најде плоштината на триаголникот чии темиња се центрите на кружинците и средината на страната AB.

Решение. Нека S и T се центрите на кружниците и нека E е средината на страната AB (види цртеж). Тогаш, имаме $\overline{ST} = 2\sqrt{3}$, $x = \overline{EB}\sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$, $h = x + \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.



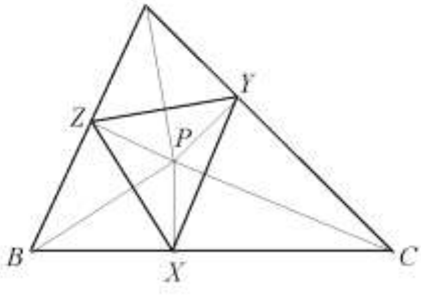
Според тоа, плоштината P на триаголникот EST ќе биде:

$$P = \frac{2\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}}{2} = 12 .$$

6. Нека P е точка во внатрешноста на триаголникот ABC таква што $\measuredangle BPA - \measuredangle BCA = \measuredangle APC - \measuredangle ABC$. Точките D и E се центри на кружниците впишани во триаголниците APB и APC, соодветно. Докажи дека правите AP, BD и CE се сечат во иста точка.

Решение. Нека подножјата на нормалите спуштени од точката P до BC, CA и AB се X, Y и Z, соодветно (цртеж десно). Со испитување на трите тетивни четириаголници $AZPY$, $BXPZ$ и $CYPX$ заклучуваме дека

1) $\overline{YZ} = \overline{PA}\sin A$, и
2) $\measuredangle YXP = \measuredangle BPC - \measuredangle A$.



Нека $BD \cap AP = \{Q\}$ и $CE \cap AP = \{R\}$. Бидејќи BD и CE се симетрали на аглите $\measuredangle ABP$ и $\measuredangle ACP$ соодветно, добиваме $\frac{\overline{AQ}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}}$ и $\frac{\overline{AR}}{\overline{RC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CP}}$. Затоа за да докажеме дека Q и R се совпаѓаат, доволно е да докажеме дека $\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}}$. Сега од 1) добиваме

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CP} = \overline{AC} \cdot \overline{BP} \Leftrightarrow \overline{CP}\sin C = \overline{BP}\sin B \Leftrightarrow \overline{XY} = \overline{XZ}.$$

Бидејќи $\measuredangle APB - \measuredangle C = \measuredangle APC - \measuredangle B$ од 2) добиваме дека $\angle XZY = \angle XYZ$, па затоа $\overline{XY} = \overline{XZ}$, а тоа повлекува $\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}}$.

7. Да се најдат тангенсите од аглите во еден триаголник, ако тие се цели броеви.

Решение. Нека α, β и γ се аглите во триаголникот, за кои без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\alpha < \beta < \gamma$. Но тогаш $\alpha \in (0, \frac{\pi}{3}]$, па според тоа $\operatorname{tg}\alpha \in (0, \sqrt{3}]$. Бидејќи $\operatorname{tg}\alpha$ е цел број, добиваме дека $\operatorname{tg}\alpha = 1$. Тогаш

$$-1 = -\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \operatorname{tg}(\beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}.$$

Од последното равенство имаме

$$\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = 1 - \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma,$$

кое може да се запише во облик

$$(\operatorname{tg}\beta - 1)(\operatorname{tg}\gamma - 1) = 2.$$

Сега е очигледно дека $\operatorname{tg}\beta - 1 = 1$ и $\operatorname{tg}\gamma - 1 = 2$. Значи, бараните тангенси се

$$\operatorname{tg}\alpha = 1,\ \operatorname{tg}\beta = 2 \text{ и } \operatorname{tg}\gamma = 3.$$

8. Нека a, b, c се должините на страните на триаголникот ABC, а h_a, h_b, h_c се должините на соодветните висини. Ако $a + h_a = b + h_b = c + h_c$ тогаш триаголникот ABC е рамностран. Докажи!

Решение. Да претпоставиме дека триаголникот ABC не е рамностран, односно нека $a \neq b$.

Од $h_a = b\sin\gamma$ и $h_b = a\sin\gamma$ имаме

$$a + b\sin\gamma = b + a\sin\gamma,$$

односно

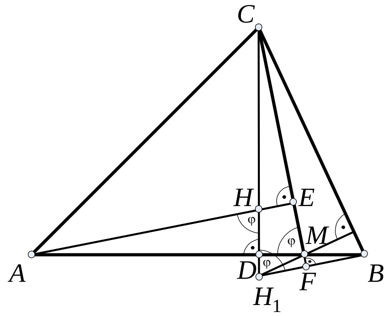
$$(a - b)(1 - \sin\gamma) = 0.$$

Тогаш, $1 - \sin\gamma = 0$ и оттука $\gamma = 90^\circ$. Значи, c е хипотенуза и затоа $a \neq c$. Тогаш, $(a - c)(1 - \sin\beta) = 0$, односно $\beta = 90^\circ$, а со тоа добиваме контрадикција. Аналогно се разгледуваат и другите случаи ($b \neq c$, $a \neq c$)

9. Нека M е точка од страната AB на триаголникот ABC. Изрази го растојанието меѓу ортоцентрите на триаголниците AMC и BMC преку $\overline{AB} = c$ и $\measuredangle CMA = \varphi$.

Решение. Нека H и H_1 се ортоцентрите на триаголниците AMC и BMC, соодветно (цртеж десно).

Од сличноста на правоаголните триаголници ADH и AEM, следува дека
$$\measuredangle AHD = \measuredangle AME = \varphi .$$
Затоа
$$\overline{HD} = \overline{AD} \cdot \operatorname{ctg}\varphi .$$
Од сличноста на правоаголните триаголници BFM и BDH_1, следува дека $\measuredangle BH_1D = \varphi$, односно $\overline{DH_1} = \overline{DB} \cdot \operatorname{ctg}\varphi$. Значи:
$$\overline{HH_1} = \overline{HD} + \overline{DH_1} = (\overline{AD} + \overline{DB})\operatorname{ctg}\varphi = c \cdot \operatorname{ctg}\varphi .$$



10. Да се покаже дека за секој триаголник ABC важи равенството
$$\frac{a^2\sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha} + \frac{b^2\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\beta} + \frac{c^2\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma} = 0$$

Решение. Од $a^2 = 4R^2\sin^2\alpha$, $b^2 = 4R^2\sin^2\beta$ и $c^2 = 4R^2\sin^2\gamma$, каде што R е радиусот на опишаната кружница, доволно е да се покаже дека
$$\sin\alpha\sin(\beta-\gamma) + \sin\beta\sin(\gamma-\alpha) + \sin\gamma\sin(\alpha-\beta) = 0 . \qquad (1)$$
Но,
$$\sin\alpha\sin(\beta-\gamma) = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta+\gamma) - \cos(\alpha+\beta-\gamma)]$$
$$\sin\beta\sin(\gamma-\alpha) = \tfrac{1}{2}[\cos(\beta-\gamma+\alpha) - \cos(\beta+\gamma-\alpha)]$$
$$\sin\gamma\sin(\alpha-\beta) = \tfrac{1}{2}[\cos(\gamma-\alpha+\beta) - \cos(\gamma+\alpha-\beta)]$$
па со собирање на овие три равенства се добива равенството (1).

11. Најдете го аголот α на триаголникот ABC, ако за неговите агли α, β, γ важи равенството $\sin\alpha = \frac{\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\beta+\cos\gamma}$.

Решение. Бидејќи α, β, γ се агли на триаголник, од $\sin\alpha = \frac{\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\beta+\cos\gamma}$ добиваме $\cos\beta + \cos\gamma \neq 0$, $\cos\frac{\beta-\gamma}{2} \neq 0$, $\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ па затоа
$$\sin\alpha = \frac{\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\beta+\cos\gamma} = \frac{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}} \text{, т/е/ } 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha}{2} .$$
Од последното равенство следува $\cos\frac{\alpha}{2} = 0$, т.е. $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$, што не е можно, или $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}$, односно $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

12. Ако $\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{3}$, тогаш x не може да биде агол во триаголник. Докажи!

Решение. Од равенката директно следува дека $\frac{x}{2} = \frac{x}{3} + 2k\pi$ и $\frac{x}{2} = -\frac{x}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Бидејќи x е агол во триаголник, следува дека $k \geq 1$. Но во тој случај $x = 12k\pi > \pi$ и $x = \frac{12k\pi}{5} > \pi$, од каде следува дека x не може да биде агол во триаголник.

13. Нека α,β,γ се агли на триаголник за кои е исполнето равенството

$$\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma=1 .$$

Докажи дека еден од нив е тап агол и пресметај го збирот на двата остри агли.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека за аглите се исполнети неравенствата $\alpha\leq\beta\leq\gamma$. Тогаш α и β се остри агли а γ е аголот за кој треба да докажеме дека е тап.

Даденото равенство ќе го запишеме во облик

$$\cos 3\alpha+\cos 3\beta=1-\cos 3\gamma .$$

При тоа,

$$2\cos\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)\cdot\cos\tfrac{3}{2}(\alpha-\beta)=2\sin^2\tfrac{3}{2}\gamma .$$

Бидејќи α,β,γ се агли во триаголник, имаме $\gamma=\pi-\alpha-\beta$. Според тоа

$$\sin\tfrac{3}{2}\gamma=\sin\tfrac{3}{2}(\pi-\alpha-\beta)=\sin[\tfrac{3}{2}\pi-\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)]=-\cos\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)$$

од каде добиваме

$$\cos\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)\cdot\cos\tfrac{3}{2}(\alpha-\beta)=\cos^2\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta) ,$$

$$\cos\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)\cdot[\cos\tfrac{3}{2}(\alpha-\beta)-\cos\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)]=0 ,$$

$$\cos\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)\cdot\sin\tfrac{3\alpha}{2}\cdot\sin\tfrac{3\beta}{2}=0 ,$$

Сега имаме три можности, и тоа

а) $\sin\tfrac{3}{2}\alpha=0$. Бидејќи $0<\alpha<\tfrac{\pi}{2}$, добиваме $0<\tfrac{3}{2}\alpha<\tfrac{3\pi}{4}$, па според тоа $\sin\tfrac{3}{2}\alpha>0$. Значи, овој случај не е можен.

б) $\sin\tfrac{3}{2}\beta=0$. Бидејќи $0<\beta<\tfrac{\pi}{2}$, добиваме $0<\tfrac{3}{2}\beta<\tfrac{3\pi}{4}$, па според тоа $\sin\tfrac{3}{2}\beta>0$. Значи и овој случај не е можен.

в) $\cos\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)=0$. Бидејќи α и β се остри агли во триаголник, добиваме $\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)=\tfrac{\pi}{2}$, од каде добиваме $\alpha+\beta=\tfrac{\pi}{3}$.

Значи, триаголникот е тапоаголен, во кој тапиот агол е $\gamma=120^\circ$ и збирот на острите агли е $\alpha+\beta=60^\circ$.

14. Определи ги аглите на триаголник со страни a,b и c, ако неговата плоштина е

$$P=\tfrac{1}{4}(a^2+b^2) . \qquad (1)$$

Решение. Плоштината на триаголникот ABC во кој должината на неговите страни е $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$ и $\overline{AB}=c$ е еднаква на:

$$P=\tfrac{1}{2}ab\sin\measuredangle C , \qquad (2)$$

каде $\measuredangle C$ е аголот при темето C. Од равенствата (1) и (2) добиваме

$$\tfrac{1}{2}ab\sin\measuredangle C=\tfrac{1}{4}(a^2+b^2)$$

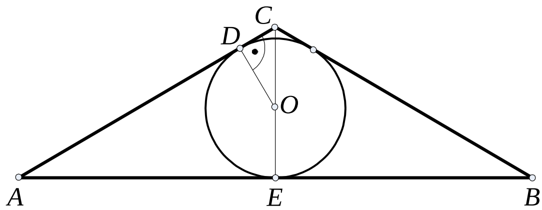
$$\sin\measuredangle C=\tfrac{a^2+b^2}{2ab}=\tfrac{(a-b)^2}{2ab}+1 .$$

Бидејќи $\sin\measuredangle C \le 1$, добиваме $\frac{(a-b)^2}{2ab} \le 0$. Од друга страна, за било кои позитивни реални броеви a,b е исполнето $\frac{(a-b)^2}{2ab} \ge 0$. Заради последните две неравенства, имаме $\frac{(a-b)^2}{2ab} = 0$. Последното равенство е можно ако и само ако $a=b$, т.е. триаголникот е рамнокрак. Но, сега $\sin\measuredangle C = 1$, т.е. $\angle C = 90^\circ$.

Значи, триаголникот е рамнокрак правоаголен и аглите се $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$.

15. Во рамнокрак триаголник со агол 120° впишаната кружница има радиус $5cm$. Определи ги страните на триаголникот.

Решение. Нека O е центарот на впишаната кружница во дадениот триаголник ABC со агол 120° кај темето C. Нека D и E се допирните точки на кружницата со AC и AB соодветно (види цртеж). Во правоаголниот триаголник ODC, $\measuredangle DCO = 60^\circ$.



Од тоа следува дека $\overline{DO} = \overline{CO}\sin 60^\circ$, т.е. $\overline{CO} = \overline{DO}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$. Според тоа,

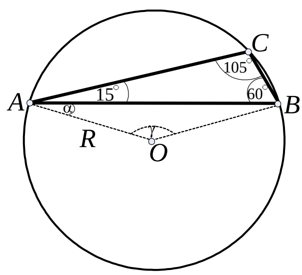
$$\overline{CE} = \overline{CO} + \overline{OE} = \frac{10}{\sqrt{3}} + 5 = \frac{5(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}.$$

Од триаголникот ACE следува дека $\overline{CE} = \overline{AC}\cos 60^\circ$, т.е. $\overline{AC} = \frac{10(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}}\ cm$.

Слично се добива дека $\overline{AE} = \overline{AC}\cos 60^\circ$, т.е. $\overline{AB} = 10(\sqrt{3}+2)\ cm$.

16. Во кружница со радиус R впишан е триаголник со агли 15° и 60°. Да се најде плоштината на триаголникот.

Решение. Од тоа што централниот агол е двапати поголем од перифериските агол над ист лак следува дека аголот γ од цртежот е 150°. Тогаш $\alpha = 15^\circ$.



Од рамнокракиот триаголник ΔAOB следува дека $\overline{AB} = 2R\cos 15^\circ$. Од рамнокракиот триаголник $\triangle AOC$ следува дека $\overline{AC} = 2R\cos 30^\circ = R\sqrt{3}$. Според тоа

$$P = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin 15^\circ}{2} = \frac{2R\cos 15^\circ\cdot R\sqrt{3}\cdot\sin 15^\circ}{2}$$
$$= \frac{R^2\sqrt{3}\sin 30^\circ}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}.$$

17. Нека α, β, γ се аглите во еден триаголник. Докажи дека

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=2\,. \qquad (1)$$

Решение. Бидејќи $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, имаме

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma&=\tfrac{1-\cos2\alpha}{2}+\tfrac{1-\cos2\beta}{2}+\sin^2[\pi-(\alpha+\beta)]\\&=1-\tfrac{1}{2}[\cos2\alpha+\cos2\beta]+\sin^2(\alpha+\beta)\\&=1-\tfrac{1}{2}[\cos2\alpha+\cos2\beta]+1-\cos^2(\alpha+\beta)\\&=2-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)\\&=2-\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]\\&=2-2\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha\cos(-\beta)\\&=2+\cos\gamma\cos\alpha\cos\beta,\end{aligned}$$

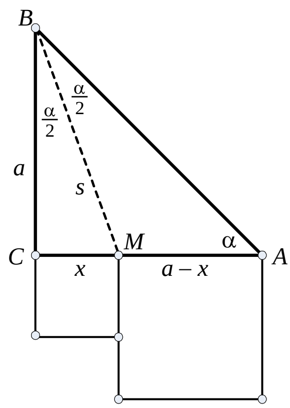
од каде што се добива (1).

18. Во рамнокрак правоаголен триаголник $ABC,$ конструирана е симетралата на остриот агол кај темето $B,$ која што ја сече страната CA во точката M. Над отсечките AM и CM се конструирани квадрати. Докажи дека плоштината на едниот квадрт е двапати поголема од плоштината на другиот.

Решение. Согласно со ознаките од цртежот имаме $P_1=x^2$ и $P_2=(a-x)^2$, каде што P_1 и P_2 се плоштините на соодветните квадрати. Бидејќи

$$\sin\alpha=2\sin\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2}=2\tfrac{x}{s}\tfrac{a}{s}=\tfrac{2ax}{s^2}\,, \qquad (1)$$

$$\sin\alpha=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad (2)$$



од (1) и (2) , добиваме $\frac{2ax}{s^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, т.е.

$$s^2=2\sqrt{2}ax\,. \qquad (3)$$

Од друга страна

$$s^2=a^2+x^2\,. \qquad (4)$$

Равенствата (3) и (4) ја даваат квадратната равенка

$$x^2-2\sqrt{2}ax+a^2=0\,,$$

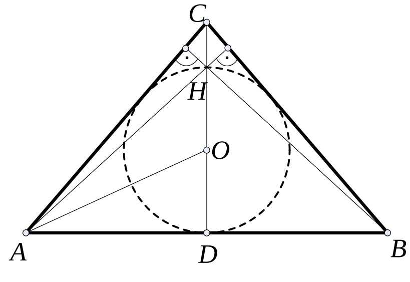
чии решенија се $x_1=a\sqrt{2}+a$ и $x_2=a\sqrt{2}-a$. Бидејќи $a\sqrt{2}+a>a$, предвид доаѓа само второто решение $x_2=a\sqrt{2}-a$. Значи,

$$P_1=(\sqrt{2}-1)^2a^2=(3-2\sqrt{2})a^2$$

$$P_2=(a-x)^2=(a-a\sqrt{2}+a)^2=(2-\sqrt{2})^2a^2=(6-4\sqrt{2})a^2=2(3-2\sqrt{2})a^2=2P_1\,,$$

што и требаше да се докаже.

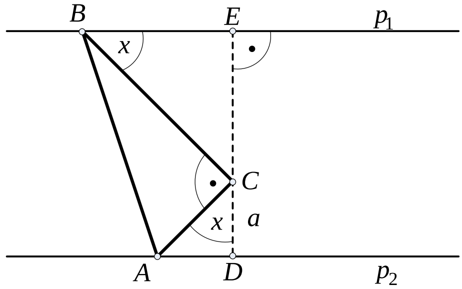
19. Нека ортоцентарот H на рамнокракиот триаголник ABC лежи на впишаната кружница. Да се најде косинусот на аголот α при основата AB на тој триаголник.



Решение. Нека O е центарот на впишаната кружница во рамнокракиот триаголник ABC (види цртеж). Тогаш имаме $\measuredangle OAD = \frac{\alpha}{2}$, $\measuredangle AHD = \alpha$. Од правоаголните триаголници AHD и AOD добиваме $\overline{HD} = \overline{AD}\operatorname{ctg}\alpha$ и $\overline{OD} = \overline{AD}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Бидејќи $\overline{HD} = 2\overline{OD}$, добиваме $\operatorname{ctg}\alpha = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, од каде што, пак, добиваме $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

20. Дадени се две паралелни прави p_1 и p_2 и една точка C меѓу нив. Да се одреди правоаголен триаголник ABC, со прав агол во дадената точка C и другите две темиња A и B кои лежат на правите p_1 и p_2 соодветно, така што неговата плоштина да биде најмала.

Решение. Нека d е растојанието меѓу правите p_1 и p_2 и нека a е растојанието од точката C до правата p_2 (види цртеж). Положбата на триаголникот ABC наполно е определена со аголот x што катетата AC го зафаќа со нормалата ED на правите p_1 и p_2. Бидејќи $\measuredangle CBE = \measuredangle ACD = x$ (како агли со заемно нормални краци), од правоаголните триаголници ACD и CEB, имаме $\overline{AC} = \frac{a}{\cos x}$ и $\overline{BC} = \frac{d-a}{\sin x}$, па плоштината на триаголникот ABC ќе биде



$$P = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BC} = \frac{1}{2}\frac{a}{\cos x}\cdot\frac{d-a}{\sin x} = \frac{a(d-a)}{\sin 2x}.$$

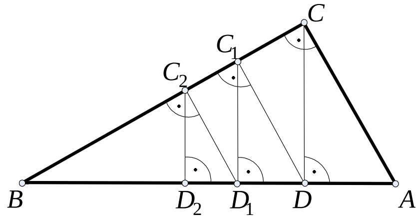
Според тоа, плоштината P ќе биде најмала ако е $\sin 2x$ најголемо, т.е. ако $\sin 2x = 1$, од каде што добиваме $x = \frac{\pi}{4}$.

21. Во правоаголниот триаголник ABC дадени се катетата $\overline{CA} = b$ и аголот $\alpha = 60^\circ$ при темето A. Од темето C спуштена е нормал CD на хипотенузата AB. Од точката D спуштена е нормала DC_1 на катетата BC. Од точката C_1 спуштена е нормал C_1D_1 на хипотенузата AB итн. Да се пресмета збирот на должините на така добиените нормали, кога нивниот број неограничено се зголемува.

Решение. Аглите

$$\measuredangle CAD, \measuredangle DCC_1, \measuredangle C_1DD_1, ...$$

се еднакви меѓу себе и се по 60°, бидејќи тоа се агли со заемно нормални краци (види цртеж). Од правоаголните триаголници $ACD, DCC_1, DD_1C_1, ...$ добиваме



$\overline{CD} = b\sin 60^\circ$, $\overline{C_1D} = \overline{CD}\cdot\sin 60^\circ$,

$\overline{C_1D_1} = \overline{C_1D}\cdot\sin 60^\circ$, …

$\overline{CD} = b\sin 60^\circ$, $\overline{C_1D} = b\cdot\sin^2 60^\circ$,

$\overline{C_1D_1} = b \cdot \sin^3 60^\circ$, …

Збирот на овие отсечки (кога нивниот број неограничено се зголемува) формира еден бесконечен геометриски ред со прв член $a_1 = b\sin 60^\circ$ и количник

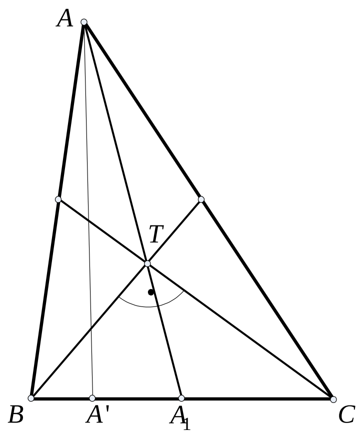
$$q = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 .$$

Според тоа, збирот S на овој ред ќе биде

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{b\cdot\sin 60^\circ}{1-\sin 60^\circ} = b\sqrt{3}(2+\sqrt{3}) .$$

22. Нека во остроаголен триаголик ABC тежишните линии повлечени во B и C се заемно нормални. Докажи дека

$$\operatorname{ctg}\measuredangle B + \operatorname{ctg}\measuredangle C \geq \frac{2}{3} .$$



Решение. Нека T е тежиштето на триаголникот, A_1 е средината на отсечката BC, а A' е проекцијата на точката A врз правата BC (види цртеж). Од

$$\operatorname{ctg}\measuredangle B = \frac{\overline{BA'}}{\overline{AA'}}, \qquad \operatorname{ctg}\measuredangle C = \frac{\overline{CA'}}{\overline{AA'}},$$

добиваме

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}\measuredangle B + \operatorname{ctg}\measuredangle C &= \frac{\overline{BA'}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{CA'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{BA'}+\overline{CA'}}{\overline{AA'}} \\ &= \frac{\overline{BC}}{\overline{AA'}} \geq \frac{\overline{BC}}{\overline{AA_1}}\end{aligned} \qquad (1)$$

Бидејќи $\measuredangle BTC = 90^\circ$, следува дека $\overline{TA_1} = \overline{A_1C} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, а освен тоа $\overline{AA_1} = 3\overline{TA_1}$.

Според тоа, од (1) добиваме

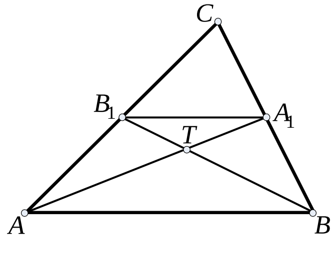
$$\operatorname{ctg}\measuredangle B + \operatorname{ctg}\measuredangle C \geq \frac{\overline{BC}}{\overline{AA_1}} = \frac{\overline{BC}}{3\overline{TA_1}} = \frac{2\overline{TA_1}}{3\overline{TA_1}} = \frac{2}{3} .$$

23. Тежишните линии t_a и t_b во триаголникот ABC образуваат со страната AB агли чиј збир е 60°. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC, ако $t_a t_b = \sqrt{3}$.

Решение. Бидејќи тежишните линии со страната AB формираат агли чиј збир е 60°, следува дека

$$\measuredangle ATB = 120^\circ,\ \measuredangle A_1TB_1 = 120^\circ,$$

$$\measuredangle A_1TB = 60^\circ \text{ и } \measuredangle ATB_1 = 60^\circ .$$



Нека $\overline{AT} = n,\ \overline{A_1T} = m,\ \overline{BT} = s$ и $\overline{B_1T} = t$. Сега

$$\sqrt{3} = t_a t_b = (m+n)(s+t) = mt + ms + nt + ns$$

$$P_{ABA_1B_1} = \tfrac{1}{2} ns\sin 120^\circ + \tfrac{1}{2} sm\sin 60^\circ + \tfrac{1}{2} mt\sin 120^\circ + \tfrac{1}{2} nt\sin 60^\circ$$
$$= \tfrac{\sqrt{3}}{4}(ns + sm + mt + nt) = \tfrac{3}{4}.$$

Бидејќи A_1B_1 е средна линија во ΔABC, следува дека триаголниците ABC и A_1B_1C се слични со коефициент на сличност 2. Оттука следува дека

$$P_{ABC} = 4P_{A_1B_1C}\text{, т.е. } P_{A_1B_1C} = \tfrac{1}{3} P_{ABA_1B_1} = \tfrac{1}{4}.$$

Значи

$$P_{ABC} = P_{ABA_1B_1} + P_{A_1B_1C} = 1.$$

24. Пресметај ја најголемата вредност на изразот $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$, ако α, β и γ се агли во триаголник.

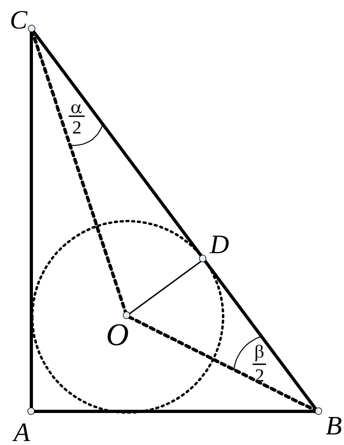
Решение. Барем два од аглите α, β и γ се остри. Нека се тоа аглите α и β. Бидејќи α и β се остри агли, следува дека $0 \le \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \le 1$, а бидејќи $0 < \gamma < \pi$, следува дека $0 \le \cos(\frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{6}) \le 1$.

Добиваме:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\gamma \le 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\gamma + \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{3} + 2\sin(\tfrac{\gamma}{2} + \tfrac{\pi}{6})\cos(\tfrac{\gamma}{2} - \tfrac{\pi}{6}) - \sin\tfrac{\pi}{3}$$
$$\le 2\sin\frac{\alpha+\beta}{3} + 2\sin(\tfrac{\gamma}{2} + \tfrac{\pi}{6}) - \sin\tfrac{\pi}{3}$$
$$= 4\sin(\tfrac{1}{2}(\tfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} + \tfrac{\pi}{6}))\cos(\tfrac{1}{2}(\tfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2} - \tfrac{\pi}{6})) - \sin\tfrac{\pi}{3}$$
$$= 4\sin\tfrac{\pi}{3}\cos(\tfrac{\gamma}{2} - \tfrac{\pi}{6}) - \sin\tfrac{\pi}{3} \le 4\sin\tfrac{\pi}{3} - \sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ако $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, тогаш $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Значи најголемата вредност што може да ја прими изразот $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ е $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

25. Радиусите на опишаната и вписаната кружница на на еден правоаголен триаголник се однесуваат како $5:2$, соодветно. Одреди ги острите агли во триаголникот.



Решение. Нека R е радиус на опишаната кружница, а r радиус на впишаната кружница во правоаголниот триаголник

$$\operatorname{ctg}(\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{\beta}{2}) = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} - 1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}} = 1.$$

Важи

$$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB} = \overline{OD}\operatorname{ctg}\tfrac{\alpha}{2} + \overline{OD}\operatorname{ctg}\tfrac{\beta}{2}$$
$$= r(\operatorname{ctg}\tfrac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\tfrac{\beta}{2})$$

Бидејќи $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=45^o$ се добиваме: $2R=r(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2})$. Оттука

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=2\frac{R}{r}=2\cdot\frac{5}{2}=5\,.$$

Триаголникот ABC е правоаголен па $\alpha+\beta=90^\circ$. Значи $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=45^o$ Од равенството $\operatorname{ctg}(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2})=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}-1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}=1$, следува дека $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=6$. Земајќи $\alpha<\beta$ и решавајќи го системот равенки $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=5$, $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=6$, добиваме дека $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=3$ и $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=2$. Оттука $\alpha=2\operatorname{arcctg}3,\ \beta=2\operatorname{arcctg}2.$

26. Нека α и β се остри агли во триаголник. Третиот агол γ е тап ако и само ако $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta<1$. Докажи!

Решение. Нека $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta<1$. $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$, па $\operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{tg}\beta>0$. Тогаш

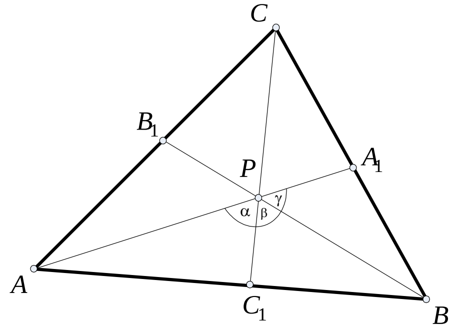
$$\operatorname{tg}\alpha<\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{ctg}\beta=\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\beta)\,.$$

Функцијата $f(x)=\operatorname{tg}x$ е растечка функција на интервалот $(0,\frac{\pi}{2})$, од каде мора $\alpha<\frac{\pi}{2}-\beta$, односно $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$. Конечно, $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)>\frac{\pi}{2}$ е тап агол. Обратно, нека γ е тап агол. Тогаш $\operatorname{tg}\gamma<0$. Имаме $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}(\pi-\gamma)=-\operatorname{tg}\gamma>0$. Односно $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}>0$ и $\operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{tg}\beta>0$, од каде мора $1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta>0$, т.е. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta<1$.

27. Даден е триаголник $\triangle ABC$ и точка P во внатрешноста. Нека $AP\cap BC=\{A_1\}$, $BP\cap AC=\{B_1\}$, $CP\cap AB=\{C_1\}$. Докажи дека

$$P_{\triangle AC_1P}\cdot P_{\triangle BA_1P}\cdot P_{\triangle CB_1P}=P_{\triangle BC_1P}\cdot P_{\triangle CA_1P}\cdot P_{\triangle AB_1P}\,.$$

Решение. Нека е даден триаголникот како на цртежот десно. Тогаш



$$P_{\triangle AC_1P}=\overline{PA}\cdot\overline{PC_1}\cdot\sin\alpha\,,$$

$$P_{\triangle BA_1P}=\overline{PB}\cdot\overline{PA_1}\cdot\sin\gamma\,,$$

$$P_{\triangle CB_1P}=\overline{PC}\cdot\overline{PB_1}\cdot\sin\beta\,.$$

Понатаму,

$$P_{\triangle BC_1P}=\overline{PB}\cdot\overline{PC_1}\cdot\sin\beta\,,$$

$$P_{\triangle CA_1P}=\overline{PC}\cdot\overline{PA_1}\cdot\sin\alpha\,,$$

$$P_{\triangle AB_1P}=\overline{PA}\cdot\overline{PB_1}\cdot\sin\gamma\,,$$

па равенството што требаше да се докаже е еквивалентно на

$$P_{\triangle AC_1P}\cdot P_{\triangle BA_1P}\cdot P_{\triangle CB_1P}=\overline{PA}\cdot\overline{PC_1}\cdot\sin\alpha\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PA_1}\cdot\sin\gamma\cdot\overline{PC}\cdot\overline{PB_1}\cdot\sin\beta=$$

$$=\overline{PB}\cdot\overline{PC_1}\cdot\sin\beta\cdot\overline{PC}\cdot\overline{PA_1}\cdot\sin\alpha\cdot\overline{PA}\cdot\overline{PB_1}\cdot\sin\gamma=P_{\triangle BC_1P}\cdot P_{\triangle CA_1P}\cdot P_{\triangle AB_1P}\,.$$

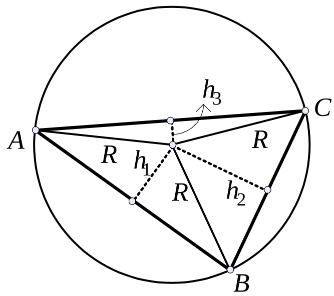
28. Докажи дека во секој остроаголен триаголник важи

$$a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma=\frac{2sr}{R},$$

каде a, b, c се страните, α, β, γ се аглите на триаголникот, r, R се радиусите на впишаната и опишаната кружница, соодветно, а s е полузбирот на страните.

Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница на триаголникот. Важи

$$P_{\triangle ABC}=P_{\triangle AOB}+P_{\triangle BOC}+P_{\triangle AOC}. \qquad (1)$$



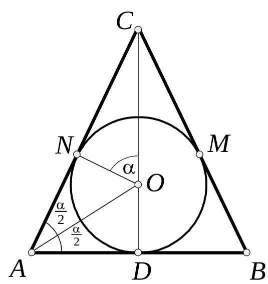
Од триаголникот ABC имаме дека $P_{\Delta AOB}=\frac{ch_1}{2}$, каде $\frac{h_1}{R}=\cos\gamma$, $\measuredangle AOB=2\gamma$ како централен агол за аголот γ над ист кружен лак. Значи $P_{\Delta AOB}=\frac{cR\cos\gamma}{2}$. Аналогно се добива $P_{\triangle BOC}=\frac{aR\cos\alpha}{2}$ и $P_{\triangle AOC}=\frac{bR\cos\beta}{2}$. Ако уште земеме предвид дека $P_{\Delta ABC}=sr$ и замениме во (1) се добива

$$sr=\frac{cR\cos\gamma}{2}+\frac{aR\cos\alpha}{2}+\frac{bR\cos\beta}{2}=\frac{R}{2}(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma),$$

односно $a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma=\frac{2sr}{R}$, што и требаше да се докаже.

29. Во рамнокрак триаголник аголот при основата е еднаков на α. Пресметај ја должината на основата на триаголникот ако висината спуштена врз основата е за m поголема од радиусот на впишаната кружница.

Решение. Нека ABC е триаголник со основа AB во кој $\measuredangle BAC=\alpha$. Од темето C спуштаме нормала CD, $\overline{CD}=h$, која во исто време е и симетрала на $\measuredangle BCA$. Нека симетралата на аголот BAC и симетралата CD се сечат во точката O која е центар на впишаната кружница. Допираните точки на впишаната кружница k со страните AB, BC и CA ќе ги означиме со D, M, N соодветно. Должината на радиусот на кружницата е $\overline{ON}=r=\overline{OD}$ и $\measuredangle OAN=\measuredangle OAB=\frac{\alpha}{2}$.



Триаголниците CON и CAD се слични (имаат по еден прав агол и агли со взаемно нормални краци). Во триаголникот ONC имаме, $\measuredangle NOC=\alpha$, $\overline{CO}=h-r=m$ и $\overline{ON}=r$, па според тоа $r=\overline{ON}=\overline{OC}\cos\alpha=m\cos\alpha$.

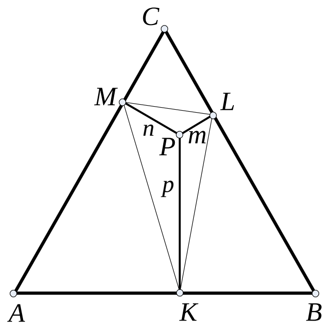
Триаголникот ADO е правоаголен и еден негов остар агол е $\frac{\alpha}{2}$, а една негова страна е $\overline{OD}=m\cos\alpha$. Бидејќи $\frac{\overline{AD}}{\overline{OD}}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, добиваме

$$\frac{a}{2}=\overline{AD}=\overline{OD}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=m\cos\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Конечно, должината на основата е $a=2m\cos\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

30. Од точка во внатрешноста на рамностраниот триаголникот ABC се спуштени нормали кон страните AB, BC и CA. Должините на спуштените нормали се еднакви на m, n, p а должината на страната на триаголникот ABC е еднаква на a.

Да се пресмета односот на плоштините на триаголникот ABC и триаголникот чии темиња се подножјата на нормалите.



Решение. Нека P е произволна точка во внатрешноста на рамностраниот триаголник ABC. Точките K, L и M се подножја на нормалите спуштени од точката P кон страните AB, BC и CA соодветно. (цртеж) Бидејќи

$$\measuredangle PKB = \measuredangle PLB = \measuredangle PLC = \measuredangle PMC$$
$$= \measuredangle PMA = \measuredangle AKP = 90^\circ,$$

четириаголниците $AKPM, BLPK$ и $CLPM$ се тетивни. Затоа $\measuredangle KPL = \measuredangle LPM = \measuredangle MPK = 120^\circ$ (бидејќи аглите на триаголникот a се еднакви на n и тетивноста на погорните четириаголници). Од равенствата b, d и S добиваме дека

$$P_{\triangle LPK} = \frac{1}{2} mp \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} mp,$$

$$P_{\triangle LPM} = \frac{1}{2} mn \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} mn,$$

$$P_{\triangle MPK} = \frac{1}{2} np \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} np.$$

Плоштината на триаголникот KLM е еднаква на

$$P_{\triangle KLM} = P_{\triangle KPL} + P_{\triangle LPM} + P_{\triangle MPK} = \frac{\sqrt{3}}{4}(pm + mn + np).$$

Бидејќи плоштината на триаголникот ABC е $P_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$, добиваме

$$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta KLM}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}(pm+mn+np)} = \frac{a^2}{pm+mn+np}.$$

31. Дали постои триаголник, таков што за неговите агли α, β и γ е точно равенството

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma.$$

Решение. Нека постои триаголник со агли α, β и γ за кои е исполнето даденото равенство. За било кое θ, $\theta \neq k\pi$ е исполнето равенството $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\operatorname{ctg}\theta}$.

Користејќи го идентитетот $\operatorname{ctg}2\theta = \frac{\operatorname{ctg}^2\theta - 1}{\operatorname{ctg}\theta}$ и равенството $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, имаме

$$\operatorname{ctg}\alpha - \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} + \operatorname{ctg}\beta - \frac{1}{\operatorname{ctg}\beta} + \operatorname{ctg}\gamma - \frac{1}{\operatorname{ctg}\gamma} = 0,$$

$$\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\alpha} + \frac{\operatorname{ctg}^2\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta} + \frac{\operatorname{ctg}^2\gamma - 1}{\operatorname{ctg}\gamma} = 0,$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha + \operatorname{ctg}2\beta + \operatorname{ctg}2\gamma = 0,$$

$$\text{ctg}2\alpha+\text{ctg}2\beta+\text{ctg}[2\pi-(2\alpha+2\beta)]=0\,. \qquad (1)$$

Во идентитетите

$$\text{ctg}[2\pi-(2\alpha+2\beta)]=\text{ctg}(2\alpha+2\beta)\,,$$

$$\text{ctg}(2\alpha+2\beta)=\frac{\text{ctg}2\alpha\ \text{ctg}2\beta-1}{\text{ctg}2\alpha\ \text{ctg}2\beta}\,,$$

ако воведеме ознаки $\text{ctg}\,2\alpha=x$ и $\text{ctg}\,2\beta=y$, и замениме во (1) добиваме

$$x+y+\frac{xy-1}{x+y}=0\,.$$

Последното равенство можеме да го запишеме во обликот

$$(x+\tfrac{y}{2})^2+\tfrac{3}{4}y^2+1=0\,.$$

Не постојат реални броеви за кои ова равенство е исполнето. Бидејќи последното равенство според воведените ознаки за x и y е еквивалентно со почетното равенство, добиваме дека не постои таков триаголник.

32. Даден е триаголникот $\triangle ABC$. На страната BC избрани се точки D и E така што $\overline{BD}=\overline{EC}$ и $\measuredangle BAD=\measuredangle CAE$. Докажи дека $\triangle ABC$ е рамнокрак.

Решение. Да забележиме дека $P_{\triangle ABD}=P_{\triangle ACE}$ бидејќи имаат еднакви основи и заедничка висина. Од тоа имаме

$$\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}\sin\measuredangle BAD}{2}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AE}\sin\measuredangle CAE}{2}\,,$$

односно $\overline{AB}\cdot\overline{AD}=\overline{AC}\cdot\overline{AE}$.

Аналогно $P_{\triangle ABE}=P_{\triangle ACD}$, од што се добива

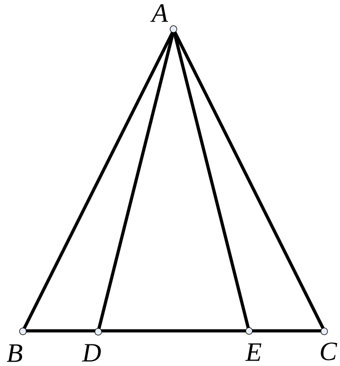
$$\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AE}\sin\measuredangle BAE}{2}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AD}\sin\measuredangle CAD}{2}\,,$$

односно $\overline{AB}\cdot\overline{AE}=\overline{AC}\cdot\overline{AD}$.

Ако го помножиме ова равенство со равенството $\overline{AB}\cdot\overline{AD}=\overline{AC}\cdot\overline{AE}$ добиваме

$$\overline{AB}^2\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AE}=\overline{AC}^2\cdot\overline{AE}\cdot\overline{AD}\,.$$

Од ова се добива $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$, односно $\overline{AB}=\overline{AC}$.



33. Во триаголник со агли α,β и γ е исполнето равенството

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin\gamma\,.$$

Ако α и β се остри агли, докажи дека γ е прав агол.

Решение. Бидејќи збирот на аглит во триаголникот е π, користејќи ги адиционите теореми, даденото равенство го добива обликот

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin[\pi-(\alpha+\beta)]=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\beta)=\sin\beta(\cos\alpha-\sin\beta)\,. \qquad (1)$$

Од формулата $\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)=\sin\varphi$ и формулата за разлика на синуси, добиваме

$$\sin\alpha-\cos\beta=\sin\alpha-\sin(\tfrac{\pi}{2}-\beta)=2\sin\frac{2\alpha+2\beta-\pi}{4}\cos\frac{2\alpha-2\beta+\pi}{4}$$

$$\cos\alpha-\sin\beta=\sin(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)-\sin\beta=-2\sin\frac{2\alpha+2\beta-\pi}{4}\cos\frac{2\beta-2\alpha+\pi}{4}\,,$$

па равенството (1) го добива обликот

$$2\sin\alpha\sin\tfrac{2\alpha+2\beta-\pi}{4}\cos\tfrac{2\alpha-2\beta+\pi}{4}=-2\sin\tfrac{2\alpha+2\beta-\pi}{4}\cos\tfrac{2\beta-2\alpha+\pi}{4}. \qquad (2)$$

Бидејќи α и β се остри агли во триаголникот, добиваме дека $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ се позитивни. Од друга страна

$$-\tfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\tfrac{\pi}{2}$$

$$-\tfrac{\pi}{2}<\beta-\alpha<\tfrac{\pi}{2}$$

па според тоа

$$0<\tfrac{2\alpha-2\beta+\pi}{4}<\tfrac{\pi}{2}$$

$$0<\tfrac{2\beta-2\alpha+\pi}{4}<\tfrac{\pi}{2}.$$

Сега е јасно дека (2) важи ако и само ако

$$\sin\tfrac{2\alpha+2\beta-\pi}{4}=0. \qquad (3)$$

Бидејќи α и β се остри агли имаме $0<\alpha+\beta<\pi$, од каде добиваме

$$-\tfrac{\pi}{4}<\tfrac{2\alpha+2\beta-\pi}{4}<\tfrac{\pi}{4}.$$

Сега, равенството (3) е можно ако и само ако $\tfrac{2\alpha+2\beta-\pi}{4}=0$, т.е. $\alpha+\beta=\tfrac{\pi}{2}$. Конечно

$$\gamma=\pi-(\alpha+\beta)=\pi-\tfrac{\pi}{2}=\tfrac{\pi}{2}.$$

34. Нека O е центарот на опишаната кружница околу рамнокрак $\triangle ABC$ со основа AB. Правата AO ја сече страната BC во точка D. Познато е дека $\overline{BD}$ и $\overline{CD}$ се природни броеви, а $\overline{AO}-\overline{CD}$ е прост број. Определи ги овие броеви.

Решение. Да означиме $\overline{AO}=R, \overline{BD}=b, \overline{CD}=c$ и $\overline{OD}=d$. Бидејќи CO е симетрала на агол во $\triangle ACD$ важи $\tfrac{d}{R}=\tfrac{c}{b+c}$. Од друга страна, ако правата AO ја сече опишаната кружница во точка E, тогаш од својството на секантите AE и BC следува $(R+d)(R-d)=bc$. Ако во последното равенство заменима $d=\tfrac{cR}{b+c}$, добиваме

$$R^2=\tfrac{(b+c)^2c}{b+2c}.$$

Нека $k=\mathrm{NZD}(b,c,R), m=\mathrm{NZD}(\tfrac{b}{k},\tfrac{c}{k}), R_1=\tfrac{R}{k}, b_1=\tfrac{b}{km}$ и $c_1=\tfrac{c}{km}$. Тогаш

$$R_1^2=\tfrac{m^2(b_1+c_1)^2c_1}{b_1+2c_1}.$$

Бидејќи

$\mathrm{NZD}(m,R_1)=1$ и $\mathrm{NZD}(b_1+2c_1,b_1+c_1)=\mathrm{NZD}(b_1+2c_1,c_1)=\mathrm{NZD}(b_1,c_1)=1$

добиваме

$$R_1^2=(b_1+c_1)^2c_1 \text{ и } m^2=b_1+2c_1.$$

Според тоа, c_1 е точен квадрат, на пример $c_1=n^2$. Тогаш

$$c=kmc_1=kmn^2,\ b=kmb_1=km(m^2-2n^2) \text{ и } R=kR_1=kn(m^2-n^2).$$

Бидејќи $1 > \sin\measuredangle BAC = \frac{b+c}{2R} = \frac{m}{2n}$, заклучуваме $\sqrt{2}n < m < 2n$. (Обратно, при овој услов триаголникот постои и е остроаголен, т.е. правата AO го сече кракот BC.) Во случајов $n \geq 2$. Бидејќи $R - c = kn(m^2 - n^2 - mn)$ е прост број, добиваме дека n е прост број, $k = 1$ и $m^2 - n^2 - mn = 1$, т.е. $(m-1)(m+1) = n(m+n)$. Можни се два случаја:

1) $m - 1 = nl$ и тогаш $l(nl+2) = nl + 1 + n$, т.е. $n = \frac{1-2l}{l^2-l-1}$. Последниот број е негативен за $l \geq 2$. Затоа $l = 1$ и оттука $n = 1$, што е противречност.
2) $m + 1 = nl$ и тогаш $l(nl-2) = ml - 1 + n$, т.е. $n = \frac{2l-1}{l^2-l-1}$. Последниот број е помал или еднаков на 1 за $l \geq 3$, а за $l = 1$ е еднаков на -1. Останува $l = 2$ и оттука $n = R - c = 3, m = 5, b = 35$ и $c = 45$.

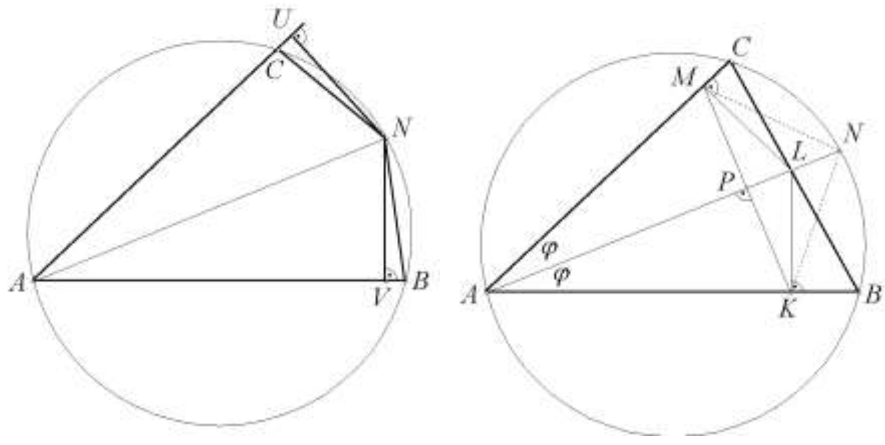
35. Низ темето A на остроаголниот $\triangle ABC$ повлечена е симетрала на аголот, која ја сече страната BC во точка L, а кружницата опишана околу триаголникот ABC во точки A и N. Од L на AB и на AC спуштени се нормали LK и LM, соодветно, при што $K \in AB$, $M \in AC$. Докажи дека плоштината на четириаголникот $AKNM$ е еднаква на површината на $\triangle ABC$.

Решение. Нека точките се означени како на цртеж лево: $LM \perp AC$, $LK \perp AB$; $\triangle ALM \cong \triangle ALK$ па според тоа $\overline{ML} = \overline{LK}$.

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle AKN} + P_{\triangle ALC} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{LK} + \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{LM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})\cdot\overline{LK}$$

$$P_{AKNM} = P_{\triangle AKN} + P_{\triangle ANM} = \frac{1}{2}\overline{AN}\cdot\overline{KP} + \frac{1}{2}\overline{AN}\cdot\overline{MP} = \overline{AN}\cdot\overline{KP}$$

$$= \overline{AN}\cdot\overline{AK}\sin\varphi = \overline{AN}\cdot\overline{AL}\sin\varphi\cos\varphi = \overline{AN}\cdot\overline{LK}\cos\varphi.$$



Значи,

$$P_{\triangle ABC} = P_{AKNM} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) = \overline{AN}\cos\varphi.$$

Ова е точно бидејќи $\triangle NVB \cong \triangle NUC$, (цртеж десно), па според тоа

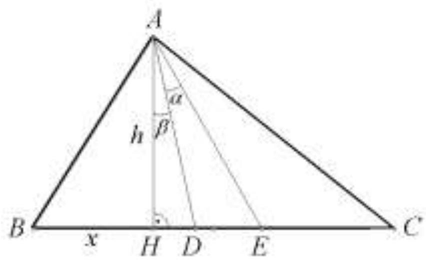
$$\frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) = \frac{1}{2}(\overline{AV} + \overline{VB} + \overline{AU} - \overline{UC}) = \overline{AV} = \overline{AN}\cos\varphi.$$

36. Даден е правоаголен триаголник со должина на хипотенузата a, која е поделена е на n еднакви делови (n е непарен број). Нека α е аголот под кој од точката A се гледа оној од $n-$те делови на хипотенузата кој ја содржи нејзината средина. Докажи дека $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}$.

Решение. Нека DE е отсечката која ја содржи средината на хипотенузата и $\overline{BH} = x$, каде H е подножната точка на висината спуштена од темето A кон основата BC. Тогаш, $x(a-x) = h^2$. Ако со α и β ги означиме аглите EAD и DAH, добиваме $\measuredangle EAH = \alpha + \beta$.

Од правоаголниот триаголник AHE следува $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\overline{HE}}{AH}$. Понатаму, $\overline{HE} = \overline{HD} + \overline{DE}$, $\overline{HD} = \overline{BD} - \overline{BH}$ и $\overline{BD} = \frac{n-1}{2n}a$, па затоа $\overline{HE} = \frac{n+1}{2n}a - x$. Значи,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\frac{n+1}{2n}a-x}{h}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{n-1}{2n}a-x}{h}.$$



Ако го искористиме идентитетот

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

добиваме

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ah}{nh^2+\frac{n^2-1}{4n}a^2-n(ax-x^2)}.$$

Но, $h^2 = x(a-x)$, па затоа

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4nh}{a(n^2-1)}.$$

37. Даден е $\triangle ABC$. Нека M е внатрешна точка на страната AB, r_1, r_2, r се радиуси на кружниците впишани во триаголниците AMC, BMC и ABC, соодветно, а ρ_1, ρ_2, ρ се радиуси на кружниците кои:

а) лежат во аголот BCA,

б) однадвор се впишани во триаголниците AMC, MBC и ABC.

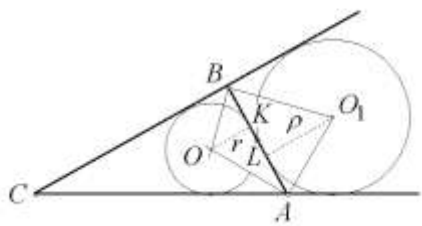
Докажи дека

$$\frac{r_1 r_2}{\rho_1\rho_2} = \frac{r}{\rho}.$$

Решение. *Лема.* Нека $\measuredangle CAB = \alpha$ и $\measuredangle ABC = \beta$. Тогаш

$$\frac{r}{\rho} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

Доказ. Нека O е центарот на впишаната кружница и K е точката во која таа ја допира страната AB. Точката O_1 е центар на опишаната кружница, а L е точка во која таа ја допира страната AB. Тогаш



$$\overline{AB} = \overline{AK} + \overline{KB} = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} + \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}) \text{ и } \overline{AB} = \overline{AL} + \overline{LB} = \rho(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}).$$

Сега тврдењето на лемата следува од претходните равенства. ♦

Нека $\phi = \measuredangle AMC$. Од лемата следува

$$\frac{r_1}{\rho_1} = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\phi}{2} \text{ и } \frac{r_2}{\rho_2} = \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\pi-\phi}{2} = \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{ctg}\frac{\phi}{2}.$$

Ако ги помножиме овие равенства добиваме

$$\frac{r_1}{\rho_1}\frac{r_2}{\rho_2} = tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\rho},$$

што и требаше да се докаже.

38. Нека D и E се подножните точки на висините спуштени соодветно од темињата A и B на $\triangle ABC$, F е пресечната точка на симетралата на аголот аголот во темето C со страната AB, а O, I и H се соодветно центарот на опишаната кружница, центарот на впишаната кружница и ортоцентарот на $\triangle ABC$. Докажи дека, ако $\frac{\overline{CF}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{CF}}{\overline{BE}} = 2$, тогаш $\overline{OI} = \overline{IH}$.

Решение. Нека $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b, \measuredangle ACB = \gamma, \measuredangle CAB = \alpha, \overline{CF} = s_c$. Бидејќи $P_{\triangle ABC} = P_{\triangle AFC} + P_{\triangle BFC}$, направи цртеж, следува дека

$$\tfrac{1}{2}bs_c\sin\tfrac{\gamma}{2} + \tfrac{1}{2}as_c\sin\tfrac{\gamma}{2} = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma, \text{ т.е. } s_c = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}.$$

Понатаму, од $\overline{AD} = b\sin\gamma$ и $\overline{BE} = a\sin\gamma$ следува

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{CF}}{\overline{BE}} = \frac{2a\cos\frac{\gamma}{2}}{(a+b)\sin\gamma} + \frac{2b\cos\frac{\gamma}{2}}{(a+b)\sin\gamma} = \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}\right) = \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Оттука и од условот на задачата следува $\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$, т.е. $\gamma = \frac{\pi}{3}$. Нека правата CF ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката M. Тогаш $OM \perp AB$. Но, како $CH \perp AB$ следува дека $\measuredangle OMC = \measuredangle MCH$, т.е. $\measuredangle OCM = \measuredangle MCH$.

Од $\triangle HCE$, бидејќи

$$\measuredangle EHC = \tfrac{\pi}{2} - \measuredangle ECH = \tfrac{\pi}{2} - (\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \alpha$$

добиваме дека $\overline{CH} = \frac{\overline{CE}}{\sin\alpha}$. Од $\triangle BCE$ следува $\overline{CE} = \frac{a}{\sin\alpha}\cos\gamma = 2R\cos\gamma$, па ко е $\gamma = \frac{\pi}{3}$ добиваме $\overline{CE} = R$.

Оттука следува дека триаголниците CHI и COI се складни, па затоа $\overline{OI} = \overline{IH}$, што и требаше да се докаже.

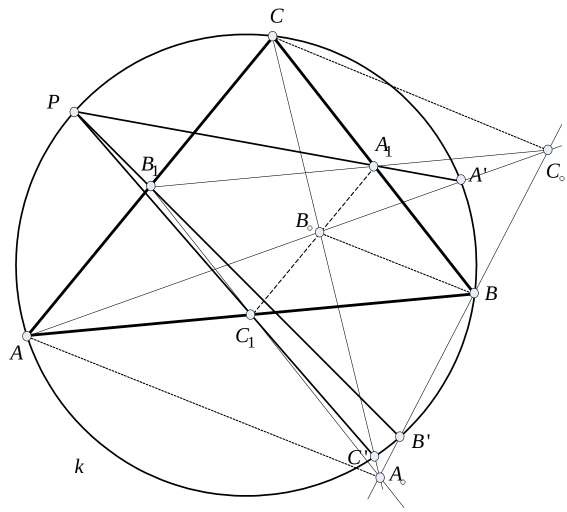
39. Нека ABC е триаголник при што точките A_1, B_1 и C_1 се средини на страните BC, CA и AB соодветно. Нека P е точка од опишаната кружница k околу триаголникот ABC. Правите PA_1, PB_1 и PC_1 ја сечат по вторпат кружницата k во точките A', B', C' соодветно. Нека точките A, B, C, A', B', C' се попарно различни, и правите AA', BB' и CC' формираат триаголник. Докажи дека плоштината на тој триаголник не зависи од изборот на точката P.

Решение. Нека A_0, B_0, C_0 се точки на пресек на правите AA', BB' и CC' (види цртеж). Ќе покажеме дека $P_{A_0B_0C_0} = \frac{1}{2}P_{ABC}$. Ќе го разгледаме шестоаголникот

$ABCC'PA'$. Според теоремата на Паскал, пресеците на спротивните страни се сечат во точки кои припаѓаат на една права. Според тоа, точките

$$AB \cap C'P = C_1,\ BC \cap PA' = A_1 \text{ и } CC' \cap AA' = B_0$$

лежат на една права. Според тоа, точката B_0 лежи на средната линија на A_1C_1 на триаголникот ABC. Аналогно, точката A_0 припаѓа на средната линија B_1C_1 и C_0 припаѓа на средната линија B_1A_1 на триаголникот ABC (види цртеж).



Отсечките AC и A_1C_1 се паралелни, па според тоа, триаголниците $B_0C_0A_1$ и AC_0B_1 се слични. Од сличноста добиваме

$$\frac{\overline{B_0C_0}}{\overline{AC_0}} = \frac{\overline{A_1C_0}}{\overline{B_1C_0}}. \qquad (1)$$

Аналогно, од тоа што $BC \parallel B_1C_1$, добиваме дека триаголниците $B_1A_0C_0$ и A_1BC_0 се слични. Според тоа, од сличноста добиваме

$$\frac{\overline{A_1C_0}}{\overline{B_1C_0}} = \frac{\overline{BC_0}}{\overline{A_0C_0}}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме дека $\frac{\overline{B_0C_0}}{\overline{AC_0}} = \frac{\overline{BC_0}}{\overline{A_0C_0}}$, кое е еквивалентно со равенството:

$$\overline{B_0C_0} \cdot \overline{A_0C_0} = \overline{AC_0} \cdot \overline{BC_0}.$$

Според тоа,

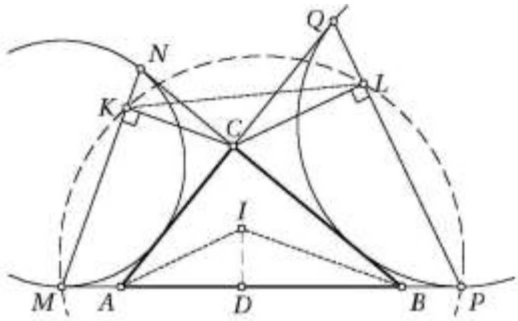
$$\begin{aligned} P_{A_0B_0C_0} &= \tfrac{1}{2}\overline{B_0C_0} \cdot \overline{A_0C_0} \sin\measuredangle A_0B_0C_0 \\ &= \tfrac{1}{2}\overline{AC_0} \cdot \overline{BC_0} \sin\measuredangle AC_0B = P_{ABC_0} \end{aligned}.$$

Точката C_0 припаѓа на средната линија B_1A_1 на триаголникот ABC од каде што добиваме дека $d(C_0, AB) = \frac{1}{2}d(C, AB)$, со $d(X, YZ)$ е означено растојанието од точката X до правата YZ. Тогаш

$$P_{A_0B_0C_0} = P_{ABC_0} = \tfrac{1}{2}\overline{AB} \cdot d(C_0, AB) = \tfrac{1}{4}\overline{AB} \cdot d(C, AB) = \tfrac{1}{2}P_{ABC}.$$

Десната страна на последното равенство не е во зависност од точката P. Значи, независност од изборот на точката P имаме $P_{A_0B_0C_0} = \frac{1}{2}P_{ABC}$.

40. Во триаголник ABC припишаната кружница наспроти темето A ги допира правата AB во точката P и правата AC во точката Q, а припишаната кружница наспроти темето B ги допира правата AB во точката M и правата BC во точката N. Нека K и L соодветно се подножјата на нормалите повлечени од C кон правите MN и PQ. Докажи, дека четириаголникот $MKLP$ е тетивен.



Решение. Аглите на триаголникот да ги означиме со α, β, γ. Бидејќи $\measuredangle KMP = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, доволно е да докажеме дека $\measuredangle KLP = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$.

Нека I е центарот на вписаната кружница во триаголникот ABC и D е допирната точка на вписаната кружница со AB. Од $CK \parallel IB$ и $CL \parallel IA$ следува $\measuredangle KCL = \measuredangle AIB$. Понатаму, од $\overline{CN} = \overline{AD} = \frac{b+c-a}{2}$ и $\measuredangle KCN = \frac{\beta}{2}$ следува

$$\overline{CK} = \overline{CN}\cos\frac{\beta}{2} = \overline{AD}\cos\frac{\beta}{2} = \overline{AI}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Аналогно $\overline{CL} = \overline{BI}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$, па затоа $\frac{\overline{CK}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{BI}}$. Според тоа, триаголниците KCL и AIB имаат по две пропорционални страни и агол меѓу нив е еднаков, па затоа тие се слични. Од сличноста на овие триаголници следува $\measuredangle KLC = \measuredangle ABI = \frac{\beta}{2}$, па затоа $\measuredangle KLP = \measuredangle KLC + \measuredangle CLP = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$.

41. Нека R и r се радиуси на опишаната и впишаната кружница во триаголникот ABC, а R' и r' се радиуси на опишаната и впишаната кружница во триаголникот $A'B'C'$. Ако $\measuredangle C = \measuredangle C'$ и $Rr' = R'r$, тогаш $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Докажи!

Решение. Во секој триаголник со агли α, β, γ, а R и r се радиусите на опишаната и впишаната кружница соодветно, е исполнето равенството

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + \frac{R}{r}.$$

Според тоа, за триаголникот ABC имаме

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{R}{r},$$

а за триаголникот $A'B'C'$ е исполнето равенството

$$\cos A' + \cos B' + \cos C' = 1 + \frac{R'}{r'}.$$

Но, од равенството $Rr' = R'r$ имаме $\frac{R}{r} = \frac{R'}{r'}$, па според тоа

$$\cos A + \cos B + \cos C = \cos A' + \cos B' + \cos C'.$$

Од равенството $\measuredangle C = \measuredangle C'$ добиваме $\cos A + \cos B = \cos A' + \cos B'$, па според тоа $2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 2\cos\frac{A'+B'}{2}\cos\frac{A'-B'}{2}$. Да забележиме дека

$$\measuredangle A + \measuredangle B = \pi - \measuredangle C = \pi - \measuredangle C' = \measuredangle A' + \measuredangle B',$$

па од претходното равенство добиваме $\cos\frac{A-B}{2} = \cos\frac{A'-B'}{2}$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\measuredangle A \geq \measuredangle B$ и $\measuredangle A' \geq \measuredangle B'$. Тогаш, $\measuredangle A - \measuredangle B = \measuredangle A' - \measuredangle B'$, а заедно со $\measuredangle A + \measuredangle B = \measuredangle A' + \measuredangle B'$ добиваме $\measuredangle A = \measuredangle A', \measuredangle B = \measuredangle B'$ и како $\measuredangle C = \measuredangle C'$, заклучуваме $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

42. Нека квадратот $ABCD$ е впишан во кружницата k и P е произволна точка од k. Докажи дека барем еден од броевите $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ и $\overline{PD}$ е ирационален.

Решение. Претпоставуваме, спротивно, односно дека броевите $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ и $\overline{PD}$ се рационални. Нека кружницата k има радиус r и точката P припаѓа на помалиот лак BC. Ако $\measuredangle CAP = \alpha$, тогаш од триаголникот APC, следува $\overline{PC} = 2r \cdot \sin\alpha$ и $\overline{PA} = 2r \cdot \cos\alpha$. Понатаму,

$$\overline{PD} = 2r \cdot \sin\measuredangle PBD = 2r \cdot \sin(45^\circ + \alpha) = r\sqrt{2}(\sin\alpha + \cos\alpha) = \sqrt{2}(\tfrac{\overline{PC}}{2} + \tfrac{\overline{PA}}{2}).$$

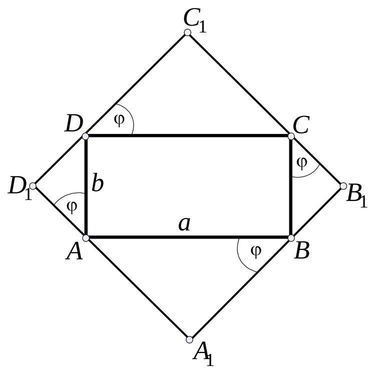
Бидејќи, $\frac{\overline{PC}}{2} + \frac{\overline{PA}}{2}$ е рационален број, тоа значи дека $\overline{PD}$ е ирационален број, што претставува противречност.

43. Околу даден правоаголник со страни a и b, опишан е друг правоаголник чија плоштина е m^2. За кои вредности на параметарот m задачата има решение?

Решение. Нека φ е аголот меѓу страните на правоаголниците $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. За должините на страните на опишаниот правоаголник $A_1B_1C_1D_1$ имаме:

$$\overline{A_1D_1} = \overline{AA_1} + \overline{AD_1} = a\sin\varphi + b\cos\varphi,$$

$$\overline{A_1B_1} = \overline{BA_1} + \overline{BB_1} = a\cos\varphi + b\sin\varphi.$$



Од условот за плоштината имаме:

$$m^2 = (a\sin\varphi + b\cos\varphi)(a\cos\varphi + b\sin\varphi),$$

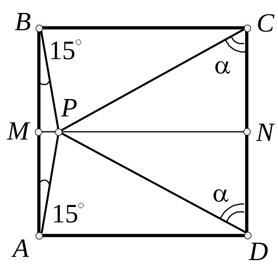
а со средување на изразот се добива

$$\sin\varphi\cos\varphi = \tfrac{m^2 - ab}{a^2 + b^2}, \text{ т.е. } \sin 2\varphi = \tfrac{2(m^2 - ab)}{a^2 + b^2}.$$

Тогаш услов задачата да има решение ќе биде $0 \le \sin 2\varphi \le 1$, односно решавајќи ја неравенката, го добиваме бараниот услов $\sqrt{ab} \le m \le \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

44. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е избрана точка P така што $\measuredangle PAB = \measuredangle PBA = 15^\circ$. Докажи дека триаголникот PCD е рамностран.

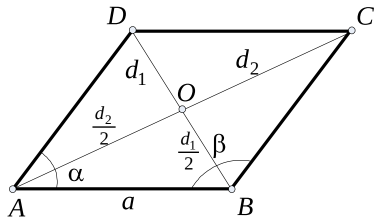
Решение. Триаголникот ABP е рамнокрак, па затоа неговото теме P припаѓа на симетралата MN на страните AB и CD на квадратот (цртеж). Според тоа, триаголникот DCP е рамнокрак, $\overline{PC} = \overline{PD}$. Нека $\measuredangle PCD = \measuredangle PDC = \alpha$. Ако должината на страната на триаголникот е a, тогаш $\overline{MP} + \overline{PN} = a$. Од правоаголниот триаголник PMB имаме $\overline{MP} = \frac{a}{2}\operatorname{tg}15^\circ$, а од правоаголниот триаголник PNC имаме $\overline{MN} = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Ако замениме во равенството $\overline{MP} + \overline{PN} = a$, добиваме $\frac{a}{2}\operatorname{tg}15^\circ + \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha = a$, т. е.



$$\operatorname{tg}\alpha = 2-\operatorname{tg}15^\circ = 2-\frac{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}30^\circ}{1+\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}30^\circ} = 2-\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}\,.$$

Јасно, $\alpha = 60^\circ$ и триаголникот PCD е рамностран.

45. Должините на помалата дијагонала, страната и поголемата дијагонала во ромбот формираат геометриска прогресија. Определи ги аглите на ромбот!



Решение. Нека $ABCD$ е ромб во кој дијагоналата $d_1 = \overline{BD}$, страната $a = \overline{AB}$ и дијагоналата $d_2 = \overline{AC}$ се последователни членови на геометриска прогресија. Значи, постојат броеви b и q такви што $d_1 = b$, $a = bq$, $d_2 = bq^2$.Од правоаголниот триаголник AOB, според теоремата на Питагора имаме

$$(\tfrac{d_1}{2})^2 + (\tfrac{d_2}{2})^2 = a^2\,,\;\; \tfrac{b^2}{4}+\tfrac{b^2}{4}q^4 = b^2q^2\,,\;\; q^4-4q^2+1=0\,.$$

Ако воведеме смена $q^2 = t$, ја добиваме квадратната равенка $t^2-4t+1=0$ чии решенија се $t_{1/2} = 2\pm\sqrt{3}$.

За решението $t = 2+\sqrt{3}$, добиваме $q = \sqrt{2+\sqrt{3}}$, и $d_1 = b$, $a = b\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $d_2 = b(2+\sqrt{3})$. Од правоаголниот триаголник AOB, добиваме

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\frac{d_1}{2}}{\frac{d_2}{2}} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{b}{b(2+\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3}\,.$$

Конечно, аглите на ромбот $ABCD$ се $\alpha = 2\operatorname{arctg}(2-\sqrt{3})$ и $\beta = \pi - 2\operatorname{arctg}(2-\sqrt{3})$. Аналогно се постапува и за решението $t = 2-\sqrt{3}$.

46. Впишаната кружница во правоаголниот $\triangle ABC$ ја допира хипотенузата AB во точката C_1. Точките $P \in CC_1$ и $Q \in AC$ се такви што $PQ \parallel BC$ и четириаголникот AC_1PQ е тангентен. Докажи, дека $\overline{CP} = \overline{O_1O_2}$, каде O_1 и O_2 се центрите на впишаните кружници во $\triangle AC_1C$ и $\triangle BC_1C$.

Решение. При стандардните ознаки за $\triangle ABC$ имаме $\overline{AC_1} = s-a$ и $\overline{BC_1} = s-b$. Нека X и Y соодветно се допирните точки на впишаните кружници во $\triangle AC_1C$ и $\triangle BC_1C$ со страната CC_1. Имаме

$$\overline{CX} = \frac{\overline{CC_1}+\overline{CA}-\overline{AC_1}}{2} = \frac{\overline{CC_1}+b-(s-a)}{2} = \frac{\overline{CC_1}+a+b-s}{2}\,,$$

$$\overline{CY} = \frac{\overline{CC_1}+\overline{CB}-\overline{BC_1}}{2} = \frac{\overline{CC_1}+a-(s-b)}{2} = \frac{\overline{CC_1}+a+b-s}{2}\,.$$

Според тоа, $\overline{CX} = \overline{CY}$, што значи дека двете кружници ја допираат страната CC_1 во една иста точка (направи цртеж). Тогаш $O_1O_2 \perp CC_1$.

Нека

$$\measuredangle ACO_1 = \measuredangle C_1CO_1 = \varphi \text{ и } \measuredangle BCO_2 = \measuredangle C_1CO_2 = \psi .$$

Тогаш $\measuredangle QPC = \measuredangle PCB = 2\psi$ и бидејќи PO_1 е симетрала на $\measuredangle QPC_1$, добиваме дека $\measuredangle QPO_1 = 90^\circ - \psi$. Сега, од $\triangle CPO_1$ наоѓаме

$$\measuredangle CO_1P = 180^\circ - \varphi - 2\psi - (90^\circ - \psi) = 90^\circ - \varphi - \psi .$$

Според тоа, $O_1P \perp CO_2$, т.е. P е ортоцентар на $\triangle CO_1O_2$. Но,

$$\measuredangle O_1CO_2 = \tfrac{1}{2}\measuredangle ACB = 45^\circ ,$$

па затоа

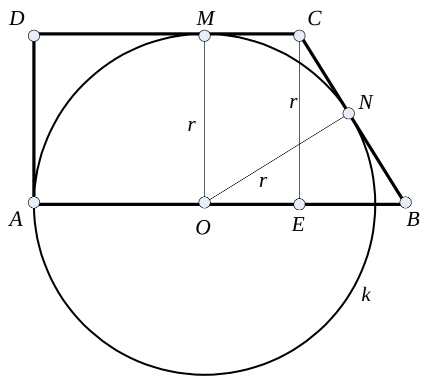
$$\overline{CP} = 2R\cos\measuredangle O_1CO_2 = \overline{O_1O_2}\,\mathrm{ctg}\,\measuredangle O_1CO_2 = \overline{O_1O_2} .$$

47. Во трапезот $ABCD$ со основи AB и CD, $\measuredangle DAB = 90^\circ$ и $\measuredangle ABC = 30^\circ$. Центарот на кружницата k лежи на основата AB и ги допира AD, DC и CB. Пресметај ја плоштината на трапезот ако радиусот на кружницата k е r.

Решение. Нека N и M се допирни точки на k со BC и CD соодветно, а E е подножје на нормалата спуштена од темето C врз основата AB. Јасно е дека

$$h = \overline{EC} = \overline{OM} = \overline{ON} = r ,$$

каде h е висина на трапезот.



Триаголникот CEB е правоаголен, со еден остар агол $\measuredangle EBC = 30^\circ$, па според тоа

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \mathrm{ctg}30^\circ ,\ \overline{EB} = \overline{CE}\cdot\mathrm{ctg}30^\circ = r\sqrt{3} .$$

Од правоаголниот триаголник BNO добиваме

$$\frac{\overline{ON}}{\overline{OB}} = \sin 30^\circ = \tfrac{1}{2} ,$$

па затоа $\overline{OB} = 2\overline{ON} = 2r$. Сега за должината на основата AB имаме

$$a = \overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = r + 2r = 3r ,$$

а за должината на основата DC имаме

$$b = \overline{DC} = \overline{AE} = \overline{AB} - \overline{EB} = 3r - r\sqrt{3} = r(3-\sqrt{3}) .$$

Значи,

$$P = \tfrac{a+b}{2}h = \tfrac{3r+(3-\sqrt{3})r}{2}r = r^2\,\tfrac{6-\sqrt{3}}{2} .$$

48. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник со плоштина еднаква на $\frac{\overline{AB}^2-\overline{CD}^2}{4}$. Докажи, дека ако $\overline{AD} = \overline{BC}$, тогаш $AD \perp BC$.

Решение. Нека

$$AB \cap CD = E, \measuredangle AEB = \theta, \overline{AB} = a, \overline{CD} = b, \overline{CE} = x, \overline{DE} = y \text{ и } \overline{AD} = \overline{BC} = z .$$

Ако ги одземеме равенствата

$$a^2 = (x \pm z)^2 + (y \pm z)^2 - 2(x \pm z)(y \pm z)\cos\theta$$
$$b^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta,$$

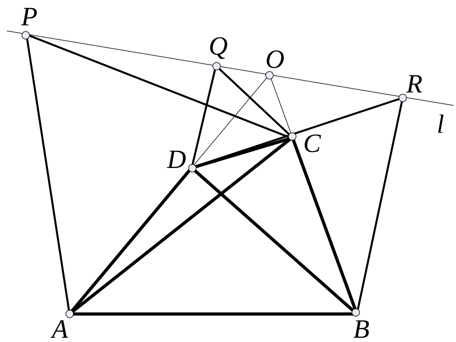
добиваме $a^2 - b^2 = 2z(\pm x \pm y + z)(1-\cos\theta)$. Ако знакот е негативен, тогаш $z > x + y > x$, па значи D е меѓу A и E, што противречи на првото равенство. Според тоа,

$$P_{ABCD} = P_{ABE} - P_{CDE} = ((x+z)(y+z) - xy)\frac{\sin\theta}{2} = z(x+y+z)\frac{\sin\theta}{2} = \frac{a^2-b^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2},$$

од каде следува дека $\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = 1$, т.е. $\theta = 90^\circ$.

49. Нека $ABCD$ е четириаголник таков што $\overline{AD} = \overline{BC}$ и $\measuredangle A + \measuredangle B = 120^\circ$. Рамностраните триаголници ACP, DCP, DBR се на иста страна од правата AB. Докажи дека точките P, Q и R се колинеарни.

Решение. Нека O е пресечна точка на AD и BC. Бидејќи $\measuredangle A + \measuredangle B = 120^\circ$ добиваме дека $\measuredangle AOB = 60^\circ$. Нека l е симетралата на надворешниот агол во темето O на триаголникот AOB.



Од $\measuredangle APC = 60^\circ = \measuredangle AOC$ добиваме дека O, P, A и C припаѓаат на една кружница. Според тоа

$$\measuredangle POA = \measuredangle PCA = 60^\circ.$$

Надворешниот агол на триаголникот AOB е 120° па PO е негова симетрала. Значи, P припаѓа на правата l. Слично, Q и R припаѓаат на l, па P, Q и R се колинеарни.

50. Квадратот $ABCD$ со отсечките RQ и PT кои се сечат во точката O и се паралелни со неговите страни е разделен на четири правоаголници (направи цртеж). Плоштината на правоаголникот $ORCP$ е двапати поголема од плоштината на правоаголникот $OQAT$.

Колку е вредноста на аголот $\measuredangle PAR$?

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека должината на страната на квадратот е 1. Ќе воведеме ознаки $\overline{AT} = \overline{DP} = x$, $\overline{AQ} = \overline{BR} = y$ (направи цртеж) и од условот на задачата добиваме

$$(1-x)(1-y) = 2xy, \text{ т.е. } x + y = 1 - xy.$$

Ќе го пресметаме збирот на аглите $\measuredangle DAP$ и $\measuredangle RAB$. Притоа

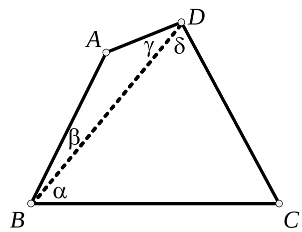
$$\operatorname{tg}(\measuredangle DAP + \measuredangle RAB) = \frac{\operatorname{tg}\measuredangle DAP + \operatorname{tg}\measuredangle RAB}{1 - \operatorname{tg}\measuredangle RAB \cdot \operatorname{tg}\measuredangle DAP} = \frac{\frac{x}{1} + \frac{y}{1}}{1 - \frac{x}{1}\frac{y}{1}} = 1.$$

Сега, јасно е дека $\measuredangle DAP + \measuredangle RAB = 45^\circ$, од каде добиваме

$$\measuredangle PAR = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

51. Определи ги сите конвексни четириаголници во кои збирот на синусите на спротивните агли се еднакви.

Решение. Да го разгледаме конвексниот четириаголник $ABCD$ (види цртеж). Нека BD е неговата дијагонала и ќе воведеме ознаки $\measuredangle ABD=\gamma$, $\measuredangle CDB=\delta$, $\measuredangle ABD=\beta$ и $\measuredangle CBD=\alpha$. Тогаш од условот на задачата имаме



$$\measuredangle BAD=180^\circ-(\beta+\gamma)$$

$$\measuredangle BCD=180^\circ-(\alpha+\delta)$$

па според тоа

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\gamma+\delta)=\sin[180^\circ-(\beta+\gamma)]+\sin[180^\circ-(\alpha+\delta)]$$

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\gamma+\delta)=\sin(\beta+\gamma)+\sin(\alpha+\delta)$$

Според формулата за збир од два синуси, добиваме

$$2\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha-\delta}{2}\ .$$

Ако во последните два изрази поделиме со израз различен од нула, добиваме

$$\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}=\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha-\delta}{2}$$

Според формулата за разлика од два косинуси, добиваме

$$-2\sin\frac{\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}+\frac{\beta+\gamma-\alpha-\delta}{2}}{2}\sin\frac{\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}-\frac{\beta+\gamma-\alpha-\delta}{2}}{2}=0$$

$$-2\sin\frac{\beta-\delta}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}=0\ .$$

Од последното равенство, добиваме $\beta=\delta$ или $\alpha=\gamma$.

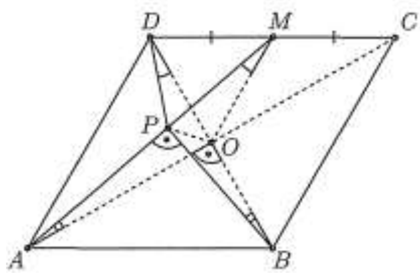
Ако $\alpha=\gamma$ тогаш $BC\parallel AD$, а ако $\beta=\delta$ тогаш $AB\parallel DC$.

Но, тоа значи две страни во четириаголникот се паралелни.

Според тоа, $ABCD$ е паралелограм или трапез.

52. Даден е ромб $ABCD$ со $\measuredangle BAD=\alpha<90^\circ$. Нека M е средината на страната CD и $BP\perp AM$, $(P\in AM)$. Определи ги односот $\overline{BP}:\overline{PD}$ и $\measuredangle BPD$.

Решение. Нека O е пресекот на дијагоналите AC и BD. Од $\measuredangle APB=90^\circ=\measuredangle AOB$ следува дека четириаголникот $ABOP$ е тетивен. Тогаш



$$\begin{aligned}\measuredangle POD&=180^\circ-\measuredangle POB\\&=\measuredangle PAB=\measuredangle PMD\end{aligned},$$

па затоа четириаголникот $DPOM$ е тетивен. Од

$$\measuredangle PDO=\measuredangle PMO \text{ и } \measuredangle PBO=\measuredangle PAO$$

следува, дека $\triangle BDP\sim\triangle AMO$. Освен тоа, OM е средна линија за $\triangle ACD$, па затиоа

$$\measuredangle BPD=\measuredangle AOM=180^\circ-\frac{\alpha}{2} \text{ и } \overline{BP}:\overline{PD}=\overline{AO}:\overline{OM}=\overline{AC}:\overline{AD}=2\cos\frac{\alpha}{2}\ .$$

53. Дадена е кружница со центар на страната AB на тетивниот четириаголник $ABCD$. Останатите три страни ја допираат кружница. Докажи дека

$$\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}.$$

Решение. *Прв начин.* За четириаголник важи

$$\alpha+\gamma=\pi, \quad \beta+\delta=\pi.$$

Центарот O на кружницата е пресек на симетралите на аглите γ и δ. Нека FHG е нормала на симетралите на аглите $\angle FAH=\angle GOH=\alpha$. Значи,

$$\overline{AH}=\overline{AF} \text{ и } \overline{HO}=\overline{GO} \qquad (1)$$

Од

$$\angle OFG=\tfrac{\alpha}{2}=\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\gamma}{2}=\angle COE \text{ и } \overline{OE}=\overline{OF}$$

следува $\Delta FGO\cong\Delta OCE$ т.е.

$$\overline{GO}=\overline{CE} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме

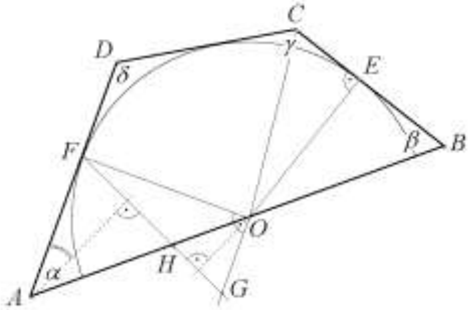
$$\overline{AO}=\overline{AH}+\overline{HO}=\overline{AF}+\overline{CE} \qquad (3)$$

Аналогно добиваме

$$\overline{BO}=\overline{BE}+\overline{DF}. \qquad (4)$$

Од (3) и (4) добиваме

$$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BC}.$$



Втор начин. Нека O е центар на кружницата, r е нејзин радиус, а E и F се точки во кои таа ги допира страните BC и AD. Тогаш

$$\overline{BE}=r\operatorname{ctg}\beta, \quad \overline{EC}=r\operatorname{ctg}\tfrac{\gamma}{2}, \quad \overline{DF}=r\operatorname{ctg}\tfrac{\delta}{2},$$

$$\overline{FA}=r\operatorname{ctg}\alpha, \quad \overline{OB}=\tfrac{r}{\sin\beta}, \quad \overline{OA}=\tfrac{r}{\sin\alpha}.$$

Равенството $\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}$ е еквивалентно со секое од равенставата

$$r(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\tfrac{\delta}{2})+r(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\tfrac{\gamma}{2})=\tfrac{r}{\sin\alpha}+\tfrac{r}{\sin\beta},$$

$$\operatorname{ctg}\tfrac{\gamma}{2}+\operatorname{ctg}\tfrac{\delta}{2}=\tfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}+\tfrac{1-\cos\beta}{\sin\beta}, \text{ т.е. } \operatorname{ctg}\tfrac{\gamma}{2}+\operatorname{ctg}\tfrac{\delta}{2}=\operatorname{tg}\tfrac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\tfrac{\beta}{2},$$

при што последното равенство непосредно следува од равенствата $\alpha+\gamma=\pi$, $\beta+\delta=\pi$.

54. Дали може на кружница со радиус 1 да се изберат 1975 точки, такви што растојанието меѓу секои две од нив да е рационален број?

Решение. Нека A,B,C се три точки на дадената кружница со центар во точката S и $\measuredangle ASB=2\alpha$, $\measuredangle BSC=2\beta$. Тогаш $\measuredangle ASC=2(\alpha+\beta)$ и

$$\overline{AB}=2\sin\alpha, \ \overline{BC}=2\sin\beta, \ \overline{AC}=2\sin(\alpha+\beta).$$

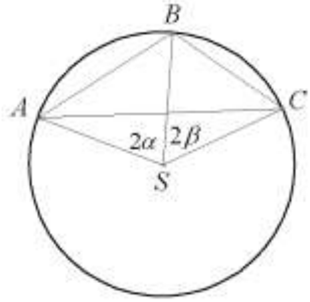
Од $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, следува дека растојанијата меѓу точките A,B,C ќе бидат рационални броеви ако $\sin\alpha, \cos\beta, \cos\alpha, \sin\beta$ се рационални броеви. Ќе го користиме идентитетот

$$\left(\tfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)^2+\left(\tfrac{2mn}{m^2+n^2}\right)^2=1$$

Земаме:

$$\sin\alpha=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2},\quad \cos\alpha=\frac{2mn}{m^2+n^2},$$

а аналогно за аголот β.



Со замена на различни парови цели броеви m, n добиваме агли кои имаат рационален синус и косинус. Понатаму, земаме точка A на кружницата и нанесуваме два пати поголеми агли од најдените. Тогаш растојанието меѓу секои две од дадените точки е рационален број.

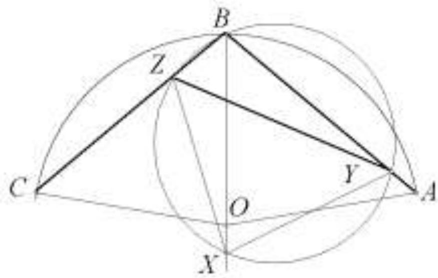
55. Нека A и B се соседни темиња на правилен $n-$аголник, со центар во O. Триаголникот XYZ, кој е складен со триаголникот OAB, на почеток е поставен така што точките X, Y, Z се совпаѓаат со точките O, A, B, соодветно. Потоа $\triangle XYZ$ се движи во рамнината на $n-$аголникот, така што темињата Y и Z остануваат на $n-$аголникот. Каква фигура ќе опише точката X кога точката Y еднаш ќе го помине целиот $n-$аголник?

Решение. Нека A, B, C се три последователни темиња на $n-$аголникот. Разгледуваме што се случува со X кога Y се движи од A до B, а Z од B до C. Кога Y се совпаѓа со A или B јасно е дека X се совпаѓа со O. Затоа ќе го разгледаме случајот кога Y е внатрешна точка на отсечката AB, а Z е внатрешна точка на отсечката BC.

Бидејќи $\measuredangle ZXY+\measuredangle YBZ=\measuredangle BOA+\measuredangle ABO+\measuredangle OAB=180^\circ$, кружницата опишана околу триаголникот XYZ минува низ B. Радиусот на таа кружница го пресметуваме од триаголникот OAB, бидејќи $\measuredangle A=\measuredangle B=\frac{(n-2)\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$. Воведуваме ознака $R=\overline{OA}$ и добиваме

$$2r=\frac{R}{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n})}=\frac{R}{\cos\frac{\pi}{n}},$$

каде r е радиус на опишаната кружница околу триаголникот OAB.



Со α го означуваме аголот со големина $\frac{\pi}{n}$. Аглите XYZ и XBZ се еднакви како агли над ист лак. Затоа

$$\measuredangle OBZ=\measuredangle OBC=\measuredangle XYZ=\measuredangle XBZ$$

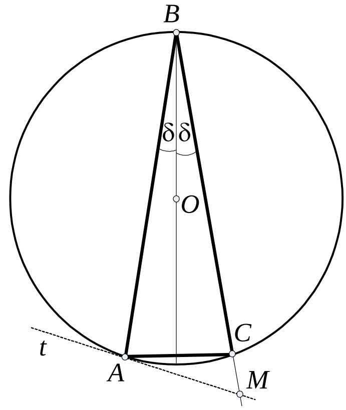
што значи дека точките X, O, B се колинеарни. BX е тетива на кружницата и како B се наоѓа меѓу Y и Z, добиваме дека таа е подолга од BO, а најдолга е кога се спвпаѓа со дијаметарот на таа кружница. Максимална должина OX достигнува кога Y и Z се симетрични во однос на BO и изнесува

$$d=2r-R=R(\frac{1}{\cos\alpha}-1).$$

Бараното множество е ѕвезда која се состои од n сегменти со должина d, при што секој почнува од O и е насочен кон теме од $n-$аголникот.

56. Околу триаголникот ABC со агол $\beta = 2\delta < \frac{\pi}{3}$ е опишана кружница k со радиус R чиј дијаметар го преполовува аголот β. Да се најде плоштината на триаголникот ABM ако $M = t \cap BC$, каде што t е тангента на k повлечена во точката A.

Решение. Бидејќи дијаметарот на опишаната кружница е симетрала на аголот β (види цртеж), следува дека триаголникот ABC е рамнокрак. Според тоа, ќе имаме $\alpha = 90^\circ - \delta$, $\measuredangle CAM = 2\delta$, $\measuredangle ACM = 90^\circ + \delta$, $\measuredangle AMC = 90^\circ - 3\delta$.



Применувајќи ја синусната теорема за $\triangle ABC$, добиваме

$$\overline{AC} = 2R\sin 2\delta,$$

$$\overline{AB} = 2R\sin(90^\circ - \delta) = 2R\cos\delta;$$

ако пак ја примениме на $\triangle AMC$, ќе добиеме:

$$\overline{AM} = \overline{AC} \cdot \frac{\sin(90^\circ + \delta)}{\sin(90^\circ - 3\delta)} = 2R\frac{\cos\delta}{\cos 3\delta}\sin 2\delta.$$

За плоштината на триаголникот $\triangle ABM$:

$$P = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AM}\sin(90^\circ + \delta) = 4R^2 \frac{\sin\delta \sin^4\delta}{\cos 3\delta}.$$

57. Нека α, β и γ се аглите во триаголникот ABC, s е неговиот полупериметар, а R е радиусот на опишаната кружница. Ако

$$3R^2(3 - \cos 2\alpha - \cos 2\beta - \cos 2\gamma) = 2s^2$$

докажи дека триаголникот е рамностран.

Решение. Следните равенства се еквивалентни:

$$3R^2(3 - \cos 2\alpha - \cos 2\beta - \cos 2\gamma) = 2s^2$$

$$3R^2(1 - \cos 2\alpha + 1 - \cos 2\beta + 1 - \cos 2\gamma) = 2s^2$$

$$3R^2(2\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) = 2s^2$$

$$3R^2(2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta + 2\sin^2\gamma) = \frac{(a+b+c)^2}{2}$$

$$3R^2(4\sin^2\alpha + 4\sin^2\beta + 4\sin^2\gamma) = (a+b+c)^2$$

Од синусната теорема имаме

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

а оттука добиваме

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 = 0$$

т.е. $a = b = c$. Значи триаголникот е рамностран.

58. Во правоаголен триаголник $\triangle ABC, \measuredangle C = 90^\circ$, правата што минува низ средината на хипотенузата и центарот на впишаната кружница ја сече катетата AC во точка N под агол од 75°. Одреди ги острите агли во $\triangle ABC$.

Решение. Ако O е центар на впишаната кружница, тогаш $\frac{\alpha+\beta}{2}=45^\circ$ и $\measuredangle AOB=180^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}=135^\circ$. Заради претходното

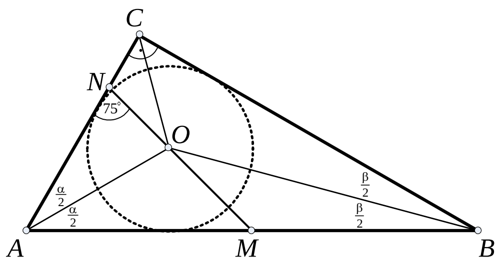
$$\measuredangle AON=180^\circ-(75^\circ+\tfrac{\alpha}{2}),\ \measuredangle AOM=180^\circ-\measuredangle AON=75^\circ+\tfrac{\alpha}{2},$$

$$\measuredangle BOM=135^\circ-\measuredangle AOM=60^\circ-\tfrac{\alpha}{2}$$

За $\triangle AOM$, според синусната теорема

$$\frac{\overline{OM}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\overline{AM}}{\sin(75^\circ+\frac{\alpha}{2})},\text{ т.е.}$$

$$\overline{AM}=\overline{OM}\,\frac{\sin(75^\circ+\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$



За $\triangle BOM$ според синусната теорема

$$\frac{\overline{OM}}{\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{\overline{BM}}{\sin(60^\circ-\frac{\alpha}{2})},\text{ т.е.}$$

$$\overline{BM}=\overline{OM}\,\frac{\sin(60^\circ-\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Точката M е средина на отсечката AB, па затоа $\overline{AM}=\overline{BM}$, т.е.

$$\overline{OM}\,\frac{\sin(75^\circ+\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\overline{OM}\,\frac{\sin(60^\circ-\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Ако во последново равенство замениме $\frac{\beta}{2}=45^\circ-\frac{\alpha}{2}$, добиваме

$$\sin(75^\circ+\tfrac{\alpha}{2})\sin(45^\circ-\tfrac{\beta}{2})=\sin(60^\circ-\tfrac{\alpha}{2})\sin\tfrac{\alpha}{2}.$$

Користејќи адициони теореми добиваме

$$\cos120^\circ-\cos(30^\circ+\alpha)=\cos60^\circ-\cos(60^\circ-\alpha)\Rightarrow$$

$$\cos(60^\circ-\alpha)-\cos(30^\circ+\alpha)=\cos60^\circ-\cos120^\circ=1\ \Rightarrow$$

$$-2\sin45^\circ\sin(15^\circ-\alpha)=1\ \Rightarrow\ 2\sin45^\circ\sin(\alpha-15^\circ)=1\Rightarrow$$

$$\sin(\alpha-15^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \Rightarrow\ \alpha-15^\circ=45^\circ$$

Значи, аглите на триаголникот се $\alpha=60^\circ$, $\beta=30^\circ$.

59. Докажи дека $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{a^2-b^2}{c^2}$, каде a,b,c се должини на страните на триаголник, а α и β се неговите агли.

Решение. Ќе ја трансформираме левата страна на равенството

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}=\frac{(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)}{\sin^2(\pi-\gamma)}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\beta\cos^2\alpha}{\sin^2\gamma}=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta\cos^2\alpha}{\sin^2\gamma}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha(\cos^2\beta+\sin^2\beta)-\sin^2\beta(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\sin^2\gamma}=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\gamma}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\gamma}-\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma}.$$

Ако ја искористиме синусната теорема, имаме $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{a}{c}$ и $\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{b}{c}$, од каде со замена се добива бараното равенство.

60. Нека S е пресекот на дијагоналите на конвексен четириаголник $ABCD$. Одреди го аголот помеѓу дијагоналите на четириаголникот, ако е познато дека

$$\measuredangle SAB=\measuredangle SBC=30^\circ \text{ и } \measuredangle SCD=\measuredangle SDA=45^\circ.$$

Решение. Од синусната теорема применета на секој од триаголниците ACD, ABC и ABD дадени на цртежот, ги добиваме следниве равенства

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\frac{\sin(180^\circ-x)}{\sin 45^\circ}=\frac{\sin x}{\sin 45^\circ},\quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\sin(x-30^\circ)}{\sin(180^\circ-x)}=\frac{\sin(x-30^\circ)}{\sin x} \text{ и } \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\frac{\sin 45^\circ}{\sin(150^\circ-x)}.$$

Со замена во равенството $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$, ја добиваме равенката

$$\frac{\sin 45^\circ}{\sin(150^\circ-x)}=\frac{\sin(x-30^\circ)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\sin 45^\circ},$$

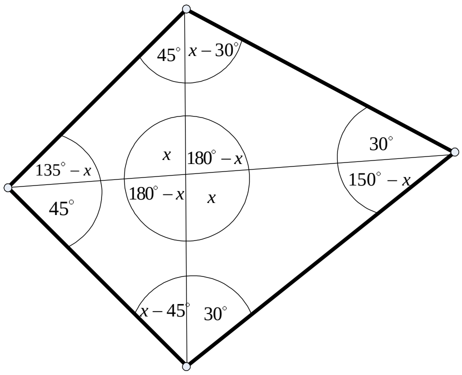
која е еквивалентна со

$$\sin^2 45^\circ=\sin(150^\circ-x)\sin(x-30^\circ),$$

односно со равенката

$$\tfrac{1}{2}=-\tfrac{1}{2}(\cos 120^\circ-\cos(180^\circ-2x)).$$

Последната равенка се сведува на $\cos 2x=-\frac{1}{2}$, чии решенија се $x=60^\circ$ или $x=120^\circ$. Значи помалиот агол меѓу дијагоналите изнесува $x=60^\circ$.



61. Докажи дека

$$\frac{a^2\sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha}+\frac{b^2\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\beta}+\frac{c^2\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma}=0,$$

каде α, β, γ се агли во триаголник, а a, b и c се соодветните страни.

Решение. Собироците од левата страна на равенството ќе ги помножиме и поделиме редоследно со $\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ и ќе ги искористиме равенствата

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=k,$$

при што добиваме

$$\frac{a^2\sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha}+\frac{b^2\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\beta}+\frac{c^2\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma}=$$

$$=(\tfrac{a}{\sin\alpha})^2\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+(\tfrac{b}{\sin\beta})^2\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+(\tfrac{c}{\sin\gamma})^2\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)$$

$$=k^2\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+k^2\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+k^2\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)=$$

$$=k^2[\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)]=(*)$$

Ако ја искористиме адиционата формула

$$\sin(\theta-\varphi)=\sin\theta\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi,$$

добиваме:

$$\begin{aligned}(*) &= k^2[\sin\alpha(\sin\beta\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma)+\sin\beta(\sin\gamma\cos\alpha-\cos\gamma\sin\alpha)\\&\quad+\sin\gamma(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)]\\&= k^2[\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha\\&\quad-\sin\beta\cos\gamma\sin\alpha+\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta-\sin\gamma\cos\alpha\sin\beta]\\&= k^2\cdot 0=0\end{aligned}$$

62. Нека a,b,c се страните а α,β,γ соодветните агли во триаголникот ABC со плоштина P . Докажи дека важи равенството

$$a^2(\sin 2\beta+\sin 2\gamma)+b^2(\sin 2\gamma+\sin 2\alpha)+c^2(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)=12P\ .$$

Решение. Ќе ги прегрупираме собироците на левата страна од равенството во облик

$$(a^2\sin 2\beta+b^2\sin 2\alpha)+(b^2\sin 2\gamma+c^2\sin 2\beta)+(c^2\sin 2\alpha+a^2\sin 2\gamma)\ .$$

Со примена на синусната теорема и формула за синус од двоен агол, ќе трансформираме збировите во заградите. Од $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$ односно од $a\sin\beta=b\sin\alpha$, со замена, првиот збир добива облик

$$\begin{aligned}a^2\sin 2\beta+b^2\sin 2\alpha &= 2a^2\sin\beta\cos\beta+2b^2\sin\alpha\cos\alpha\\&= 2ab\sin\alpha\cos\beta+2ab\sin\beta\cos\alpha\\&= 2ab(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)=2ab\sin(\alpha+\beta)\\&= 2ab\sin(\pi-\gamma)=2ab\sin\gamma=4P\end{aligned}$$

Аналогно,

$$b^2\sin 2\gamma+c^2\sin 2\beta=4P \text{ и } c^2\sin 2\alpha+a^2\sin 2\gamma=4P\ .$$

Собирајќи ги изразите се добива

$$(a^2\sin 2\beta+b^2\sin 2\alpha)+(b^2\sin 2\gamma+c^2\sin 2\beta)+(c^2\sin 2\alpha+a^2\sin 2\gamma)=12P$$

што требаше да се докаже.

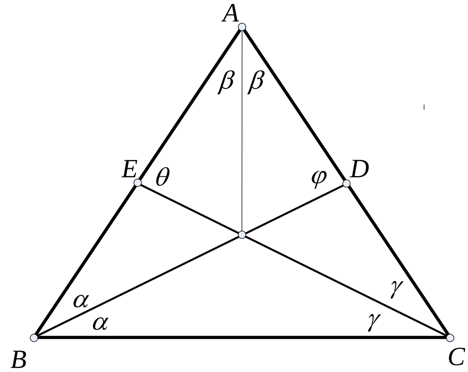
63. Во триаголникот ABC симетралата на $\measuredangle B$ ја сече страната AC во точката D , а симетралата на $\measuredangle C$ ја сече страната AB во точката E . Симетралите се сечат во точката O при што $\overline{OD}=\overline{OE}$.

Докажи дека, или триаголникот ABC е рамнокрак или $\measuredangle BAC=60^\circ$.

Решение. Симетралата на $\measuredangle BAC$ е AO . Нека $\alpha,\beta,\gamma,\theta,\varphi$ се агли како што е прикажано на цртежот. Според синудна теорема имаме

$$\frac{\overline{AO}}{\sin\theta}=\frac{\overline{OE}}{\sin\alpha},\ \frac{\overline{AO}}{\sin\varphi}=\frac{\overline{OD}}{\sin\alpha}\ .$$

Според тоа, $\sin\theta=\sin\varphi$, од каде добиваме $\theta=\varphi$ или θ и φ се суплементни агли. Двата случаи ќе ги разгледаме одвоено.

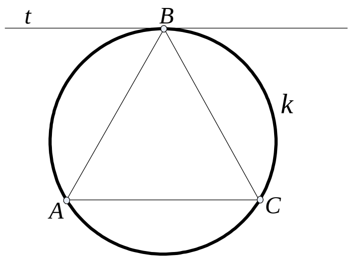


Случај 1. Ако $\theta=\varphi$, тогаш $2\beta+\gamma=\beta+2\gamma$, т.е. $\beta=\gamma$. Според тоа, триаголникот ABC е рамнокрак.

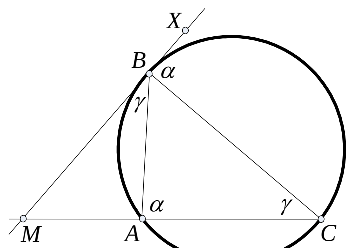
Случај 2. Ако $\theta\neq\varphi$, тогаш θ и φ се суплементни агли. Според тоа, $2\beta+\gamma+\beta+2\gamma=180^\circ$, односно $\beta+\gamma=60^\circ$. Значи, $\measuredangle BAC=60^\circ$ што и требаше да се докаже.

64. Тангентата t во точката B кон опишаната кружница k околу триаголникот ABC ја сече правата AC во точка M. Определи го количникот $\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}}$ ако $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=k$.

Решение. Ако триаголникот ABC е рамнокрак со $\overline{AB}=\overline{BC}$, тогаш $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=1$. Правата која минува низ B и е нормална на тангентата t повлечена во B минува низ ценарот на опишаната кружница и е нормална на отсечката AC. Според тоа $t\parallel AC$ и $t\cap AC=\varnothing$ (види цртеж 1). Затоа овој случај не го разгледуваме (не ги исполнува условите од задачата).



цртеж 1



цртеж 2

Без ограничување на општоста ќе претпоставиме дека $\overline{AB}<\overline{BC}$, цртеж 2. Нека X е точка од тангентата t така што B е меѓу M и X (види цртеж). Аглите $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle MBA$ се еднакви , како периферискi агол над кружен лак и агол меѓу тетива определена со крајните точки на кружниот лак и тангентата во една од крајните точки на лакот. Од исти причини точно е и равенството $\measuredangle XBC=\measuredangle CAB$. Според тоа

$$\sin\measuredangle MBC=\sin(180^\circ-\measuredangle CBX)=\sin\measuredangle CBX=\sin\measuredangle CAB. \qquad (1)$$

Од синусната теорема за триаголникот ABC имаме

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\measuredangle CAB}=\frac{\overline{BA}}{\sin\measuredangle BCA}=\frac{\overline{BA}}{\sin\measuredangle MBA}. \qquad (2)$$

Од формулите за пресметување на плоштина на триаголник и од равенствата (1) и (2), имаме

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MC}}=\frac{P_{\Delta MBA}}{P_{\Delta MBC}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{MB}\cdot\overline{BA}\cdot\sin\measuredangle MBA}{\frac{1}{2}\overline{MB}\cdot\overline{BC}\cdot\sin\measuredangle MBC}=\frac{\overline{BA}^2}{\overline{BC}^2}\frac{\sin\measuredangle MBA}{\overline{BA}}\frac{\overline{BC}}{\sin\measuredangle MBC}$$

$$=\frac{\overline{BA}^2}{\overline{BC}^2}\frac{\sin\measuredangle MBA}{\overline{BA}}\frac{\overline{BC}}{\sin\measuredangle BAC}=\frac{\overline{BA}^2}{\overline{BC}^2}\cdot 1=k^2.$$

65. Точката O припаѓа на внатрешноста на триаголникот ABC, при што

$$\measuredangle COA = \measuredangle B + 60^\circ$$

$$\measuredangle COB = \measuredangle A + 60^\circ$$

$$\measuredangle AOB = \measuredangle C + 60^\circ$$

Ако AO, BO и CO се страни на триаголник, тогаш постои триаголник на кој должините на страните му се еднакви на должините на висините на триаголникот ABC. Докажи!

Решение. Нека D е точка на пресек на CO со опишаната кружница околу триаголникот ABC. Тогаш

$$\measuredangle BDO = \measuredangle BDC = \measuredangle BAC = \measuredangle A,$$

како агли над ист кружен лак.

Ќе го разгледаме триаголникот $\triangle OBD$. Јасно е дека

$$180^\circ - \measuredangle BOD = \measuredangle BDO + \measuredangle OBD$$
$$\measuredangle BOC = \measuredangle BDO + \measuredangle OBD$$

а сега според условот од задачата

$$\measuredangle OBD = \measuredangle BOC - \measuredangle BOD = \measuredangle EOC - \measuredangle A = 60^\circ.$$

Според синусна теорема за триаголникот ΔOBD, имаме

$$\frac{\overline{OB}}{\sin\measuredangle A} = \frac{\overline{OD}}{\sin 60^\circ}. \qquad (1)$$

Потполно аналогно, разгледувајќи го триаголникот ΔAOD, добиваме

$$\frac{\overline{OA}}{\sin\measuredangle B} = \frac{\overline{OD}}{\sin 60^\circ} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека

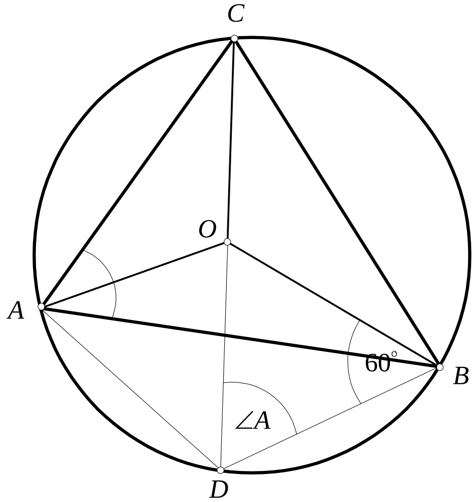
$$\frac{\overline{OB}}{\sin\measuredangle A} = \frac{\overline{OA}}{\sin\measuredangle B}. \qquad (3)$$

Од триаголникот $\triangle ABC$ се добива

$$\sin\measuredangle A = \frac{h_b}{c},\ \sin\measuredangle B = \frac{h_a}{c} \qquad (4)$$

Ако (4) ги замениме во (3), тогаш добиваме

$$\frac{\overline{OB}}{h_b} = \frac{\overline{OA}}{h_a}.$$



Со потполно аналогна постапка, продолжувајќи ги AO и BO, се добиваат равенствата

$$\frac{\overline{OB}}{h_b} = \frac{\overline{OC}}{h_c} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{OA}}{h_a} = \frac{\overline{OC}}{h_c}.$$

Од равенствата $\frac{\overline{OA}}{h_a} = \frac{\overline{OB}}{h_b} = \frac{\overline{OC}}{h_c}$ и од тоа што OA, OB, OC се страни на триаголник, добиваме дека и h_a, h_b, h_c се должини на страни на триаголник, сличен на него.

66. Најди ги сите тројки (a,b,c) каде што a, b, c се должини на страни на триаголникот ABC со агли α, β, γ, такви што броевите $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ се должини на страни на триаголник, складен со триаголникот ABC.

Решение. Од условите на задачата следува дека $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ се позитивни. Значи, триаголникот ABC е остроаголен. Нека $a \le b \le c$. Тогаш $\alpha \le \beta \le \gamma$, па $\cos\gamma \le \cos\beta \le \cos\alpha$. Од условот на задачата следува $a = \cos\gamma$ и $c = \cos\alpha$. Оттука следува дека $a : c = \cos\gamma : \cos\alpha$. Од синусна теорема добиваме $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$, па од ова и претходното равенство добиваме

$$\cos\gamma : \cos\alpha = \sin\alpha : \sin\gamma,$$

односно $\sin\alpha\cos\alpha = \sin\gamma\cos\gamma$. Значи $\sin 2\alpha = \sin 2\gamma$ или $2\alpha + 2\gamma = \pi$ (ова не е можно, бидејќи тогаш $\beta = \frac{\pi}{2}$, па $\cos\beta = 0$). Значи $\alpha = \gamma$, односно $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, па постои само една тројка со бараното својство. Тоа е тројката $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

67. Во еден триаголник должините на страните a, b, c во дадениот редослед се последователни членови на аритметичка прогресија. Докажи дека

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{\alpha}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{3}$$

(α е агол спроти страната a; γ е агол спроти страната c).

Решение. Од синусната теорема имаме $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Ако замениме во равенството

$$a + c = 2b$$

добиваме

$$\sin\alpha + \sin\gamma = 2\sin\beta.$$

Ако ги искористиме идентитетите

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \text{ и } \sin 2x = 2\sin x\cos x,$$

добиваме

$$2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Од друга страна, од равенството

$$\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} = \sin(90^\circ - \frac{\beta}{2}) = \cos\frac{\beta}{2},$$

добиваме

$$\cos\frac{\beta}{2}(\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} - 2\sin\frac{\beta}{2}) = 0.$$

Бидејќи $\cos\frac{\beta}{2} \ne 0$ и $\sin\frac{\beta}{2} = \cos(90^\circ - \frac{\beta}{2}) = \cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$, добиваме

$$\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} - 2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2} = 0.$$

Сега заради формулате $\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$ имаме

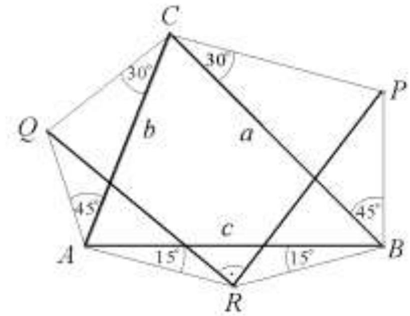
$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = 0$$

$$3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

од каде се добива точноста на бараното равенство.

68. Над страните на триаголникот ABC од надворешна страна конструирани се триаголници BPC, QAC и ARB такви што

$$\measuredangle CBP = \measuredangle QAC = 45^\circ,$$
$$\measuredangle PCB = \measuredangle ACQ = 30^\circ,$$
$$\measuredangle RBA = \measuredangle BAR = 15^\circ.$$



Докажи дека $\measuredangle QRP = 90^\circ$ и $\overline{QR} = \overline{RP}$.

Решение. Нека α, β, γ се аглите при темињата A, B, C; a, b, c се спротивните страни на темињата и P е плоштината на ΔABC. Од синусната теорема добиваме

$$\overline{CP} = a\frac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{a}{\sqrt{2}\cos 15^\circ},\ \overline{CQ} = b\frac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{b}{\sqrt{2}\cos 15^\circ},$$

па затоа

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= \overline{CP}^2 + \overline{CQ}^2 - 2\overline{CP}\,\overline{CQ}\cos(\gamma + 60^\circ)\\ &= \frac{a^2}{2\cos^2 15^\circ} + \frac{b^2}{2\cos^2 15^\circ} - 2\frac{ab}{2\cos^2 15^\circ}\left(\tfrac{1}{2}\cos\gamma - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\gamma\right)\\ &= \frac{a^2}{2\cos^2 15^\circ} + \frac{b^2}{2\cos^2 15^\circ} - \frac{a^2+b^2-c^2}{4\cos^2 15^\circ} + \frac{P\sqrt{3}}{\cos^2 15^\circ} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\cos^2 15^\circ} + \frac{P\sqrt{3}}{\cos^2 15^\circ}.\end{aligned}$$

Повторно од синусната теорема следува

$$\overline{AQ} = b\frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{b}{2\cos 15^\circ},\ \overline{AR} = c\frac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{c}{2\cos 15^\circ}.$$

па затоа

$$\begin{aligned}\overline{QR}^2 &= \overline{AQ}^2 + \overline{AR}^2 - 2\overline{AQ}\,\overline{AR}\cos(\alpha + 60^\circ)\\ &= \frac{b^2}{4\cos^2 15^\circ} + \frac{c^2}{4\cos^2 15^\circ} - 2\frac{bc}{4\cos^2 15^\circ}\left(\tfrac{1}{2}\cos\alpha - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)\\ &= \frac{b^2}{2\cos^2 15^\circ} + \frac{c^2}{2\cos^2 15^\circ} - \frac{b^2+c^2-a^2}{8\cos^2 15^\circ} + \frac{P\sqrt{3}}{\cos^2 15^\circ}\\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{8\cos^2 15^\circ} + \frac{P\sqrt{3}}{2\cos^2 15^\circ}.\end{aligned}$$

На сличен начин се покажува дека

$$\overline{QR}^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{8\cos^2 15^\circ} + \frac{P\sqrt{3}}{2\cos^2 15^\circ}.$$

Од досега изнесеното следува дека $\overline{PR} = \overline{QR}$ и $\overline{PR}^2 + \overline{QR}^2 = \overline{PQ}^2$, што значи дека триаголникот PQR е рамнокрак и правоаголен со прав агол кај темето R.

69. Ако a, b, c се должините на страните, а α, β, γ се аглите наспроти страните на триаголникот. Докажи дека, ако $a + b = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}(a\operatorname{tg}\alpha + b\operatorname{tg}\beta)$, тогаш триаголникот е рамнокрак.

Решение. Ако α, β, γ се аглите на триаголникот, тогаш

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

што значи дка даденото равенство е еквивалентно на равенството

$$a(1-\operatorname{tg}\alpha\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}})+b(1-\operatorname{tg}\beta\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}})=0\,.$$

Ако последното равенство го помножиме со $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\alpha\cos\beta$, добиваме

$$a\cos\beta(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\alpha-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\alpha)+b\cos\alpha(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\beta-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\beta)=0\,.$$

Последното равенство е еквивалентно на равенството

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}(a\cos\beta-b\cos\alpha)=0\,.$$

Значи, $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$, т.е. $\alpha=\beta$, па триаголникот е рамнокрак, или $a\cos\beta=b\cos\alpha$. Од синусната теорема имаме $a\sin\beta=b\sin\alpha$, па ако ги квадрираме последните две равенства и ги собиреме добиваме

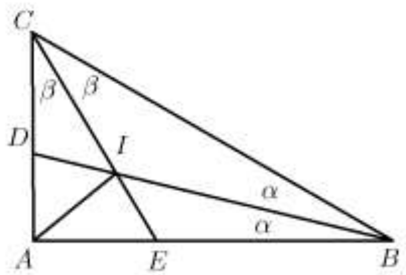
$$a^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=b^2(\cos^2\beta+\sin^2\beta)\,,$$

од што следува $a=b$, т.е. триаголникот е рамнокрак.

70. Даден е $\triangle ABC$ за кој $\measuredangle A=90^\circ$. Точките D и E се на страните AC и AB, соодветно и важи $\measuredangle ABD=\measuredangle DBC$ и $\measuredangle ACE=\measuredangle ECB$. Отсечките BD и CE се сечат во точката I. Дали е можно должините на сите отсечки AB, AC, BI, ID, CI и IE да се природни броеви.

Решение. Ќе докажеме дека сите дадени отсечки не може да имаат должини природни броеви. Нека $\measuredangle ABD=\measuredangle DBC=\alpha$ и $\measuredangle ACE=\measuredangle ECB=\beta$ (види цртеж). Бидејќи I е центар на впишаната кружница за $\triangle ABC$ и $\measuredangle A=90^\circ$, добиваме $\measuredangle BAI=\measuredangle CAI=45^\circ$. Од синусната теорема за $\triangle ABI$ следува

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BI}}=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\sin 45^\circ}=\sin\alpha+\cos\alpha\,.$$



Според тоа, бројот $s=\sin\alpha+\cos\alpha$ е рационален. Од друга страна имаме

$$s=\sin(45^\circ-\beta)+\cos(45^\circ-\beta)=\sqrt{2}\cos\beta$$

па затоа $\cos\beta$ е ирационален број. Но, од правоаголниот $\triangle ACE$ имаме

$$\cos\beta=\frac{\overline{AC}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CI}+\overline{IE}}$$

и ова е рационален број, што е противречност. Од добиената противречност следува дека не е можно сите посочени отсечки да имаат должини природни броеви.

71. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ за кој најкратката страна е Ab и најдолгата страна е $CD\,(\overline{AB}<\overline{CD})$. Докажи дека на отсечката CD може да се избере точка E со следново својство: за секоја точка $P\neq E$ од отсечката CD должината на отсечката, која ги поврзува центрите на кружниците опишани околу триаголниците APD и BPE, не зависи од изборот на точката P.

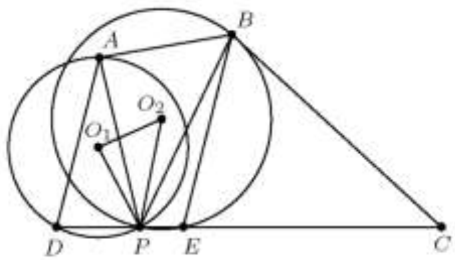
Решение. Ќе докажеме, дека бараната точка E е пресечната точка ма правата CD и правата која минува низ точката B и е паралелна на AD. Прво ќе докажеме дека E лежи на отсечката CD. Од условот имаме $\overline{AB} \le \overline{AD}$ и $\overline{BC} \le \overline{CD}$, па затоа $\measuredangle ABD \ge \measuredangle ADB$ и $\measuredangle CBD \ge \measuredangle BDC$. Значи

$$\measuredangle ABC = \measuredangle ABD + \measuredangle DBC \ge \measuredangle ADB + \measuredangle BDC \ge \measuredangle ADC .$$

Аналогно, $\measuredangle BAD \ge \measuredangle BCD$ и тогаш

$$\measuredangle ABC + \measuredangle BAD \ge \measuredangle BCD + \measuredangle CDA \text{, т.е. } \measuredangle ABC + \measuredangle BAD \ge 180^\circ .$$

Лесно се гледа дека $\measuredangle ABC + \measuredangle BAD > 180^\circ$, бидејќи во спротивно четириаголникот $ABCD$ ќе биде паралелограм. Оттука добиваме, дека E лежи на отсечката CD.

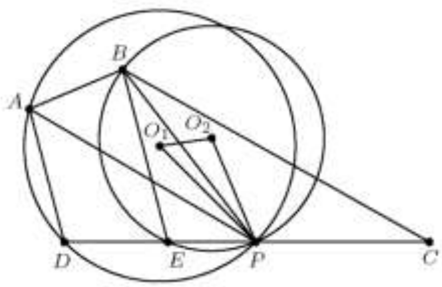


Ќе докажеме, дека за произволна точка P од отсечката CD, различна од E, е исполнето равенството $\measuredangle O_1PO_2 = \measuredangle APB$, каде O_1 и O_2 се соодветно центрите на кружниците опишани околу триаголниците APD и BPE.

Прв случај. Ако $\measuredangle ADP < 90^\circ$, тогаш $\measuredangle BEC < 90^\circ$ и точките O_1 и C се од различна страна на правата PA, а точките O_2 и C се од различна страна на правата PB (цртеж десно). Тогаш

$$\measuredangle APO_1 = 90^\circ - \measuredangle ADP = 90^\circ - \measuredangle BEC = \measuredangle BPO_2 ,$$

па затоа $\measuredangle O_1PO_2 = \measuredangle APB$.



Втор случај. Ако $\measuredangle ADP \ge 90^\circ$, аналогно на првиот случај (сега точките O_1 и C се од иста страна на правата PA, а точките O_2 и C се од иста страна на правата PB, цртеж десно), повторно имаме

$$\measuredangle O_1PO_2 = \measuredangle APB .$$

Од синусната теорема добиваме

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{2\overline{O_1P}\sin\measuredangle ADP}{2\overline{O_2P}\sin\measuredangle BEP} = \frac{\overline{O_1P}}{\overline{O_2P}} ,$$

па затоа $\triangle APB \sim \triangle O_1PO_2$. Според тоа,

$$\overline{O_1O_2} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}\overline{O_1P} = \frac{\overline{AB}}{2\sin\measuredangle ADC} ,$$

што значи дека $\overline{O_1O_2}$ не зависи од изборот на точката P.

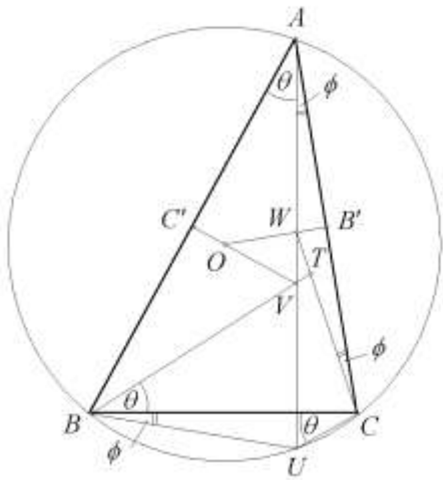
72. Нека $\measuredangle A$ е најмалиот агол во ΔABC. Точките B и C ја делат опишаната кружница околу триаголникот на два кружни лака. Нека U е внатрешна точка од лакот меѓу B и C кој не ја содржи точката A. Симетралите на страните AB и AC ја сечат правата AU во точките V и W соодветно. Правите BV и CW се сечат во точката T. Докажи дека $\overline{AU} = \overline{TB} + \overline{TC}$.

Решение. Нека $\alpha = \measuredangle A$, B', C' се средини на страните AC и AB соодветно и $\theta = \measuredangle BAU$, $\varphi = \measuredangle UAC$. Бидејќи WB' е симетрала на страната AC, $\angle ACW = \varphi$ и аналогно, бидејќи VC' е симетрала на страната AB, $\angle ABV = \theta$. Оттука добиваме

$$\measuredangle BTC = \pi - (\beta - \theta + \gamma - \varphi) = \alpha + (\theta + \varphi) = \alpha + \alpha = 2\alpha$$

Применувајќи ја синусната теорема за триаголникот BTC добиваме

$$\frac{\overline{TB}}{\sin(\gamma-\varphi)} = \frac{\overline{TC}}{\sin(\beta-\theta)} = \frac{\overline{BC}}{\sin 2\alpha} = \frac{2R\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}$$



каде што R е радиусот на опишаната кружница. (Да забележиме дека заради условот на α, $\cos\alpha > 0$ и дека $\beta - \theta > 0, \gamma - \varphi > 0$). Следува:

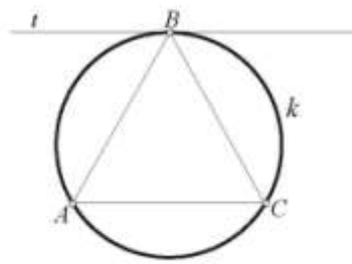
$$\begin{aligned}\overline{TB} + \overline{TC} &= \frac{R}{\cos\alpha}(\sin(\beta-\theta) + \sin(\gamma-\varphi)) \\ &= \frac{2R\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma+\varphi-\theta}{2}}{\cos\alpha} \\ &= 2R\cos\frac{\beta-\gamma+\varphi-\theta}{2}.\end{aligned}$$

Бидејќи точките U, A, B и C лежат на кружницата, $\measuredangle UBC = \varphi$ и $\measuredangle UCB = \theta$, а оттука следува:

$$\begin{aligned}\overline{AU} &= 2R\sin(\beta+\varphi) = 2R\sin(\gamma+\theta) \\ &= R\big(\sin(\varphi+\varphi) + \sin(\gamma+\theta)\big) \\ &= 2R\sin\frac{\beta+\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma+\varphi-\theta}{2} \\ &= 2R\cos\frac{\beta-\gamma+\varphi-\theta}{2}.\end{aligned}$$

односно $\overline{AU} = \overline{TB} + \overline{TC}$.

73. Тангентата t во точката B кон опишаната кружница k околу триаголникот ABC ја сече правата AC во точка M. Определи го $\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}}$ ако $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = k$.



Решение. Ако триаголникот ABC е рамнокрак со $\overline{AB} = \overline{BC}$, тогаш $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 1$. Правата која минува низ B и е нормална на тангентата t повлечена во B минува низ ценарот на опишаната кружница и е нормална на отсечката AC. Според тоа $t \parallel AC$ и $t \cap AC = \varnothing$ (види цртеж десно). Затоа овој случај не го разгледуваме (не ги исполнува условите од задачата).

Без ограничување на општоста ќе претпоставиме дека $\overline{AB} < \overline{BC}$, цртеж 2. Нека X е точка од тангентата t така што B е меѓу M и X (види цртеж лево). Аглите $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle MBA$ се еднакви, како перифериски агол над кружен лак и агол меѓу тетива определена со крајните точки на кружниот лак и тангентата во една од крајните точки на лакот. Од исти причини точно е и равенството $\measuredangle XBC = \measuredangle CAB$. Според тоа

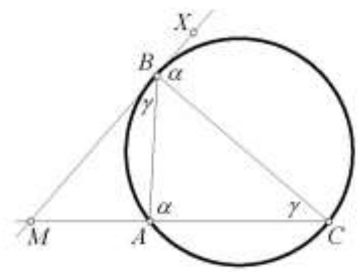
$$\sin\measuredangle MBC = \sin(180^\circ - \measuredangle CBX) = \sin\measuredangle CBX = \sin\measuredangle CAB. \qquad (1)$$

Од синусната теорема за триаголникот ABC имаме

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\measuredangle CAB} = \frac{\overline{BA}}{\sin\measuredangle BCA} = \frac{\overline{BA}}{\sin\measuredangle MBA}. \qquad (2)$$

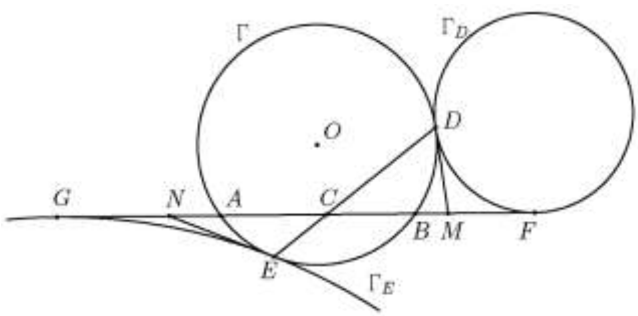
Од формулите за пресметување на плоштина на триаголник и од равенствата (1) и (2), имаме

$$\begin{aligned}\frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} &= \frac{P_{\Delta MBA}}{P_{\Delta MBC}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{MB}\cdot\overline{BA}\cdot\sin\measuredangle MBA}{\frac{1}{2}\overline{MB}\cdot\overline{BC}\cdot\sin\measuredangle MBC}\\ &= \frac{\overline{BA}^2}{\overline{BC}^2}\,\frac{\sin\measuredangle MBA}{\overline{BA}}\,\frac{\overline{BC}}{\sin\measuredangle MBC}\\ &= \frac{\overline{BA}^2}{\overline{BC}^2}\,\frac{\sin\measuredangle MBA}{\overline{BA}}\,\frac{\overline{BC}}{\sin\measuredangle BAC}\\ &= \frac{\overline{BA}^2}{\overline{BC}^2}\cdot 1 = k^2.\end{aligned}$$



74. Дадени се кружница Γ и нејзина тетива AB. Точката C лежи на тетивата AB и DE е тетива која минува низ C. Кружницата Γ_D ги допира Γ во точката D и правата AB во точката F, а кружницата Γ_E ги допира Γ во точката E и правата AB во точката G. Докажи дека $\overline{CA} = \overline{CB}$ ако и само ако $\overline{CF} = \overline{CG}$.

Решение. Нека тангентите на Γ во точките D и E ја сечат правата AB во точките M и N, соодветно и нека O е центарот на кружницата Γ.



Нека $\overline{CA} = \overline{CB}$. Тогаш заради правите агли четириаголниците $OCDM$ и $OCNE$ се тетивни. Оттука следува

$$\measuredangle MOD = \measuredangle MCD = \measuredangle NCE = \measuredangle NOE,$$

па затоа $\triangle MOD \cong \triangle NOE$, од што следува $\overline{OM} = \overline{ON}$ и $\overline{DM} = \overline{EN}$. Првото равенство заедно со $OC \perp MN$ дава $\overline{CM} = \overline{CN}$, па затоа

$$\overline{CF} = \overline{CM} + \overline{MF} = \overline{CM} + \overline{MD} = \overline{CN} + \overline{NE} = \overline{CN} + \overline{NG} = \overline{CG}.$$

Нека $\overline{CF} = \overline{CG}$. Тогаш

$$\overline{CM} + \overline{MD} = \overline{CM} + \overline{MF} = \overline{CF} = \overline{CG} = \overline{CN} + \overline{NG} = \overline{CN} + \overline{NE}.$$

Ако означиме $\measuredangle EDO = \measuredangle DOE = \varphi$, тогаш аглите $\measuredangle CDM$ и $\measuredangle CEN$ се $90^\circ \pm \varphi$, при соодветен избор на знаците. Во сите случаи имаме

$$\sin\measuredangle CDM = \sin\measuredangle CEN = \cos\varphi.$$

Тогаш од синусната теорема применета на $\triangle CDM$ и $\triangle CEN$ следува

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{MD}} = \frac{\cos\varphi}{\sin\gamma} = \frac{\overline{CN}}{\overline{EN}},$$

од што заедно со $\overline{CM} + \overline{MD} = \overline{CN} + \overline{NE}$ следува $\overline{CM} = \overline{CN}$ и $\overline{MD} = \overline{NE}$. Според тоа, $\triangle MOD \cong \triangle NOE$, па затоа $\overline{OM} = \overline{ON}$ и како OC е тежишна линија во рамнокракиот $\triangle NMO$ добиваме $OC \perp MN \equiv AB$. Последното значи $\overline{CA} = \overline{CB}$, што и требаше да се докаже.

75. Пресметај го аголот γ во триаголникот ABC, ако

$$\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c},$$

каде a,b,c се должини на страните на триаголникот ABC наспроти темињата A,B,C соодветно и γ е аголот кај темето C.

Решение. Го множиме равенството $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ со $a+b+c>0$ и добиваме еквиваалентно равенство

$$\frac{b}{a+c} + \frac{a}{b+c} = 1 .$$

Последното равенство го множиме со $(a+c)(b+c)>0$ и добиваме еквивалентно равенство

$$b^2 + bc + a^2 + ac = ab + ac + cb + c^2$$

или

$$c^2 = b^2 + a^2 - ab . \qquad (*)$$

Од друга страна според косинусна теорема имаме $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, а заради (*) добиваме $\cos\gamma = \frac{1}{2}$, од каде добиваме дека $\gamma = 60^\circ$.

76. Нека за аглите α, β и γ во триаголникот ABC важи равенството

$$\frac{\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = 1 .$$

Пресметај го аголот α.

Решение. Применувајќи ги синусната и косинусната теорема даденото равенство го трансформираме на следниов начин

$$1 = \frac{\frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} - \frac{a^2}{4R^2}}{\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{bc} = \frac{2bc\cos\alpha}{bc} = 2\cos\alpha .$$

Според тоа $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Бидејќи α е агол во триаголник добиваме $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

77. Нека за аглите α, β, γ на триаголникот ABC важи равенството

$$\frac{\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = 1 .$$

Пресметајте го аголот α.

Решение. Според синусната теорема имаме: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, па затоа

$$1=\frac{\sin^2\beta+\sin^2\gamma-\sin^2\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}=\frac{\frac{b^2}{4R^2}+\frac{c^2}{4R^2}-\frac{a^2}{4R^2}}{\frac{bc}{4R^2}}=\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}.$$

Значи,

$$a^2=b^2+c^2-bc. \tag{1}$$

Од косинусна теорема имаме

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha. \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме $2\cos\alpha=1$ а оттука $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

78. Нека $a=p^2+p+1$, $b=p^2+2p$ и $c=2p+1$ ($p>0$) се должините на страните на еден траиголник. Да се пресмета средниот по големина агол на тој триаголник.

Решение. Прво имаме

$$a=(p+1)^2-p, \qquad b=(p+1)^2-1, \qquad c=2p+1,$$

па

- ако $0<p<1$, тогаш $b<a<c$;
- ако $p=1$, топгаш $a=b=c=3$;
- ако $p>1$, тогаш $c<a<b$.

Значи, a е средна по големина страна на триаголникот, па α е среден по големина агол на триаголникот. Според косинусната теорема, имаме

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(p^2+2p)^2+(2p+1)^2-(p^2+p+1)^2}{2(p^2+2p)(2p+1)}=\frac{1}{2},$$

па $\alpha=60^\circ$.

79. Нека a,b и c се должините на страните на еден триаголник и нека α,β и γ се неговите внатрешни агли (аголот α лежи спроти страната a, а β и γ - спроти b и c соодветно). Да се докаже дека

$$A=(\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{b})\cos\alpha+(\tfrac{c}{a}+\tfrac{a}{c})\cos\beta+(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{a})\cos\gamma=3$$

Решение. Со примена на косинусна теорема, за изразот A имаме

$$\begin{aligned}A&=(\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{b})\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+(\tfrac{c}{a}+\tfrac{a}{c})\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{a})\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\&=\frac{(b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)}{2b^2c^2}+\frac{(a^2+c^2)(a^2+c^2-b^2)}{2a^2c^2}+\frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2-c^2)}{2a^2b^2}\end{aligned}$$

од каде што, по средувањето, ќе добиеме $A=3$.

80. Шест квадрати се поставени како што е прикажано на цртежот. Најдете го односот на збирот плоштините на квадратите A, B и C и на збирот на плоштините на квадратите E, F и D.

Решение. Да означиме

$$P_1=P_A+P_B+P_C \text{ и } P_2=P_E+P_F+P_D.$$

Очигледно:

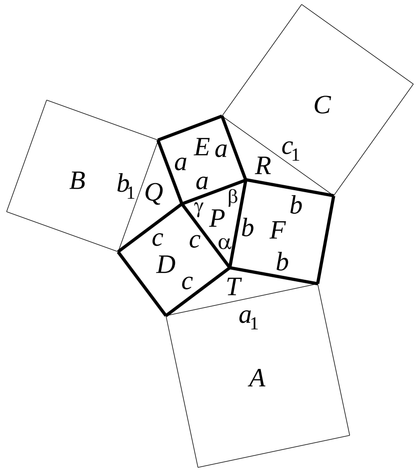
$$P_1 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \text{ и } P_2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Од косинусната теорема, применета за триаголникот T, добиваме

$$a_1^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \alpha)$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\pi - \alpha)$$
$$= b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha,$$

односно

$$a_1^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha. \qquad (1)$$



Слично, од триаголниците Q и R наоѓаме

$$b_1^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos\beta, \qquad (2)$$
$$c_1^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma. \qquad (3)$$

Ако од (1), (2) и (3) замениме во релацијата за P_1 добиваме

$$P_1 = 2(a^2 + b^2 + c^2) + 2ab\cos\gamma + 2bc\cos\alpha + 2ca\cos\beta. \qquad (4)$$

Слично, од триаголникот P наоѓаме

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \qquad (5)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \qquad (6)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \qquad (7)$$

Ако ги собереме (4), (5), (6) и (7) добиваме

$$P_1 = 3(a^2 + b^2 + c^2) = 3P_2,$$

па затоа $\frac{P_1}{P_2} = 3$.

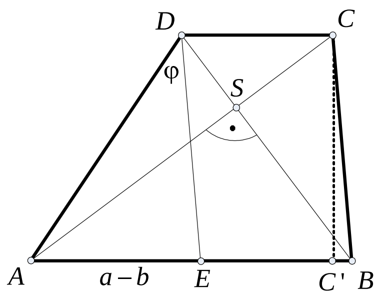
81. Даден е трапез со основи a и b ($a > b$), висина h, заемно нормални дијагонали и агол меѓу краците еднаков на φ. Докажи дека $\frac{1}{h} = (\frac{1}{b} - \frac{1}{a})\operatorname{ctg}\varphi$.

Решение. Да го разгледаме триаголникот $\triangle AED$. Од косинусната теорема добиваме

$$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 - 2\overline{AD}\cdot\overline{DE}\cos\varphi,$$

т.е.

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 - \overline{AE}^2}{2\overline{AD}\cdot\overline{DE}}. \qquad (1)$$



Од друга страна имаме

$$P_{\Delta AED} = \frac{1}{2}\overline{AE}\cdot h \quad \text{и} \quad P_{\Delta AED} = \overline{DE}\cdot\overline{AD}\cdot\sin\varphi,$$

па затоа

$$\sin\varphi = \frac{\overline{AE}\cdot h}{\overline{DE}\cdot\overline{AD}} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме

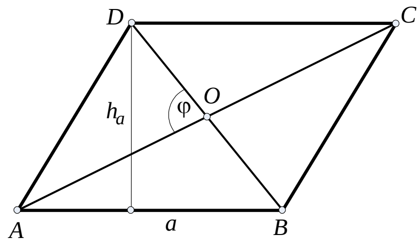
$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 - \overline{AE}^2}{2\overline{AE}\cdot h}.$$

Бидејќи дијагоналите на трапезот се заемно нормални, имаме $\overline{AD}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{SD}^2$, $\overline{DE}^2 = \overline{BS}^2 + \overline{SC}^2$, од каде следува

$$\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = (\overline{AS}^2 + \overline{BS}^2) + (\overline{SD}^2 + \overline{SC}^2) = a^2 + b^2 .$$

Ако последното равенство го замениме во (3) и искористиме дека $\overline{AE} = a - b$, го добиваме равенството: $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{a^2+b^2-(a-b)^2}{2(a-b)h}$, кое е еквивалентно на равенството $\frac{1}{h} = (\frac{1}{b} - \frac{1}{a})\operatorname{ctg}\varphi$.

82. Докажи дека помалата висина во паралелограмот $ABCD$ е еднаква на $\frac{a^2-b^2}{2a}\operatorname{tg}\varphi$, каде што a и b се должините на страните, а φ е остриот агол меѓу дијагоналите на паралелограмот.



Решение. Од условот на задачата следува дека $a > b$, т.е. $h_a \leq h_b$. Значи, треба да докажеме дека $h_a = \frac{a^2-b^2}{2a}\operatorname{tg}\varphi$.

Плоштината P на паралелограмот $ABCD$ е:

$$P = 2P_{AOB} + 2P_{AOD} = \overline{OA}\cdot\overline{OD}\sin\varphi + \overline{OA}\cdot\overline{OB}\sin(\pi-\varphi) = 2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\sin\varphi = \tfrac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$$

Од друга страна $P = ah_a$, па затоа $ah_a = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$, т.е. $\frac{2ah_a}{\sin\varphi} = d_1 d_2$.

Од косинусна теорема за триаголникот AOB добиваме

$$b^2 = (\tfrac{d_1}{2})^2 + (\tfrac{d_2}{2})^2 - 2\tfrac{d_1}{2}\tfrac{d_2}{2}\cos\varphi = \tfrac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - \tfrac{2ah_a}{\sin\varphi}\cos\varphi) .$$

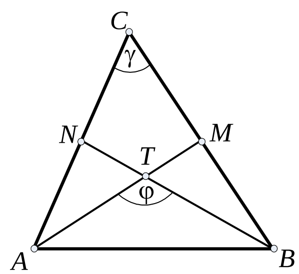
Последното равенство е еквивалентно на равенството $h_a = \frac{a^2-b^2}{2a}\operatorname{tg}\varphi$, кое и требаше да се докаже.

83. Нека AM и BN се тежишните линии во триаголникот ABC и T е нивната пресечна точка. Ако $\overline{BC} = a$ и $\overline{AC} = b$ и точките M, T, N, C лежат на иста кружница, најди ја должината на отсечката AB.

Решение. Нека $\overline{AB} = c$. Ја применуваме косинусната теорема за триаголниците ABC и ABT:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos\gamma \qquad (1)$$

$$c^2 = \overline{AT}^2 + \overline{BT}^2 - 2\overline{AT}\cdot\overline{BT}\cdot\cos\varphi \qquad (2)$$



Бидејќи четириаголникот $NTMC$ е тетивен, следува дека $\gamma + \varphi = \pi$, а оттука $\cos\varphi = -\cos\gamma$, па од (2) добиваме

$$c^2 = \overline{AT}^2 + \overline{BT}^2 + 2\overline{AT}\cdot\overline{BT}\cdot\cos\gamma \qquad (3)$$

Триаголниците ATN и AMC се слични (аголот кај темето A им е заеднички и $\measuredangle ATN = \gamma = \measuredangle ACM$), па добиваме:

$$\overline{AN} : \overline{AT} = \overline{AM} : \overline{AC}$$

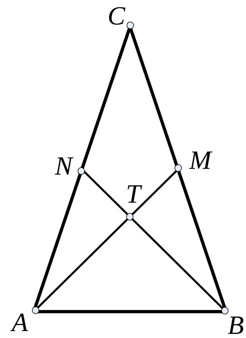
Бидејќи $\overline{AT} = \frac{2}{3}\overline{AM}$, $\overline{AN} = \frac{b}{2}$, $\overline{AC} = b$, добиваме $\overline{AT} = \frac{b}{\sqrt{3}}$. Аналогно, $\overline{BT} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Заменувајќи ги овие вредности во (3) добиваме

$$c^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{a^2}{3} + 2\frac{ab}{3}\cos\gamma \tag{4}$$

Од (1) и (4) добиваме $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2}{4ab}$, па повторно заменувајќи во (1), $c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

84. Ако тежишните линии AM и BN во триаголникот ABC се заемно нормални, докажи дека $\cos\gamma \geq \frac{4}{5}$. (γ е аголот кај темето C)



Решение. ΔABT е правоаголен, па следува

$$c^2 = (\tfrac{2}{3}t_a)^2 + (\tfrac{2}{3}t_b)^2 .$$

Бидејќи

$$t_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, \quad t_b^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$$

добиваме $5c^2 = a^2 + b^2$.

Од косинусната теорема добиваме

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{4c^2}{2ab} \geq \frac{4c^2}{a^2+b^2} = \frac{4c^2}{5c^2} = \frac{4}{5} .$$

85. Во $\triangle ABC$ важи $\overline{AB} = \overline{AC}$ и $\frac{\cos\measuredangle BAC}{\cos\measuredangle ABC} = \frac{7}{15}$. Пресметај $\frac{\sin\measuredangle BAC}{\sin\measuredangle ABC}$.

Решение. Нека $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\measuredangle BAC = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$ и $b = c$. Од косинусната теорема следува

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = 1 - \frac{a^2}{2b^2} \quad \text{и} \quad \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{a}{2b} .$$

Од условот $\frac{\cos\measuredangle BAC}{\cos\measuredangle ABC} = \frac{7}{15}$ следува

$$0 = 15\cos\alpha - 7\cos\beta = 15(1 - \frac{a^2}{2b^2}) - 7\frac{a}{2b} = -\frac{15}{2}(\frac{a}{b})^2 - \frac{7}{2}\frac{a}{b} + 15 = (-\frac{5}{2}\frac{a}{b} + 3)\,(3\frac{a}{b} + 5)$$

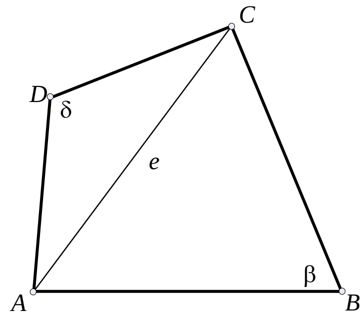
Бидејќи $a, b > 0$, следува $-\frac{5}{2}\frac{a}{b} + 3 = 0$, односно $\frac{a}{b} = \frac{6}{5}$. Од синусната теорема следува дека $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{6}{5}$.

86. Ако a,b,c,d се страни на конвексен четириаголник, s - полупериметар, а 2ϕ збирот на два негови спротивни агли, тогаш неговата плоштина е

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\phi} .$$

Докажи!

Решение. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник. Да означиме: $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{AD} = d$ $\overline{AD} = d$ и $\beta + \delta = 2\phi$.



Со дијагоналата AC тој е поделен на два триаголника. Тогаш неговата плоштина е

$$P = P_{ABC} + P_{ACD} = \frac{ab}{2}\sin\beta + \frac{cd}{2}\sin\delta .$$

Оттука

$$2P = ab\sin\beta + cd\sin\delta .$$

Со квадрирање на последното равенство се добива

$$4P^2 = a^2b^2\sin^2\beta + c^2d^2\sin^2\delta + 2abcd\sin\beta\sin\delta .$$

Ако во последната равенка замениме $\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta$, $\sin^2\delta = 1-\cos^2\delta$ и ја дополниме до полн квадрат се добива

$$4P^2 = (ab+cd)^2 - (ab\cos\beta - cd\cos\delta)^2 - 2abcd(1+\cos\beta\cos\delta - \sin\beta\sin\delta) .$$

Бидејќи $1+\cos 2\phi = 2\cos^2\phi$, со замена во последното равенство се добива

$$4P^2 = (ab+cd)^2 - (ab\cos\beta - cd\cos\delta)^2 - 4abcd\cos^2\phi . \qquad (1)$$

Нека $\overline{AC} = e$. Од триаголниците ABC и ACD со примена на косинусната теорема се добива:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta ,\ e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta .$$

Со одземање на овие две равенки се добива:

$$ab\cos\beta - cd\cos\delta = \tfrac{1}{2}(c^2 + d^2 - a^2 - b^2) .$$

Со замена на последното равенство во (1) се добива

$$4P^2 = (ab+cd)^2 - \tfrac{1}{4}(c^2 + d^2 - a^2 - b^2)^2 - 4abcd\cos^2\phi ,$$

а оттука

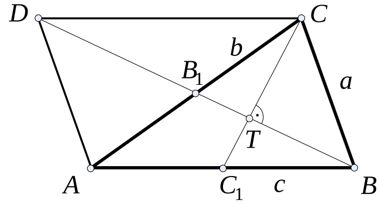
$$4P^2 = \tfrac{1}{4}(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d) - 4abcd\cos^2\phi$$

$$P^2 = \tfrac{-a+b+c+d}{2}\cdot\tfrac{a-b+c+d}{2}\cdot\tfrac{a+b-c+d}{2}\cdot\tfrac{a+b+c-d}{2} - abcd\cos^2\phi \qquad (2)$$

Од условот на задачата $\tfrac{a+b+c+d}{2} = s$, па со замена во (2) добиваме

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\phi} .$$

87. За страните a,b,c на триаголникот ABC исполнето е равенството $b^2 + c^2 = 5a^2$. Докажи дека $t_b \perp t_c$.



Решение. За дадениот триаголник, според косинусна теорема имаме

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha \text{, т.е.}$$

$$5a^2 = 5(b^2 + c^2) - 10bc\cdot\cos\alpha .$$

Од равенството од условите на задачата имаме

$$2a^2 = bc\cdot\cos\alpha . \qquad (*)$$

Ако ја примениме косинусна теорема на триаголниците BB_1A и CC_1A ги добиваме равенствата

$$t_b = c^2 + \frac{b^2}{4} - bc\cdot\cos\alpha \overset{(*)}{=} \frac{4c^2+b^2-8a^2}{4} = \frac{3c^2-3a^2}{4}$$

$$t_c = b^2 + \frac{c^2}{4} - bc\cdot\cos\alpha \overset{(*)}{=} \frac{4b^2+c^2-8a^2}{4} = \frac{3b^2-3a^2}{4}$$

Со примена на овие две равенства за триаголникот CTB_1, бидејќи $\overline{CT} = \frac{2}{3}t_c$ и $TB_1 = \frac{1}{3}t_b$, добиваме

$$(\tfrac{2}{3}t_c)^2 + (\tfrac{1}{3}t_b)^2 = \frac{4}{9}\frac{3b^2-3a^2}{4} + \frac{1}{9}\frac{3c^2-3a^2}{4} = \frac{12b^2-3c^2-15a^2}{36} = \frac{9b^2}{36} = (\tfrac{b}{2})^2$$

т.е.

$$(\tfrac{2}{3}t_c)^2 + (\tfrac{1}{3}t_b)^2 = (\tfrac{b}{2})^2.$$

Значи, ΔCTB_1 е правоаголен, т.е. $CT \perp BT$.

88. Докажи дека во било кој триаголник ABC е точно равенството $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{a^2+c^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}$. (a,b,c и α,β се стандардните ознаки за должините на страните и големините на аглите на триаголникот).

Решение. Од косинусната теорема имаме

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

од каде што имаме

$$a^2 + c^2 - b^2 = 2ac\cos\beta, \quad b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos\alpha.$$

Според тоа

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{b^2+c^2-a^2} = \frac{2ac\cos\beta}{2bc\cos\alpha} = \frac{a\cos\beta}{b\cos\alpha} = (*).$$

Според синусната теорема имаме $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. Според тоа,

$$(*) = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta},$$

што и требаше да се докаже.

89. Нека a,b,c се страните на еден триаголник. Одреди го аголот спроти страната c, ако важи $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$.

Решение. Од даденото равенство добиваме

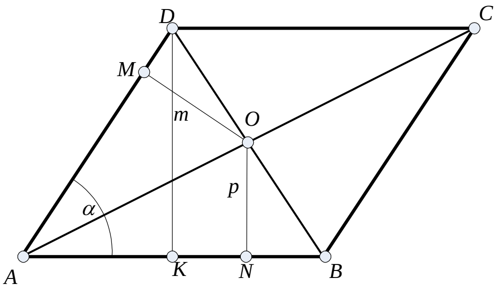
$$(a+b)^2 - c^2 = 3ab, \text{ т.е. } a^2 + b^2 - c^2 = ab.$$

Од косинусната теорема, за аголот γ, спроти c, важи $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}$.

Бидејќи γ е агол во триаголник, важи $0 < \gamma < 180^\circ$. Следува дека $\gamma = 60^\circ$.

90. Остиот агол на паралелограмот е α, а растојанијата од точката на пресек на неговите дијагонали до неговите страни кои почнуваат од исто теме се m и n. Определи ја плоштината на паралелограмот и должините на неговите дијагонали.

Решение. Нека $ABCD$ е паралелограм и O е пресечна точка на неговите дијагонали. Нека ON и OM се нормали од O кон AB и AD, при што $\overline{ON} = p$ и $\overline{OM} = m$, и $\measuredangle BAD = \alpha$.



Ако DK е висина на паралелограмот (види цртеж), тогаш $\overline{DK} = 2\overline{ON} = 2p$ (точката O на исто растојание од AB и CD.

Од правоаголниот триаголник AKD имаме $\overline{AD} = \frac{\overline{DK}}{\sin\alpha} = \frac{2p}{\sin\alpha}$.

Аналогно, $\overline{AB} = \frac{2m}{\sin\alpha}$. Според тоа $P = \overline{AB}\cdot\overline{DK}$, односно

$$P = 2p\frac{2m}{\sin\alpha} = \frac{4pm}{\sin\alpha}.$$

Од триаголникот ABD, според косинусната теорема добиваме

$$\overline{BD}^2 = \frac{4m^2}{\sin^2\alpha} + \frac{4p^2}{\sin^2\alpha} - 2\frac{2m}{\sin\alpha}\cdot\frac{2p}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha \text{, т.е } \overline{BD} = 2\frac{\sqrt{m^2+p^2-2mp\cos\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Аналогно од триаголникот ABC во кој $\measuredangle ABC = 180^\circ - \alpha$, имаме

$$\overline{BD} = 2\frac{\sqrt{m^2+p^2-2mp\cos(180^\circ-\alpha)}}{\sin\alpha} = 2\frac{\sqrt{m^2+p^2+2mp\cos\alpha}}{\sin\alpha}.$$

91. Во триаголникот ABC, исполнето е равенството $c^2 = 4ab\cos A\cos B$. Да се докаже дека триаголникот е рамнокрак.

Решение. Според косинусна теорема за триаголникот ABC исполнето е равенството

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\measuredangle C$$

Бидејќи

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180^\circ \text{ т.е. } \cos\measuredangle C = \cos(180^\circ - \measuredangle A - \measuredangle B) = -\cos(\measuredangle A + \measuredangle B),$$

заменувајќи во последното равенство добиваме:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\measuredangle A + \measuredangle B) = a^2 + b^2 + 2ab(\cos\measuredangle A\cos\measuredangle B - \sin\measuredangle A\sin\measuredangle B)$$

Од условот на задачата имаме $c^2 = 4ab\cdot\cos A\cdot\cos B$ па заменувајќи во последното равенство добиваме

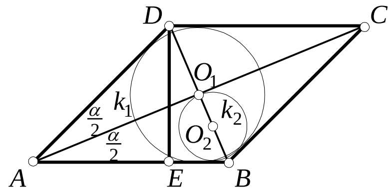
$$a^2 + b^2 = 2ab(\cos\measuredangle A\cos\measuredangle B + \sin\measuredangle A\sin\measuredangle B) = 2ab\cos(\measuredangle A - \measuredangle B)$$

односно

$$(a-b)^2 = 2ab(\cos(\measuredangle A - \measuredangle B) - 1)$$

Бидејќи левата страна е ненегативна а десната е непозитивна, равенство е исполнето ако и само ако $\cos(\measuredangle A - \measuredangle B) - 1 = 0$ т.е. $\measuredangle A = \measuredangle B$ т.е. $a = b$.

92. Во ромбот со остар агол α и триаголникот ABC (поголемата дијагонала на ромбот е страна на ABC) се впишани кружници. Определи го односот на нивните радиуси.



Решение. Нека $ABCD$ е ромб во кој AC е поголемата дијагонала и $\alpha = \measuredangle BAC$ е остар агол.

Нека k_1 и k_2 се впишаните кружници во ромбот $ABCD$ и триаголникот ABC соодветно (види цртеж) кои имаат радиуси r_1 и r_2.

Нека DE е висина на ромбот ($DE \perp AB$) и нека страната на ромбот е a. Тогаш $h = \overline{DE} = a\sin\alpha$, па според тоа

$$r_1 = \frac{h}{2} = \frac{a}{2}\sin\alpha .$$

За триаголникот ABC по косинусна теорема имаме

$$\overline{AC} = \sqrt{2a^2 - 2a^2\cos(180^\circ - \alpha)} = \sqrt{2a^2(1+\cos\alpha)} = 2a\cos\frac{\alpha}{2} .$$

Сега,

$$L_{ABC} = 2a + 2a\cos\frac{\alpha}{2} \text{ и } P_{ABC} = \frac{1}{2}a^2\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha .$$

од каде што добиваме

$$r_2 = \frac{2P_{ABC}}{L_{ABC}} = \frac{a^2\sin\alpha}{2a+2a\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2\sin\alpha}{2a(1+\cos\frac{\alpha}{2})} = \frac{a^2\sin\alpha}{4a\cos^2\frac{\alpha}{4}} = \frac{a\sin\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{4}}$$

Значи,

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\frac{1}{2}a\sin\alpha}{\frac{a\sin\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{4}}} = 2\cos^2\frac{\alpha}{4} .$$

93.Нека a, b и c се должини на страни на триаголник. Определи го аголот спроти страната со должина c, ако е исполнето равенството

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} = c^2 .$$

Решение. Даденото равенство ќе го запишеме во облик

$$a^3 + b^3 + c^3 = c^2(a+b+c)$$

$$a^3 + b^3 - c^2(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2 - c^2) = 0$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\pi}{3}.$$

Понатаму, од косинусна теорема имаме $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, па затоа $\cos\gamma = \cos\frac{\pi}{3}$, т.е. $\gamma = \frac{\pi}{3}$.

94. Докажи дека постои точно еден триаголник чии должини на страни се последователни природни броеви и еден од аглите е два пати поголем од еден од преостанатите два агли.

Решение. Од синусната теорема имаме $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ и како $\beta = 2\alpha$, $\gamma = \pi - 3\alpha$, добиваме $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin 2\alpha} = \frac{c}{\sin 3\alpha}$. Затоа $b > a$. Воведуваме ознака $\frac{a}{\sin\alpha} = \lambda$. Тогаш од равенствата

$$a^2 = \lambda^2 \sin^2 \alpha,\ b^2 = \lambda^2 \sin^2 2\alpha, c^2 = \lambda^2 \sin^2 3\alpha$$

добиваме

$$b^2 - a^2 = \lambda^2(\sin^2 2\alpha - \sin^2 \alpha),\ ac = \lambda^2 \sin\alpha \sin 3\alpha .$$

Од идентитетот

$$\sin^2 2\alpha - \sin^2 \alpha = \sin\alpha \cdot \sin 3\alpha ,$$

следува дека за бараниот триаголник е исполнето равенството $b^2 - a^2 = ac$ или $b^2 = a(a+c)$. Според тоа, можни се следните случаи:

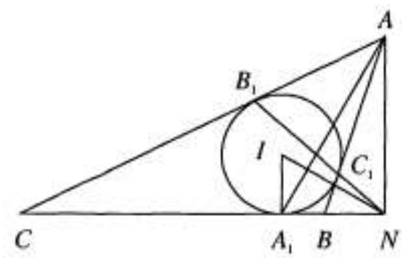
(1) $a = n, b = n+1, c = n+2$. Тогаш $(n+1)^2 = n(2n+2)$, т.е. $n^2 - 1 = 0$, од каде што $n = 1$ и $a = 1, b = 2, c = 3$, т.е. се добива дегенериран триаголник.

(2) $a = n, b = n+2, c = n+1$. Тогаш $(n+2)^2 = n(2n+1)$, т.е. $n = 4$ и $a = 4$, $b = 6, c = 5$, и тоа е решение на задачата.

(3) $c = n, a = n+1, b = n+2$, од каде што $n^2 - n + 3 = 0$, а оваа равенка нема целобројни решенија.

Останува да докажеме дека триаголникот со должини на страни $a = 4, b = 6$, $c = 5$ ги задоволува условите на задачата. Ќе покажеме дека $\beta = 2\alpha$. Од косинусната теорема имаме $\cos\beta = \frac{1}{8}, \cos\alpha = \frac{3}{4}$ па затоа $\cos 2\alpha = \cos\beta$, т.е. $\beta = 2\alpha$.

95. Во $\triangle ABC$ е впишана кружница со радиус r, која страните AB, BC, CA ги допира во точките C_1, B_1 и A_1, соодветно. Ако правите BC и B_1C_1 се сечат во точка N и $\overline{AA_1} = 2\overline{A_1N} = 2r\sqrt{3}$, да се определи $\measuredangle ANC$.



Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за $\triangle ABC$ и без ограничување на општоста можеме да земеме дека $b > c$. Ако I е центарот на впишаната кружница, тогаш од условот $\overline{A_1N} = r\sqrt{3}$ следува дека во правоаголниот $\triangle INA_1$ е исполнето $\measuredangle NIA_1 = 60^\circ$. Ќе докажеме дека $AA_1 \perp IN$, од каде ќе следува дека $\measuredangle AA_1N = 60^\circ$. Тогаш, ако M е средината на AA_1 следува дека $\triangle MNA_1$ е рамностран, па затоа $\triangle ANM$ ќе биде рамнокрак со агол при основата еднаков на 30°, од кадед ќе следува дека $\measuredangle ANC = 90^\circ$. Фактот дека $AA_1 \perp IN$ е еквивалентен на условот за нормалност на дијагоналите на четириаголникот ANA_1I, т.е. $\overline{AI}^2 - \overline{A_1I}^2 = \overline{AN}^2 - \overline{A_1N}^2$. Бидејќи $\overline{AI}^2 - \overline{A_1I}^2 = \overline{AI}^2 - \overline{C_1I}^2 = (p-a)^2$, за дачата ја сведовме до изразување на $\overline{AN}$ и $\overline{A_1N}$ преку елементите на $\triangle ABC$. Од косинусната теорема за $\triangle ANB$ имаме

$$\overline{AN}^2 = c^2 + \overline{BN}^2 + 2c\overline{BN}\cos\beta = c^2 + \overline{BN}^2 + 2c\overline{BN}\,\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

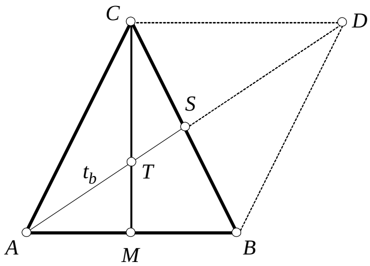
а од теоремата на Манелај за $\triangle ABC$ и правата B_1C_1 наоѓаме $\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BN_1}}{\overline{NC}} = 1$, од каде наоѓаме $\frac{(p-c)\overline{BN}}{(p-b)(\overline{BN}+a)} = 1$. Значи, $\overline{BN} = \frac{a(p-b)}{b-c}$. Тогаш $\overline{A_1N} = \overline{BN} + p - b$ и

$$\begin{aligned}
\overline{AN}^2 - \overline{A_1N}^2 &= c^2 - (p-b)^2 + \overline{BN}\,\tfrac{a^2+c^2-b^2-a^2-ac+ab}{a} \\
&= c^2 - (p-b)^2 - \tfrac{a(p-b)}{b-c}\,\tfrac{2(b-c)(p-a)}{a} \\
&= c^2 - (p-b)^2 - 2(p-a)(p-b) \\
&= c^2 - (p-a+p-b)^2 + (p-a)^2 \\
&= c^2 - c^2 + (p-a)^2 = (p-a)^2.
\end{aligned}$$

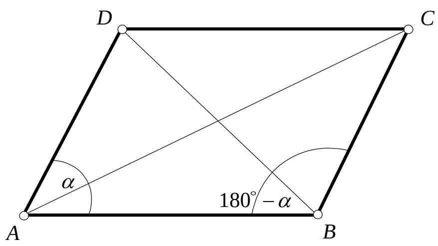
Докажавме дека $\overline{AI}^2 - \overline{A_1I}^2 = \overline{AN}^2 - \overline{A_1N}^2$ и од претходните разгледувања следува дека $\measuredangle ANC = 90^\circ$.

96. Основата на рамнокрак триаголник е $4\sqrt{2}$, а тежишната линија на кракот е 5. Колкав е кракот?

Решение. *Прв начин.* Нека ABC е рамнокрак триаголник со основа $\overline{AB} = 4\sqrt{2}$ и тежишна линија $t_b = 5$ (види црт.1). Тогаш имаме $\overline{AM} = 2\sqrt{2}$, $\overline{AT} = \frac{2}{3}t_b = \frac{10}{3}$. Од правоаголните триаголници AMC и AMT, според Питагоровата теорема, добиваме



цртеж 1



цртеж 2

$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{CM}^2 = \overline{AM}^2 + (3\overline{MT})^2 = \overline{AM}^2 + 9(\overline{AT}^2 - \overline{AM}^2) = 9\overline{AT}^2 - 8\overline{AM}^2 = 36$$

т.е. $b = \overline{AC} = 6$.

Втор начин. Прво ќе покажеме дека: ако $ABCD$ е паралелограм со страни a, b и дијагонали d_1 и d_2, тогаш $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$. Според косинусна теорема, од цртеж 2, имаме

$$d_1^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(180^\circ - \alpha) = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$

$$d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha,$$

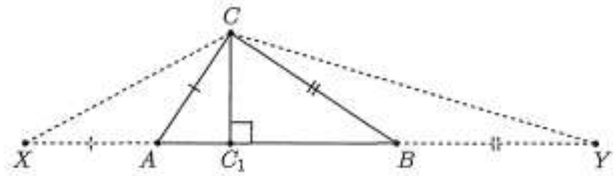
т.е. $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$. Сега, ако D е точка, така што $ABDC$ е паралелограм (цртеж 1), тогаш имаме

$$2(a^2+b^2)=b^2+(2t_b)^2,$$

од каде што добиваме $b=6$.

97. Нека CC_1 е висина на $\triangle ABC$, каде C_1 е точка од правата AB. Познато е дека збирот на квадратите на периметрите на $\triangle ACC_1$ и $\triangle BCC_1$ е еднаков на квадратот на периметарот на $\triangle ABC$. Докажи, дека $\measuredangle ACB=90^\circ$.

Решение. Бидејќи $O_{\triangle ACC_1}<O_{\triangle ABC}$ и $O_{\triangle BCC_1}<O_{\triangle ABC}$, заклучуваме дека точката C_1 лежи на отсечката AB. Нека X и Y се точки на правата AB такви што A е меѓу X и B, B е меѓу A и Y, $\overline{AX}=\overline{AC}$ и $\overline{BY}=\overline{BC}$. Тогаш условот на задачата го прима видот



$$(\overline{XC_1}+\overline{CC_1})^2+(\overline{YC_1}+\overline{CC_1})^2=\overline{XY}^2.$$

Ако двапати ја примениме Питагоровата теорема и формулата за плоштина добиваме

$$\overline{XC}^2+4P_{\triangle XCC_1}+\overline{YC}^2+4P_{\triangle YCC_1}=\overline{YX}^2.$$

Од косинусната теорема за $\triangle XYC$ и равенството

$$P_{\triangle XCC_1}+P_{\triangle YCC_1}=P_{\triangle XCY}=\tfrac{1}{2}\overline{XC}\cdot\overline{YC}\sin\measuredangle XCY$$

следува дека $\cos\measuredangle XCY+\sin\measuredangle XCY=0$. Тогаш

$$135^\circ=\measuredangle XCY=\measuredangle XCA+\measuredangle C+\measuredangle YCB=\tfrac{\measuredangle A}{2}+\measuredangle B+\tfrac{\measuredangle B}{2}=90^\circ+\tfrac{\measuredangle C}{2},$$

па затоа $\measuredangle C=90^\circ$

98. Точката M на страната AB во рамностраниот $\triangle ABC$ е таква што односот на радиусите на впишаните кружници во $\triangle AMC$ и $\triangle BMC$ е еднаков на $\frac{\overline{CM}}{\overline{BM}}-1$. Определи ја вредноста на изразот $\frac{\overline{CM}}{\overline{BM}}-1$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $\overline{AB}=1$. Нека $\overline{BM}=x,\overline{CM}=y$ и k е бараниот сооднос (направи цртеж). Од формулата $P=sr$ следува, дека

$$\tfrac{1-x}{x}=k\tfrac{2-x+y}{1+x+y}\text{, т.е. }((k+1)x-1)y=(k-1)x^2-2kx+1.$$

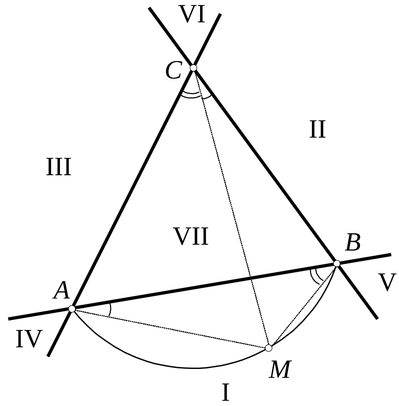
Од друга страна, од косинусната теорема следува $y^2=x^2-x+1$, а според условот имаме $y=(k+1)x$. Тогаш

$$y(y-1)=(k-1)(x^2-x+1)-(k+1)x+2-k=(k-1)y^2-y+2-k,$$

па затоа $(k-2)(y^2-1)=0$, т.е. $k=2$.

99. Даден е остроаголен триаголник ABC. Најди го геометриското на точки M за кои $\measuredangle MAB=\measuredangle MCB$ и $\measuredangle MBA=\measuredangle MCA$.

Решение. Јасно е дека M не припаѓа на ниедна од правите AB, BC и CA. тие прави ја делат рамнината на седум делови и да ги означиме како на цртежот.



1) $M\in I$. Тогаш

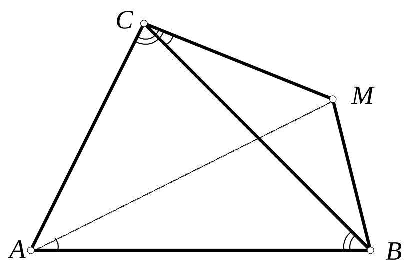
$$\measuredangle AMB=180^\circ-(\measuredangle MAB+\measuredangle MBA)$$

$$=180^\circ-(\measuredangle MCB+\measuredangle MCA)=180^\circ-\measuredangle ACB,$$

па четириаголникот $ACBM$ е тетивен, односно M лежи лакот AB од опишаната кружница околу триаголникот ABC.

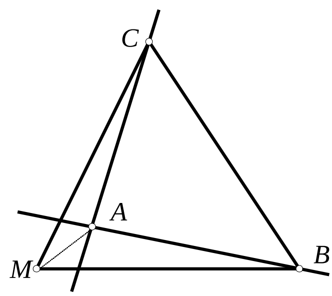
2) $M\in II$. Тогаш $\measuredangle BAM=\measuredangle BCM$, па M припаѓа на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Но тогаш

$$\measuredangle ABM+\measuredangle ABM=180^\circ,$$



па $\measuredangle ABM=90^\circ$. Значи AM е дијаметар на таа кружница. Според тоа во овој случај постои една точка и таа е пресекот на правата низ A и центарот опишаната кружница околу триаголникот ABC, со кружницата.

3) $M\in III$. Аналогно M е пресекот на правата низ B и центарот опишаната кружница околу триаголникот ABC, со кружницата.



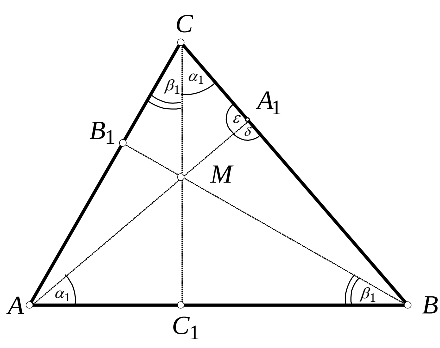
4) $M\in IV$. Тогаш јасно е дека $\measuredangle MAB>\measuredangle MAB$, па точка M со бараното својство не постои во овој случај.

5) Аналогно се разгледуваат случаите V и VI.

6) $M\in VII$. Да воведеме ознаки како на цртежот. Тогаш

$$\triangle ABB_1\sim\triangle ACC_1 \text{ и } \triangle ABA_1\sim\triangle CC_1B$$

(имаат по два еднакви агли). Значи
$\measuredangle CC_1B=\measuredangle AA_1B=\delta$ и $\measuredangle AC_1C=\measuredangle AA_1C=\varepsilon$.



Заради $\varepsilon+\delta=180^\circ$ добиваме дека и $\measuredangle AB_1B=\varepsilon$ и $\measuredangle BB_1C=\delta$. Натаму триаголниците AC_1M и CA_1M имаат два еднакви агли па се слични. Аналогно $\triangle CB_1M\sim\triangle BC_1M$. Затоа $\frac{\overline{AM}}{\overline{MC_1}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{MA_1}}$ и $\frac{\overline{MB_1}}{\overline{CM}}=\frac{\overline{C_1M}}{\overline{MB}}$. Ако од првото равенство го изразиме $\overline{AM}$, а од второто $\overline{MB_1}$ и ги поделиме добиените равенства добиваме $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB_1}}=\frac{\overline{MB}}{\overline{MA_1}}$, односно $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{MB_1}}{\overline{MA_1}}$. Нека $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{MB_1}}{\overline{MA_1}}=k$. Тогаш ако ја примениме косинусната теорема на ΔAB_1M добиваме

$$\begin{aligned}\overline{AB_1}^2&=\overline{AM}^2+\overline{MB_1}^2-2\cdot\overline{AM}\cdot\overline{MB_1}\cdot\cos\measuredangle B_1MA\\&=k^2\cdot\overline{MB}^2+k^2\cdot\overline{MA_1}^2-2k^2\cdot\overline{MB}\cdot\overline{MA_1}\cdot\cos\measuredangle BMA_1\\&=k^2\cdot\overline{A_1B}^2.\end{aligned}$$

Значи $\frac{\overline{AB_1}}{\overline{A_1B}}=k$, па $\triangle AMB_1\sim\triangle BMA_1$. Оттука $\varepsilon=\delta$ и од $\varepsilon+\delta=180^\circ$ добиваме $\varepsilon=\delta=90^\circ$. Значи M е ортоцентар на $\triangle ABC$.

Точките што ги добивме во овие случаи го формираат бараното геометриско место.

100. Во триаголникот *ABC* точката *O* е центарот на опишаната кружница околу триаголникот, точката *M* е средината на страната *AB*. Опишаната кружница околу триаголникот *AMO* ја сече страната *AC* во точка *K*. Ако $\overline{AK}=3, \overline{MK}=4$ и $\measuredangle AOM=45^\circ$, тогаш

а) определи ги должините на страните AC и BC;

б) определи ја должината на страната AB.

Решение. Од условот на задачата $\measuredangle AOM=45^\circ$ следува, дека $\measuredangle ACB=45^\circ$ или $\measuredangle ACB=135^\circ$. Од тоа што *OM* е симетрала на *AB*, следува дека *OK* е симетрала на *AC*.

а) Од досега изнесеното наоѓаме дека

$\overline{AC}=2\cdot\overline{AK}=2\cdot3=6$ и $\overline{BC}=2\cdot\overline{MK}=2\cdot4=8$ (*MK* е средна линија).

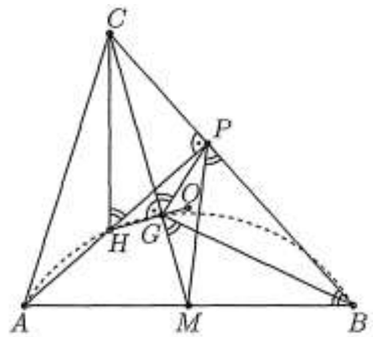
б) За страната *AB* ја применуваме косинусната теорема и добиваме

- Ако $\measuredangle ACB=45^\circ$, тогаш $\overline{AB}^2=36+64-2\cdot6\cdot8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. $\overline{AB}=\sqrt{100-48\sqrt{2}}$.
- Ако $\measuredangle ACB=135^\circ$, тогаш $\overline{AB}^2=36+64+2\cdot6\cdot8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. $\overline{AB}=\sqrt{100+48\sqrt{2}}$.

101. Даден е $\triangle ABC$ со ортоцентар H и тежиште G. Нека тежиштето G припаѓа на кружницата со дијаметар CH.

а) Докажи, дека четириаголникот $ABGH$ е тетивен.

б) Определи ја максимално можната вредност на $\measuredangle ACB$.



Решение. а) Очигледно $\triangle ABC$ е остроаголен, H е внатрешна точка и ќе го разгледаме нетривијалниот случај, кога $G\not\equiv H$. Ако $CG\cap AB=M$ и $AH\cap BC=P$, тогаш M е средина на AB и P и G лежат на кружницата со дијаметар CH. Така добиваме

$$\measuredangle PGC = \measuredangle PHC = 180^\circ - \measuredangle AHC = \measuredangle ABC$$

и затоа четириаголникот $MBPG$ е тетивен. Затоа

$$\measuredangle BGM = \measuredangle BPM = \measuredangle ABC$$

и

$$\measuredangle BAH + \measuredangle BGH = \measuredangle BAH + 90^\circ + \measuredangle ABC = 180^\circ ,$$

што значи дека четириаголникот $ABGH$ е тетивен.

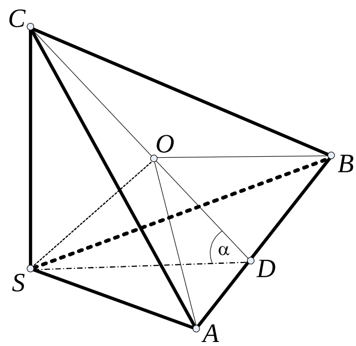
б) Од $\measuredangle BGM = \measuredangle ABC$ следува, дека $\triangle MBG \sim \triangle MCB$. Тогаш $\overline{MB}^2 = \overline{MG} \cdot \overline{MC}$ $= \frac{\overline{MC}^2}{3}$ и од формулата за тежишните линии во триаголникот, при стандардни ознаки го добиваме равенството $a^2 + b^2 = 2c^2$. Така добиваме, дека

$$\cos\measuredangle ACB = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{a^2+b^2}{4ab} \geq \frac{1}{2} ,$$

па затоа $\measuredangle ACB \leq 60^\circ$.

4. ПРИМЕНА ВО СТЕРЕОМЕТРИЈА

1. Во триаголна пирамида $SABC$ аглите меѓу рабовите при врвот S се прави, а точката O е проекција на врвот S врз рамнината на основата ABC. Докажи дека плоштината на триаголникот ASB е геометриска средина на плоштините на триаголниците ABC и OAB.



Решение. Од условот на задачата $CS \perp AS$, $CS \perp BS$ и $AS \perp BS$ а точката O е подножје на нормалата спуштена од врвот S на рамнината на основата ABC. Нека α е аголот меѓу рамнините на триаголниците SAB и ABC (види цртеж). Триаголниците OAB, SAB и CAB имаат една заедничка страна AB и имаат различни висини спуштени врз таа страна.

При тоа за висините $OD,\ SD$ и CD имаме, $\overline{OD} = \overline{SD}\cos\alpha$, $\overline{SD} = \overline{CD}\cos\alpha$, од каде што ги добиваме следните равенства $P_{OAB} = P_{SAB}\cos\alpha$ и $P_{SAB} = P_{ABC}\cos\alpha$.Од првото равенство добиваме $\cos\alpha = \frac{P_{OAB}}{P_{SAB}}$, и ако замениме во второто равенство добиваме

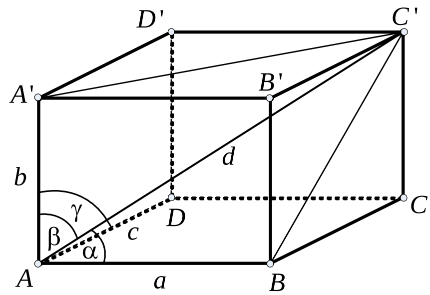
$$P_{SAB} = P_{ABC}\frac{P_{OAB}}{P_{SAB}} \text{, т.е. } P_{SAB}^2 = P_{ABC} \cdot P_{OAB} .$$

Значи, $P_{SAB} = \sqrt{P_{ABC} \cdot P_{OAB}}$, што и требаше да се докаже.

2. Во даден квадар $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ се аглите кои просторната дијагонала ги зафаќа со неговите рабови. Докажи дека

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Решение. Нека $ABCDA'B'C'D'$ е дадениот квадар и AC' е една негова просторна дијагонала која со страните AB, AA', AD зафаќа агли α,β,γ соодветно. Тогаш од триаголниците ABC', $AC'A', ADC'$ кои се правоаголни имаме $\cos\alpha=\frac{a}{d}$, $\cos\beta=\frac{b}{d}$ и $\cos\gamma=\frac{c}{d}$, од каде, заради условот $a^2+b^2+c^2=d^2$ го добиваме бараното равенство



$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

3. Во прав кружен конус аголот меѓу изводницата и висината е 30°, а радиусот на основата е $5\sqrt{3}$. Да се најде волуменот на впишаната топка.

Решение. Волуменот на топка е $V=\frac{4}{3}R^3\pi.$ Од ΔBSO имаме $\frac{r}{s}=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ па затоа $s=2r=10\sqrt{3}$. Понатаму, $H=\sqrt{s^2-r^2}=15$. Сега од ΔMNS имаме $\frac{R}{H-R}=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ па затоа $R=\frac{H}{3}=5$. Конечно, $V=\frac{4}{3}R^3\pi=\frac{500}{3}\pi cm^3$.

4. Во прав кружен конус аголот меѓу изводницата и висината е 30°, а гадиусот на впишаната топка е $5cm$. Да се најде волуменот на конусот.

Решение. Нека r е радиусот на основата на конусот, а H неговата висина. Волуменот на конусот е $V=\frac{\pi r^2 H}{3}$. Понатаму

$$\frac{R}{H-R}=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

па затоа $H=3R$. Сега $\frac{r}{H}=\mathrm{tg}\,30^\circ$, т.е. $r=5\sqrt{3}$. Конечно, $V=\frac{\pi r^2 H}{3}=375\pi cm^3$.

5. Основа на права призма е паралелограм со страни acm, bcm и помалиот агол α меѓу нив. Да се пресмета волуменот на призмата, ако нејзината помала дијагонала е еднаква со поголемата дијагонала на основата.

Решение. Основата на призмата е паралелограм, па затоа

$$2\alpha+2\beta=360^\circ,\ \text{т.е. }\ \beta=180^\circ-\alpha$$

Од косинусната теорема следува

$$d_1=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(180^\circ-\alpha)}=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$$

и

$$d_2=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}\ .$$

Понатаму $D^2=d_2^2+H^2$, а како по услов на задача $D=d_1$ добиваме

$$H^2 = D^2 - d_2^2 = d_1^2 - d_2^2 = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}^2 - \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}^2$$
$$= 4ab\cos\alpha$$

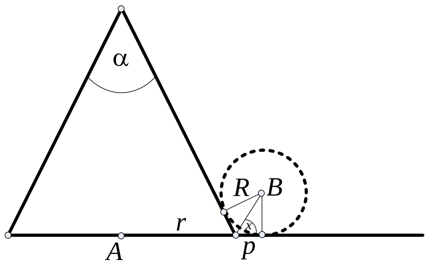
т.е. $H = 2\sqrt{ab\cos\alpha}$. Според тоа, за волуменот на призмата имаме:

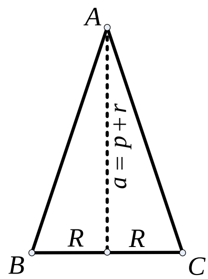
$$V = BH = ab\sin\alpha \cdot 2\sqrt{ab\cos\alpha} = 2(ab)^{\frac{3}{2}}\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha}\,.$$

6. Даден е прав кружен конус со радиус r и агол α при врвот на оскиниот пресек. Две сфери со радиус R го допираат конусот однадвор, се допираат меѓу себе и ја допираат рамнината во која лежи основата на конусот. Да се најде плоштината на триаголникот чии темиња се центрите на сферите и центарот на основата на конусот.

Решение. Нека B и C се центрите на сферите, а A центарот на основата на конусот (види цртежи). Тогаш имаме:

$$\overline{BC} = 2R\,,\ x = \tfrac{\alpha}{4} + \tfrac{\pi}{4}\,,\ p = R\text{ctg}x\,,\ \overline{AB}^2 = (r+p)^2 + R^2\,.$$





Јасно, $\overline{AC} = \overline{AB}$, па затоа

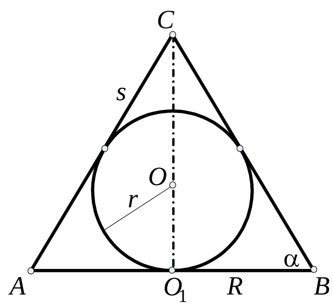
$$P_{ABC} = R(p+r) = R(r + R\,\text{ctg}(\tfrac{\alpha}{4} + \tfrac{\pi}{4}))\,.$$

7. Плоштината на впишаната топка во прав кружен конус е двапати помала од плоштината на конусот. Пресметај го аголот α што го зафаќа изводницата со основата на конусот.

Решение. Нека R е радиусот на основата на конусот, r-радиусот на впишаната топка и s изводницата на конусот (види цртеж). Од условот на задачата следува дека

$$\pi R(s+R) = 8\pi r^2\,.$$

Од триаголниците OBO_1 и BOC се добива дека $r = R\,\text{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\overline{BC} = s = \frac{R}{\cos\alpha}$, соодветно. Заменувајќи во (3) и кратејќи со πR^2, добиваме:



$$1 + \frac{1}{\cos\alpha} = 8\,\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}$$

Со помош на равенството

$$\cos\alpha = \frac{1-\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\,,$$

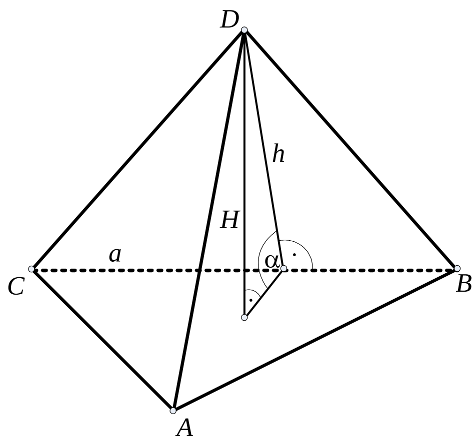
равенството (2) се трансформира во

$$\frac{2}{1-\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=8\text{tg}^2\frac{\alpha}{2},$$

од каде со смената $\text{tg}\frac{\alpha}{2}=z$ се добива биквадратната равенка $z^4-z^2+\frac{1}{4}=0$. Последната равенка има двоен корен $z^2=\frac{1}{2}$, па, значи $\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$. Од условот на задачата ($0<\alpha<\frac{\pi}{2}$) следува дека $\text{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. Нека S и P се плоштините на две страни на еден тетраедар, нека a е должината на нивниот заеднички раб, и нека α е аголот меѓу тие две страни. Да се докаже дека волуменот на тетраедарот е $V=\frac{2SP\sin\alpha}{3a}$.

Решение. Нека A,B,C,D се темиња на тетраедарот, а S и P плоштините на страните ABC и BCD соодветно (види цртеж). Нека H е висината на тетраедарот спуштена од темето D, а h е висината на триаголникот BCD спуштена од темето D. Тогаш, $h=\frac{2P}{a}$ а



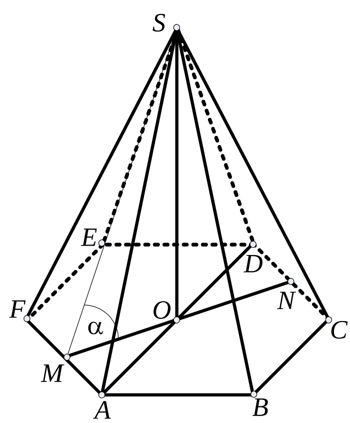
$$H=h\sin\alpha=\frac{2P\sin\alpha}{3a}.$$

Според тоа,

$$V=S\frac{H}{3}=\frac{2SP\sin\alpha}{3a}.$$

9. Апотемата на правилна шестстрана пирамида е m, а аголот помеѓу основата и бочниот ѕид е α. Да се најде плоштината и волуменот на пирамидата.

Решение. Нека M и N се средините на страните AF и CD соодветно(види цртеж). Триаголникот MNS е рамнокрак со крак $m=\overline{MS}=\overline{NS}$ и агол при основата α. Затоа, $MN=2m\cos\alpha$. Ако a е должината на страната на основата, тогаш $\overline{MN}=2\overline{OM}=a\sqrt{3}$. Значи,



$$a=\frac{2\sqrt{3}}{3}m\cos\alpha.$$

За плоштината P на пирамидата имаме

$$P=6(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{am}{2})=2m^2\sqrt{3}(1+\cos\alpha)\cos\alpha.$$

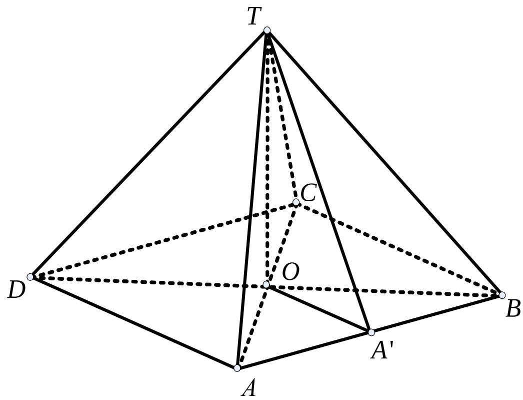
Висината на пирамидата е $H=m\sin\alpha$, па за волуменот V добиваме:

$$V=\frac{2\sqrt{3}}{3}m^2\sin\alpha\cos^2\alpha.$$

10. Нека $ABCDT$ е четиристрана пирамида со основа $ABCD$ (A и C не се соседни темиња) чии дијагонали AC и BD се заемно нормални и се сечат во точката O која е подножје на висината на пирамидата од врвот T. Нека $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ се соодветно, аглите меѓу висината на пирамидата и висините спуштени на бочните ѕидови ABT, BCT, CDT и DAT, спуштени од врвот T. Докажи дека

$$\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\gamma=\operatorname{ctg}^2\beta+\operatorname{ctg}^2\delta .$$

Решение. Да ги означиме со A', B', C' и D', соодветно, подножјата на висините на бочните ѕидови ABT, BCT, CDT и DAT, спуштени од врвот T; со a', b', c' и d', должините на отсечките OA', OB', OC' и OD', соодветно; со a, b, c и d должините на отсечките OA, OB, OC и OD, соодветно; со h должината на висината на пирамидата.



Имаме:

$$\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\gamma=\frac{h^2}{a'^2}+\frac{h^2}{c'^2}$$

и

$$\operatorname{ctg}^2\beta+\operatorname{ctg}^2\delta=\frac{h^2}{b'^2}+\frac{h^2}{d'^2} .$$

Да го разгледаме триаголникот ABO. Тој е правоаголен, со прав агол во темето O, а отсечката OA' му е висина спуштена кон хипотенузата. Значи,

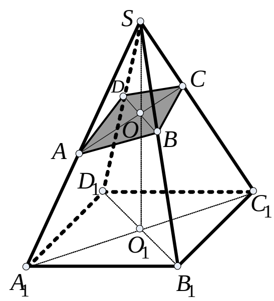
$$\frac{1}{a'^2}=\frac{\overline{AB}^2}{a^2b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} ,$$

и аналогно $\frac{1}{b'^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$, $\frac{1}{c'^2}=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}$ и $\frac{1}{d'^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{d^2}$. Со оглед на добиените равенства, имаме:

$$\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\gamma=h^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)=\operatorname{ctg}^2\beta+\operatorname{ctg}^2\delta .$$

11. Рамнината Σ ги сече бочните рабови A_1S, B_1S, C_1S, D_1S на правилна четириаголна пирамида $A_1B_1C_1D_1S$ во точки чии растојанија до врвот на пирамидата се a,b,c,d соодветно. Докажи дека $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}$.

Решение. Да го означиме со φ аголот што висината го зафаќа со бочните рабови на пирамидата и пресечните точки на рамнината со бочните рабови на пирамидата да ги означиме со A,B,C,D соодветно. Тогаш



$$\overline{SA}=a ,\quad \overline{SB}=b ,\quad \overline{SC}=c ,\quad \overline{SD}=d .$$

Од триаголникот ACS имаме $P_{ASC}=P_{AOS}+P_{OSC}$, па затоа

$$\frac{1}{2}ac\cos 2\varphi = \frac{1}{2}a\cdot\overline{SO}\sin\varphi + \frac{1}{2}c\cdot\overline{SO}\sin\varphi\,.$$

Последното равенство е еквивалентно на равенството

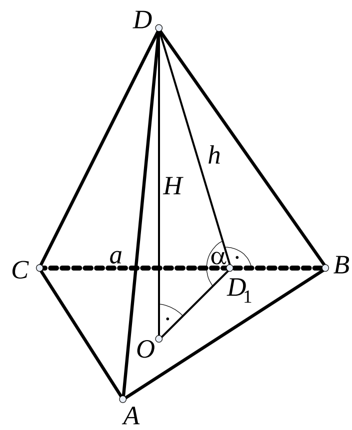
$$\frac{2\cos\varphi}{\overline{SO}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}\,. \qquad (1)$$

Аналогно, од триаголникот BDS добиваме:

$$\frac{2\cos\varphi}{\overline{SO}} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}\,. \qquad (2)$$

Од равенствата (1) и (2) следува $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}$.

12. Нека S и P се плоштините на два ѕида на една триаголна пирамида. Ако a е должината на нивниот заеднички раб, α аголот меѓу тие два ѕида, тогаш волуменот на пирамидата е $\frac{2SP\sin\alpha}{3a}$. Докажи!



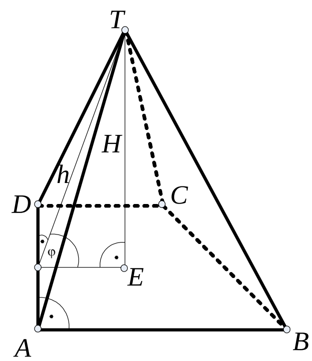
Решение. Нека плоштината на $\triangle ABC$ е S, а на $\triangle BCD$ е P. Понатаму, нека висината на пирамидата спуштена од D е H, а висината на ѕидот BCD е h и заедничкиот раб е $\overline{BC}=a$. Од $\triangle BCD$ следува $h=\frac{2P}{a}$, а од $\triangle OD_1D$ следува $H = h\sin\alpha = \frac{2P\sin\alpha}{a}$. Значи волуменот е

$$V=\frac{SH}{3}=\frac{2SP\sin\alpha}{3a}\,.$$

13. Основата на една пирамида е правоаголен трапез со агол 30° и подолг крак со должина 12. Бочните ѕидови на пирамидата зафаќаат еднакви агли со основата. Определи ја висината на пирамидата, ако збирот на плоштините на бочните ѕидови е 90.

Решение. Нека $ABCD$ е основата на пирамидата со врв T, при што

$$AB\,\|\,CD,\ \overline{BC}=12,\ \measuredangle BAD=90^\circ,\ \measuredangle ABC=30^\circ\,.$$



Веднаш се добива дека $\overline{AD}=\overline{BC}\sin 30^\circ=6$. Нека H е висината на пирамидата спуштена од темето T, а E нејзината подножна точка. Ако аголот што секој од ѕидовите го зафаќа со основата е φ, тогаш $\triangle ABT, \triangle BCT, \triangle CDT, \triangle DAT$ имаат еднакви висини спуштени од темето T, $h=\frac{H}{\sin\varphi}$. Од условот на задачата

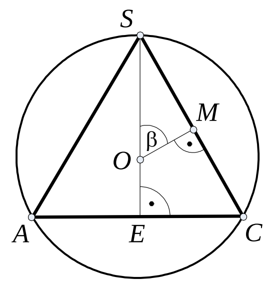
$$P_{ABT}+P_{BCT}+P_{CDT}+P_{DAT}=90\,,$$

следува $\frac{h}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA})=90$. Од друга страна, растојанието на точката E до секоја од страните на $ABCD$ изнесува $r=H\operatorname{ctg}\varphi$, па $ABCD$ е тангентен трапез со центар на впишана кружница E. Тогаш $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{DA}=18$.Со замена во горното равенство се добива $h=5$ и уште заклучуваме дека $r=\frac{\overline{AD}}{2}=3$.

Конечно, $H=\sqrt{h^2-r^2}=4$.

14. Во сфера е впишана пирамида чија основа е правоаголник со дијагонала d. Бочните рабови на пирамидата се наклонети кон рамнината на основата под агол β. Најди го радиусот на сферата.

Решение. Нека O е центарот на сферата опишана околу пирамидата $SABCD$ со основа правоаголникот $ABCD$, нека R е радиусот на сферата, нека E е пресекот на дијагоналите на правоаголникот $ABCD$ и нека M е средината на работ SC. Тогаш, триаголникот SEC е правоаголен со остар агол $\beta=\measuredangle SCE$, а точката O лежи на правата SE и е еднакво оддалечена од точките S и C, па затоа $OM\perp CS$. Бидејќи $\measuredangle SOM=\measuredangle SCE=\beta$, како агли со заемно нормални краци, имаме



$$R=\overline{OS}=\frac{\overline{SM}}{\sin\beta}=\frac{1}{2}\frac{\overline{CE}}{\cos\beta\sin\beta}=\frac{d}{2\sin 2\beta}.$$

15. Во конус е впишана топка, при што плоштината на топката и плоштината на основата на конусот се еднакви. Пресметај го косинусот од аголот на оскиниот пресек на конусот во темето што е и врв на конусот.

Решение. Еден оскин пресек на конусот и впишаната топка е рамнокрак триаголник ABC, со должина на основата еднаква на $2R$ каде R е радиус на основата на конусот, во кој е впишана кружница k со радиус r. При тоа r е радиусот на впишаната топка. Нека центар на k е точката O, а допирните точки со страните AB, BC и CA се точките K, L и M соодветно (види цртеж). Од равенството $4r^2\pi=R^2\pi$ добиваме $R=2r$.

Триаголниците AKC и OMC се слични. Ако воведеме стандардни ознаки $\overline{AK}=R$, $\overline{OK}=\overline{OM}=r$, $\overline{CK}=H$ и $\overline{AC}=s$ добиваме:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{AK}}{\overline{CK}},$$

т.е.

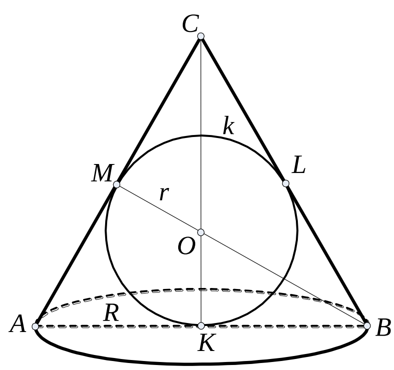
$$\frac{r}{H-r}=\frac{R}{s}=\frac{R}{\sqrt{H^2+R^2}}=\frac{2r}{\sqrt{H^2+4r^2}}.$$

Од равенството $\frac{r}{H-r}=\frac{2r}{\sqrt{H^2+4r^2}}$ добиваме $H=\frac{8}{3}r$, па според тоа $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{\frac{8}{3}r-r}=\frac{3}{5}$.

Сега, користејќи го идентитетот

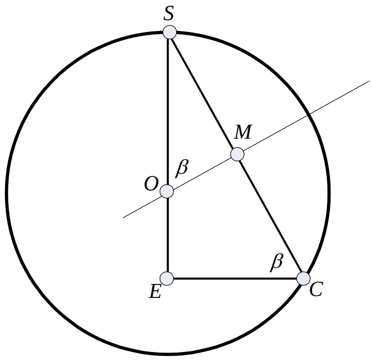
$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

не е тешко да се пресмета дека $\cos\alpha=\frac{7}{25}$.



16. Во топка е впишана пирамида со основа правоаголник. Дијагоналата на правоаголникот е d, а рабовите на пирамидата со нејзината основа зафаќаат агол β. Определи го радиусот на топката.

Решение. Нека E е пресек на дијагоналите на правоаголникот $ABCD$ кој е основа на пирамидата $SABCD$. Точката O е центар на топката во која е впишана пирамидата, а точката M е средина на работ SC на пирамидата. Триаголникот SEC е правоаголен со остар агол $\measuredangle SCE = \beta$. Точката O е еднакво оддалечена од S и C, па затоа $OM \perp SC$.



Бидејќи $SO \perp EC$, $\measuredangle ECS = \measuredangle SOM$ како агли со нормални краци. Триаголниците SEC и SMO се слични бидејќи имаат еднакви агли.

Од дефинцијата на $\sin$ и $\cos$ за триаголниците OMS и SEC имаме

$$R = \overline{OS} = \frac{\overline{SM}}{\sin\beta} = \frac{\frac{1}{2}\overline{SC}}{\sin\beta} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\overline{CE}}{\cos\beta}}{\sin\beta} = \frac{\frac{1}{2}d}{\sin 2\beta} = \frac{d}{2\sin 2\beta}.$$

4. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. За вредностите на x, за кои равенството има смисла докажи:

а) $\frac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x} = \operatorname{tg} x$, б) $\frac{1+\sin x-\cos 2x-\sin 3x}{2\sin^2 x+\sin x-1} = 2\sin x$,

в) $1-\sin 4x+\operatorname{ctg}(\frac{3}{4}\pi-2x)\cos 4x = 0$, г) $\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg}^2 3x-1}\cdot\frac{1-\operatorname{ctg}^2 3x}{\operatorname{ctg} 3x} = 1$.

Решение. а) Имаме

$$\frac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x} = \frac{2\sin^2 x+2\sin x\cos x}{2\cos^2 x+2\sin x\cos x} = \frac{\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

б) Имаме

$$\frac{1+\sin x-\cos 2x-\sin 3x}{2\sin^2 x+\sin x-1} = \frac{1-\cos 2x+\sin x-\sin 3x}{2\sin^2 x+\sin x-1} = \frac{2\sin^2 x-(\sin 3x-\sin x)}{2\sin^2 x+\sin x-1}$$

$$= \frac{2\sin^2 x-2\sin x\cos 2x}{1-\cos 2x+\sin x-1} = 2\sin x\cdot\frac{\sin x-\cos 2x}{\sin x-\cos 2x} = 2\sin x.$$

в) Имаме

$$\operatorname{ctg}(\frac{3}{4}\pi-2x) = \frac{\cos(\frac{3}{4}\pi-2x)}{\sin(\frac{3}{4}\pi-2x)} = \frac{\cos\frac{3\pi}{4}\cos 2x+\sin\frac{3\pi}{4}\sin 2x}{\sin\frac{3\pi}{4}\cos 2x-\cos\frac{3\pi}{4}\sin 2x} = \frac{\sin 2x-\cos 2x}{\sin 2x+\cos 2x}$$

$$\cos 4x = \cos^2 2x-\sin^2 2x = (\cos 2x-\sin 2x)(\cos 2x+\sin 2x).$$

Заради тоа

$$1-\sin 4x+\operatorname{ctg}(\tfrac{3}{4}\pi-2x)\cos 4x=1-\sin 4x-(\sin 2x-\cos 2x)^2$$
$$=1-2\sin 2x\cos 2x-(2\sin 2x\cos 2x)=0.$$

г) Имаме

$$\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}^2 3x-1}\cdot\frac{1-\operatorname{ctg}^2 3x}{\operatorname{ctg}3x}=\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{ctg}3x}\cdot\frac{\sin^2 3x-\cos^2 3x}{\sin^2 3x-\cos^2 3x}\cdot\frac{\cos^2 3x}{\sin^2 3x}=1 .$$

2. Ако $\sin x\cos x\neq 0$, докажи дека

$$(\sin x+\tfrac{1}{\sin x})^2+(\cos x+\tfrac{1}{\cos x})^2=7+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x .$$

Решение. Имаме:

$$(\sin x+\tfrac{1}{\sin x})^2+(\cos x+\tfrac{1}{\cos x})^2=\sin^2 x+2+\frac{1}{\sin^2 x}+\cos^2 x+2+\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$=5+\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Од друга страна

$$7+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=5+(1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x})+(1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x})=5+\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x} ,$$

па,затоа $\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}^2 3x-1}\cdot\frac{1-\operatorname{ctg}^2 3x}{\operatorname{ctg}3x}=\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{ctg}3x}\cdot\frac{\sin^2 3x-\cos^2 3x}{\sin^2 3x-\cos^2 3x}\cdot\frac{\cos^2 3x}{\sin^2 3x}=1$.

3. Ако $x+y+z=\frac{\pi}{2}$, докажи дека $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}z+\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z=1.$

Решение. Имаме

$$\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}=\operatorname{tg}(x+y)=\operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2}-z)=\operatorname{ctg}z=\frac{1}{\operatorname{tg}z} ,$$

од,каде следува бараното равенство.

4. Ако $\cos x+\cos y=a$ и $\sin x+\sin y=b$, докажи дека $\sin(x+y)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$.

Решение. Од дадените равенства добиваме:

$$\frac{b}{a}=\frac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y}=\frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} .$$

Бидејќи $\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ добиваме $\sin(x+y)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$.

5. Докажи дека:

а) $\sin^4 x+\sin^4 y+\sin^4 z\equiv\frac{1}{8}(\cos 4x+\cos 4y+\cos 4z)+\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z-\frac{3}{8}$,

б) $\cos^4 x+\cos^4 y+\cos^4 z\equiv\frac{1}{8}(\cos 4x+\cos 4y+\cos 4z)+\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z-\frac{3}{8}$.

Решение. а) Имаме:

$$\cos 4x=\cos^2 2x-\sin^2 2x=1-2\sin^2 2x=1-8\sin^2 x\cos^2 x=8\sin^4 x-8\sin^2 x+1 .$$

Аналогни идентитети важат и за аглите y и z. Со собирање на трите добиени равенства се добива тврдењето под a).

б) Имаме

$$\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1.$$

Аналогни идентитети важат и за y и z. Со собирање на добиените три идентитети го добиваме бараното равенство.

6. Докажи дека, за вредностите на $x \neq 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$ важи

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

Решение. Ќе го користиме идентитетот

$$\sin kx \cos mx = \tfrac{1}{2}[\sin(m+k)x - \sin(m-k)x].$$

Ако ги испишеме сите идентитети за $k = \frac{1}{2}$ и $m = 1, 2, ..., n$ и ги собереме добиените равенства, добиваме

$$\sin\frac{x}{2}\sum_{m=1}^{n}\cos mx = \tfrac{1}{2}[(\sin\tfrac{3x}{2} - \sin\tfrac{x}{2}) + (\sin\tfrac{5x}{2} - \sin\tfrac{3x}{2}) + ... + (\sin\tfrac{(2n+1)x}{2} - \sin\tfrac{(2n-1)x}{2})]$$

$$= \tfrac{1}{2}[\sin\tfrac{(2n+1)x}{2} - \sin\tfrac{x}{2}] = \sin\tfrac{nx}{2}\cos\tfrac{(n+1)x}{2}.$$

7. Ако $\sin x \neq 0$, докажи дека

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x = \frac{\sin nx \cos nx}{\sin x}.$$

Упатство. Во почетниот идентитет на претходната задача стави $k = 1$, а m менувај го преку непарните природни броеви од 1 до $2n-1$. Добиените равенства, како и во претходниот случај собери ги.

8. Пресметај го збирот

$$\sum_{k=1}^{n}\cos^2 kx.$$

Решение. Ако искористиме дека $2\cos^2 kx = 1 + \cos 2kx$ добиваме

$$\sum_{k=1}^{n}\cos^2 kx = \tfrac{1}{2}[n + \sum_{k=1}^{n}\cos 2kx]..$$

Но, според задача 6 имаме

$$\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx = \frac{\sin nx \cos(n+1)x}{\sin x},$$

па затоа

$$\sum_{k=1}^{n}\cos^2 kx = \tfrac{1}{2}[n+\tfrac{\sin nx\cos(n+1)x}{\sin x}]\text{, кога } \sin x \neq 0\ .$$

9. Докажи дека, за вредностите на $x \neq l\pi,\, l \in \mathbb{Z}$ важи

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\ .$$

Упатство. Користејќи го идентитетот

$$\sin mx\cdot\sin kx = \tfrac{1}{2}[\cos(m-k)x-\cos(m+k)x],$$

постапи како во задача 6.

10. Ако $\sin x \neq 0$, докажи дека

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}\ .$$

Упатство. Во идентитетот од претходната задача стави $k=1$, а m менувај го преку непарните броеви од 1 до $2n-1$ и добиените равенства собери ги.

11. Ако $\sin x \neq 0$, докажи дека

$$\sum_{k=1}^{n}\sin^2 kx = \frac{n}{2}-\frac{\sin nx\cos(n+1)x}{2\sin x}\ .$$

Упатство. Искористи го идентитетот $2\sin^2 kx = 1-\cos 2kx$, а потоа добиените равенства собери ги.

12. Ако $\sin\frac{x}{2} \neq 0$, докажи дека

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(a+kx) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos(a+\frac{nx}{2})}{\sin\frac{x}{2}}\ .$$

Упатство. Искористи ја формулата

$$\sin\tfrac{x}{2}\cos(a+kx) = \tfrac{1}{2}[\sin(a+\tfrac{(2k+1)x}{2})-\sin(a+\tfrac{(2k-1)x}{2})] \text{ за } k=0,1,2,...,n\,,$$

а потоа добиените равенства собери ги.

13. Ако $\sin x \neq 0$, докажи дека

$$\prod_{k=0}^{n}\cos 2^k x = \frac{\sin^{2n+1} x}{2^{n+1}\sin x}$$

Решение. Користејќи ги равенствата $\cos 2^k x = \frac{\sin 2^{k+1}x}{2\sin 2^k x}$, за $k=0,1,2,...,n$ добиваме

$$\cos 2^0 x\cdot\cos 2^1 x\cdot\cos 2^2 x\cdot\ldots\cdot\cos 2^n x=\frac{\sin 2^1 x}{2\sin 2^0 x}\cdot\frac{\sin 2^2 x}{2\sin 2^1 x}\cdot\ldots\cdot\frac{\sin 2^{n+1} x}{2\sin 2^n x}=\frac{\sin 2^{n+1} x}{2^{n+1}\sin x}.$$

14. Нека $\sin\frac{x}{2^n}\neq 0$. Докажи дека

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.$$

Решение. Точноста на бараниот идентитет следува од низата равенства

$$\sin x=2\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2},\ \sin\tfrac{x}{2}=2\sin\tfrac{x}{2^2}\cos\tfrac{x}{2^2},\ldots,\ \sin\tfrac{x}{2^{n-1}}=2\sin\tfrac{x}{2^n}\cos\tfrac{x}{2^n},$$

со чие множење се добива бараното равенство.

15. Докажи дека $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-\operatorname{ctg}x$, за вредностите на x за кои изразите се дефинирани.

Решение. Лесно се докажува дека, $\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}x-2\operatorname{ctg}2x$, за вредностите на x за кои изразот има смисла. Тоа значи дека

$$\frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2^k}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^k}-\frac{1}{2^{k-1}}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{k-1}},\ (k=1,2,\ldots,n).$$

Со собирање на овие равенства, се добива бараното равенство.

16. Најди ја врската меѓу a и b ако се точни равенствата:

$$x+y=\tfrac{\pi}{4},\quad \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\operatorname{tg}a,\quad \operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y=\operatorname{ctg}b$$

Решение. Од првото равенство добиваме $\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}=1$. Со користење на второто равенство добиваме $\frac{\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}=1$. Ако третото равенство го запишеме во облик $\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}=\frac{1}{\operatorname{tg}b}$ со елиминација на $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y$ од последните две добиени равенства добиваме $\operatorname{tg}a=\frac{1}{1+\operatorname{tg}b}$.

17. а) Докажи го идентитетот $\sin x+\sin 3x+\sin 9x-\sin 5x\equiv 4\sin 2x\cos 3x\cos 4x.$

б) Реши ја равенката $\sin x+\sin 3x+\sin 9x-\sin 5x=0.$

в) Докажи дека $|\sin x+\sin 3x+\sin 9x-\sin 5x|<4.$

Решение. а) Имаме:

$$\begin{aligned}\sin x+\sin 3x+\sin 9x-\sin 5x&=(\sin x+\sin 9x)+(\sin 3x-\sin 5x)\\&=2\sin 5x\cos 4x-2\sin x\cos 4x\\&=2(\sin 5x-\sin x)\cos 4x\\&=4\sin 2x\cos 3x\cos 4x.\end{aligned}$$

б) Од $4\sin 2x\cos 3x\cos 4x = 0$ добиваме $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, k е цел број.

в) Имаме $|4\sin 2x\cos 3x\cos 4x| < 4,$ бидејќи множителите од левата страна не достигнуваат максимум за исти вредности на x.

18. Определи ги a, b, c и d, ако $(a-d-cx)\sin x + (b+c+ax)\cos x \equiv x\cos x$.

Решение. Од дадениот идентитет се добиваат следните два идентитети:

$$a-d-cx \equiv 0 \wedge b+c+ax \equiv x.$$

Од овде добиваме: $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ и $d = 1$.

19. За $0 \le x \le \pi,$ реши ја равенката $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

Решение. Имаме

$$\sin x + \sin 2x + 3in3x \equiv (2\cos x + 1)\sin 2x.$$

па затоа решенија на даедената равенка се $x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \pi.$

20. Ако $1+\cos 2x \ne 0$ докажи дека функцијата $y = \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}$ може да се напише во облик $y = \operatorname{tg} mx.$ Определи го m.

Решение. Имаме

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = (2\cos x + 1)\sin 2x$$

и

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = (2\cos x + 1)\cos 2x,$$

па затоа $y = \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \operatorname{tg} 2x$, т.е. $m = 2$.

21. За функцијата $f(x) = \sin^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x + \cos^6 x,$ пресметај $f(1).$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) + 3\sin^2 x\cos^2 x \\ &= \sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1. \end{aligned}$$

Според тоа $f(1) = 1$.

22. Докажи дека равенката $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = 0,8$ нема реални решења.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x &= (\sin x \cdot \sin 3x) \cdot \sin 2x = \tfrac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) \cdot \sin 2x \\ &= \tfrac{1}{4}\sin 4x - \tfrac{1}{2}\cos 4x \cdot \sin 2x \le \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} < 0,8 \end{aligned}$$

што значи дека дадената равенла нема реални решенија.

23. Реши ја равенката $\sin^3 x+\cos^3 x=1.$

Решение. Јасно $\sin x\geq 0$ и $\cos x\geq 0.$ Бидејќи $\sin^3 x\leq \sin^2 x$ и $\cos^3 x\leq \cos^2 x$ добиваме

$$1=\sin^2 x+\cos^2 x\geq \sin^3 x+\cos^3 x=1.$$

Според тоа $\sin^2 x=\sin^3 x$ и $\cos^2 x=\cos^3 x$. Треба да ги најдеме заедничките решенија на последниот систем. Лесно се добива: $x=2k\pi \vee x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,$ каде k е цел број.

24. За кои вредности на параметарот a равенката $\sin^4 x+\cos^4 x=a$ има решенија во множеството реални броеви?

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=a \Leftrightarrow 1-\frac{\sin^2 2x}{2}=a\,.$$

Последната равенка има решенија за $0\leq 2-2a\leq 1$, т.е. $a\in[\frac{1}{2},1].$

25. Реши ја равенката $\sin^{10} x+\cos^{10} x=1$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(\tfrac{1-\cos 2x}{2})^5+(\tfrac{1+\cos 2x}{2})^5=1 \Leftrightarrow \ (1-\cos 2x)^5+(1+\cos 2x)^5=32.$$

Според тоа, $\cos^4 2x+2\cos^2 2x-3=0.$ Последната равенка со смена преминува во биквадратна равенка, која не е тешко да се реши. Конечно се добива $x=\frac{k\pi}{2}$, каде k е цел број.

26. Нека x,y,z се агли на триаголник и $p=\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z.$ Докажи:

а) Ако $p=2$, тогаш триаголникот е правоаголен.

б) Ако $p<2$, триаголникот е тапоаголен.

в) Ако $p>2$, триаголникот е остроаголен.

Решение. Изразот p ќе го трансформираме во облик од кој тврдењата ќе бидат очигледни.

$$\begin{aligned}p&=\sin^2[\pi-(y+z)]+\frac{1-\cos 2y}{2}+\frac{1-\cos 2z}{2}=\sin^2(y+z)+1-\frac{1}{2}(\cos 2y+\cos 2z)\\&=1-\cos^2(y+z)+1-\cos(y+z)\cos(y-z)\\&=2-\cos(y+z)[\cos(y+z)+\cos(y-z)]\\&=2-\cos(\pi-x)\cdot 2\cos y\cdot\cos z\\&=2+2\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z\end{aligned}$$

т.е.

$$2\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z=p-2.$$

Од последното равенство заклучуваме:

а) Ако $p = 2$, тогаш еден од аглите мора да е $\frac{\pi}{2}$.

б) Ако $p < 2$, тогаш еден од аглите мора да биде тап.

в) Ако $p > 2$, тогаш $\cos x \cos y \cos z > 0$, па сите агли се остри.

27. Во рамнокрак $\triangle ABC$, каде $\overline{AB} = \overline{BC} = b$, $\overline{AC} = a$ и $\measuredangle ABC = 20^\circ$, важи

$$a^3 + b^3 = 3ab^2.$$

Докажи!

Решение. Со примена на косинусната теорема за триаголникот ABC за страната a, имаме:

$$a^2 = 2b^2 - 2b^2 \cos 20^\circ$$
$$a^3 = 2ab^2 - 2ab^2 \cos 20^\circ$$
$$a^3 = 3ab^2 - ab^2(1 + 2\cos 20^\circ).$$

Од друга страна, според синусната теорема, имаме:

$$\frac{b}{\sin 80^\circ} = \frac{a}{\sin 20^\circ}$$
$$b = \frac{a \sin 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2a \sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\sin 20^\circ} = 4a \cos 20^\circ \cos 40^\circ$$
$$= 4a \tfrac{1}{2}[\cos(40^\circ - 20^\circ) + \cos(20^\circ + 40^\circ)]$$
$$= 2a(\frac{1}{2} + \cos 20^\circ) \Rightarrow b^3 = ab^2(1 + 2\cos 20^\circ).$$

Овој заклучок и претходниот го даваат бараното равенство.

28. Ако a, b, c се бочни рабови на тристрана пирамида кои се заемно нормални, тогаш висината h која одговара на основата е дадена со формулата

$$h = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}.$$

Решение. Ако со x, y и z ги означиме аглите кои ги зафаќа висината h со бочните рабови a, b, c соодветно, тогаш $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$. Бидејќи

$$\cos x = \tfrac{h}{a}, \cos y = \tfrac{h}{b}, \cos z = \tfrac{h}{c}, \quad \text{добиваме} \quad (\tfrac{h}{a})^2 + (\tfrac{h}{b})^2 + (\tfrac{h}{c})^2 = 1.$$

Од овде непосредно ја добиваме бараната формула.

29. Ако $x + y + z = \pi$, докажи дека $\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg} y \cdot \operatorname{ctg} z = 1$.

Решение. Имаме

$$\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg} y \cdot \operatorname{ctg} z = \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y + (\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y) \operatorname{ctg} z$$
$$= \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y + (\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y) \tfrac{-\cos(x+y)}{\sin(x+y)}$$

$$=\frac{\cos x\cos y}{\sin x\sin y}-\frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y}\cdot\frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)}$$
$$=\frac{\cos x\cos y-\cos(x+y)}{\sin x\sin y}=\frac{\sin x\sin y}{\sin x\sin y}=1.$$

30. Реши ја равенката $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=2^x.$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2})^x+(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2})^x=1$$
$$(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}})^x+(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}})^x=1$$
$$(\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}})^x+(\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}})^x$$
$$(\sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}})^x+(\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}})^x=1$$
$$\cos^x 15^\circ+\sin^x 15^\circ=1.$$
$$x=2.$$

31. Реши ја равенката $\operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x)-\operatorname{ctg}(\operatorname{tg} x)=0.$

Решение. Равенката е еквивалентна со равенката $\operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x)=\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\operatorname{tg} x)$. Оттука $\operatorname{ctg} x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{tg} x+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, т.е. со равенките

$$\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} x=\frac{\pi}{2}+k\pi$$
$$\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\pi}{2}+k\pi$$
$$\frac{2}{\sin 2x}=\frac{\pi}{2}+k\pi$$
$$\sin 2x=\frac{4}{\pi(1+4k)}.$$

Оваа равенка има решенија ако

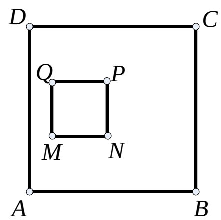
$$-1\le\frac{4}{\pi(1+4k)}\le 1$$
$$\frac{16}{(2k+1)^2\pi^2}\le 1$$
$$(2k+1+\frac{4}{\pi})(2k+1-\frac{4}{\pi})\ge 0.$$

Последното неравенство е исполнето за секој $k\in\mathbb{Z}$ освен за $k=0$ и $k=-1$. Тоа значи дека решенијата на почетната равенка се добиваат како решенија на равенката $\sin 2x=\frac{4}{\pi(1+4k)}$, за $k\neq 0$ и $k\neq -1$.

III АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

1. ВОВЕДНИ ЗАДАЧИ

1. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е впишан квадрат $MNPQ$ чии што страни се паралелни со страните на квадратот $ABCD$ (види цртеж). Докажи дека правите BQ, DN, AP и CM минуваат низ иста точка.



Решение. Без губење на општоста, претпоставуваме дека страната на квадратот $ABCD$ е со должина 1. Поставуваме координатен систем со координатен почеток во точката A и координатни оски AB (x-оска) и AD (y-оска). Тогаш: $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ и $D(0,1)$. Нека координатите на M се (a,b), каде што $0<a,b<1$. Тогаш координатите на другите точки се: $N(a+s,b)$, $P(a+s,b+s)$, $Q(a,b+s)$, каде што s е должината на страната на квадратот $MNPQ$ (јасно, $s<1$). Тогаш равенките на правите BQ, DN, AP и CM се $y=\frac{b+s}{a-1}x-\frac{b+s}{a-1}$, $y=\frac{b-1}{a+s}x+1$, $y=\frac{b+s}{a+s}x$, $y=\frac{b-1}{a-1}x+\frac{a-b}{a-1}$, соодветно.

Пресечната точка на правите DN и AP е $S(\frac{a+s}{s+1},\frac{b+s}{s+1})$. Со проверка се утврдува дека S лежи и на правите BQ и CM.

2. Да се пресмета плоштината на четириаголникот чии темиња се пресечните точки $p\cap q$, $q\cap r$, $r\cap s$, $s\cap p$ на правите p, q, r, s зададени со равенките:

(p): $2x-y+1=0$; (q): $x+4y-4=0$;

(r): $3x-2y-12=0$; (s): $x+2y-12=0$.

Решение. Со решавање на соодветните системи равенки се добиваат координатите на пресечните точки $\{A\}=p\cap q$, $\{B\}=q\cap r$, $\{C\}=r\cap s$, $\{D\}=s\cap p$:

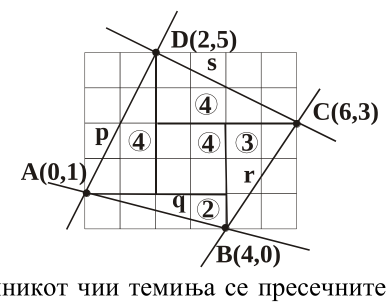
A: $2x+1=y$ и $x+4(2x+1)-4=0$; $9x=0$; $x=0$, $y=1$; $A(0,1)$

B: $x=4-4y$ и $3(4-4y)-2y-12=0$; $-16y=0$; $y=0$, $x=4$; $B(4,0)$

C: $x=12-2y$ и $3(12-2y)-2y-12=0$; $-8y+24=0$; $y=3$, $x=6$; $C(6,3)$

D: $x=12-2y$ и $2(12-2y)-y+1=0$; $-5y+25=0$; $y=5$, $x=2$; $D(2,5)$

Со нанесување на правите и точките во координатен систем (координатна мрежа) како на цртежот, четириаголникот е разделен на 4 правоаголни триаголници и еден квадрат, чии плоштини лесно се пресметуваат и се означени на цртежот. Според тоа, бараната плоштина на четириаголникот е 17.



3. Да се пресмета плоштината на четириаголникот чии темиња се пресечните точки $p\cap q$, $q\cap r$, $r\cap s$, $s\cap p$ на правите p, q, r, s зададени со равенките:

(p): $3x - 2y + 4 = 0$; (q): $x + 2y - 4 = 0$;
(r): $2x - y - 8 = 0$; (s): $x + 4y - 22 = 0$.

Решение. Со решавање на соодветните системи равенки се добиваат координатите на пресечните точки $\{A\}=p\cap q$, $\{B\}=q\cap r$, $\{C\}=r\cap s$, $\{D\}=s\cap p$:

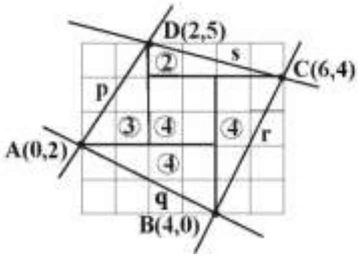
A: $x = 4 - 2y$ и $3(4 - 2y) - 2y + 4 = 0$; $16 - 8y = 0$; $y = 2$, $x = 0$; $A(0,2)$

B: $x = 4 - 2y$ и $2(4 - 2y) - y - 8 = 0$; $-5y = 0$; $y = 0$, $x = 4$; $B(4,0)$

C: $y = 2x - 8$ и $x + 4(2x - 8) - 22 = 0$; $9x - 54 = 0$; $x = 6$, $y = 4$; $C(6,4)$

D: $x = 22 - 4y$ и $3(22 - 4y) - 2y + 4 = 0$; $-14y + 70 = 0$; $y = 5$, $x = 2$; $D(2,5)$

Со нанесување на правите и точките во координатен систем (координатна мрежа) како на цртежот, четириаголникот е разделен на 4 правоаголни триаголници и еден квадрат, чии плоштини лесно се пресметуваат и се означени на цртежот. Според тоа, бараната плоштина на четириаголникот е 17.



4. Да се напише равенка на права што минува низ пресечната точка на правите $2x+7y-8=0$ и $3x+2y+5=0$ и е паралелна со правата $2x+3y-8=0$.

Решение. Од системот

$$\begin{cases} 2x+7y-8=0 \\ 3x+2y+5=0 \end{cases}$$

ги добиваме координатите на пресечната точка $x=-3$ и $y=2$. Равенката на бараната права гласи $y-2=-\frac{2}{3}(x+3)$ односно $2x+3y=0$.

5. Низ точката $(1,2)$ да се повлече права која со правата $2x+y-6=0$ зафаќа агол $\frac{\pi}{4}$.

Решение. Согласно формулата за равенка на права низ една точка и даден коефициент на правец, бараната права е $y-2=k(x-1)$ при што k е решение на равенката $\pm\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\frac{k-(-2)}{1+k(-2)}$, т.е. $\pm 1=\frac{k+2}{1-2k}$, од каде што се добива $k=3$ и $k=-\frac{1}{3}$. Значи задачата има две решенија и тоа $y-2=3(x-1)$ и $3y-6=-x+1$.

6. Низ точката $(1,2)$ да се повлече права која што со правата $2x+y-6=0$ зафаќа агол $\frac{3\pi}{4}$.

Решение. Согласно формулата за равенка на права низ една точка и даден коефициент на правец, бараната права е $y-2=k(x-1)$ при што k е решение на равенката $\pm\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=\frac{k-(-2)}{1+k(-2)}$, т.е. $\mp 1=\frac{k+2}{1-2k}$, од каде што се добива $k=3$ и $k=-\frac{1}{3}$. Значи задачата има две решенија и тоа $y-2=3(x-1)$ и $3y-6=-x+1$.

7. Да се пресмета плоштината на триаголникот со темиња во точките $A(-1,2), B(-2,-3), C(0,1)$.

Решение. Согласно формулата

$$P=\tfrac{1}{2}\,|\,(a_2-b_2)c_1+(b_2-c_2)a_1+(c_2-a_2)b_1\,|$$

за плоштината на $\varDelta ABC$ со темиња $A\left(a_1,a_2\right),\ B(b_1,b_2)\ C(c_1,c_2),$ имаме

$$P=\tfrac{1}{2}\,|\,(2+5)\cdot 0+(-3-1)\cdot(-1)+(1-2)\cdot(-2)\,|=3.$$

8. Да се пресмета плоштината на триаголникот со темиња во точките $A(-2,2), B(-1,-3)$ и $C(5,1)$.

Одговор. $P=\tfrac{1}{2}\,|\,(a_2-b_2)c_1+(b_2-c_2)a_1+(c_2-a_2)b_1\,|=17$.

9. Да се најде равенката на кружницата ако еден нејзин дијаметар е отсечката од правата $3x-4y+12=0$ зафатена меѓу координатните оски.

Решение. Имаме $y=\tfrac{3}{4}x+3.$ За $x=0$ добиваме $y=3$, а за $y=0$ добиваме $x=-4$. Значи кружницата минува низ точките $A(-4,0)$ и $B(0,3)$. Од условот на задачата следува дека центарот на кружницата $S(p,q)$ е на средината од отсечката AB. Имаме

$$p=\tfrac{-4+0}{2}=-2,\ q=\tfrac{0+3}{2}=\tfrac{3}{2},\ r=\tfrac{\overline{AB}}{2}=\tfrac{1}{2}\sqrt{16+9}=\tfrac{5}{2}.$$

Равенката на кружницата е $(x+2)^2+(y-\tfrac{3}{2})^2=\tfrac{25}{4}$.

10. Равенките на два дијаметри во една кружница се

$$x+y=14 \text{ и } 2x-3y+12=0 .$$

Да се најде равенката на кружницата, ако се знае дека таа минува низ координатниот почеток.

Решение. Јасно, центарот на кружницата $S(p,q)$ е пресечната точка на правите на кои лежат дијаметрите, што значи дека p и q се решенија на системот равенки

$$\begin{cases} x+y=14 \\ 2x-3y+12=0. \end{cases}$$

Ако првата равенка ја помножиме со 3 и ја собереме со втората равенка наоѓаме $5x=30$ од што следува $x=6$. Со замена во првата равенка добиваме $y=8$. Значи, центарот на кружницата е $S(6,8)$ и како таа минува низ координатниот почеток за нејзиниот радиус добиваме

$$r=\overline{SO}=\sqrt{(6-0)^2+(8-0)^2}=10 .$$

Конечно, равенката на кружницата е $(x-6)^2+(y-8)^2=100$.

11. Дадена е правата (p) со равенка $2x-y=7$ и точката $A(3,4)$. Да се најде

а) Равенката на правата (q) што минува низ A и е нормална на правата (p).

б) Пресечната точка B на правите (q) и (p).

в) Растојанието од точката A до правата (p).

Решение. а) Од $y=2x-7$ следува дека коефициентот на правецот на правата (p) е $k=2$ па затоа коефициентот на правецот на правата (q) е $k_1=-\frac{1}{2}$. Според тоа, равенката на правата (q) е $y-4=-\frac{1}{2}(x-3)$ т.е. $x+2y=11$.

б) Координатите на точката B се решението на системот равенки

$$\begin{cases} x+2y=11 \\ 2x-y=7 \end{cases}$$

Ако втората равенка ја помножиме со 2 и собереме со првата добиваме $5x=25$ т.е. $x=5$ па затоа $y=3$. Значи, $B(5,3)$.

в) Бараното растојание е $d=\frac{|Ax_0+Bx_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|2\cdot 3-4-7|}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{5}$.

12. а) Најди ја равенката на правата која минува низ пресекот P на правите $2x+7y-8=0$ и $3x+2y+5=0$, и е нормална на правата $2x+3y-7=0$.

б) Кое е растојанието на точката P до правата $2x+3y=7$

в) Ако A и B се пресеци на правите и нормалата колкава е плоштината на триаголникот ABP?

Решение. а) Пресекот на правите е решение на системот

$$\begin{cases} 2x+7y=8 \\ 3x+2y=-5 \end{cases}$$

па затоа $P(-3,2)$. Коефициентот на правецот на правата $2x+3y-7=0$ е $k=-\frac{2}{3}$, што значи дека коефициентот на правецот на бараната права е $k_1=-\frac{1}{k}=\frac{3}{2}$. Конечно, равенката на бараната права е $y-2=\frac{3}{2}(x+3)$ т.е. $3x-2y+13=0$.

б) Бараното растојание е $d=\frac{|2\cdot(-3)+3\cdot 2-7|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{7}{\sqrt{13}}$.

в) Координатите на A и B се решенија на системите

$$\begin{cases} 2x+7y-8=0 \\ 3x-2y-13=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x-2y-13=0 \\ 3x+2y+5=0 \end{cases}$$

и тие се $A(\frac{107}{25},\frac{-2}{25})$, $B(\frac{4}{3},-\frac{9}{2})$, $P(-3,2)$.

Плоштината на триаголникот може да се најде, на пример, по Хероновата формула

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)};\quad s=\tfrac{a+b+c}{2},\quad a=\overline{BP},\quad b=\overline{AP};\quad c=\overline{AB}.$$

13. Една права p која што минува низ координатниот почеток, ги сече правите $x+y-1=0$ и $x-y-1=0$ во точките A и B соодветно. Да се најде геометриското место на средините на отсечките AB, кога правата p ротира околу координатниот почеток.

Решение. Равенка на произволна права низ координатниот почеток има облик $y=kx$. Пресечните точки на ова права со правите $x+y-1=0$ и $x-y-1=0$ се $A(\frac{1}{1+k},\frac{k}{1+k})$, $B(\frac{1}{1-k},\frac{k}{1-k})$, при $k\neq\pm1$. Нека $M(x,y)$ е средина на отсечката AB. Тогаш

$$x=\tfrac{1}{1-k^2},\qquad y=\tfrac{k}{1-k^2}.$$

Со елиминација на k добиваме $y^2=x(x-1)$, што претставува равенка на бараното геометриско место на точки, а тоа е хипербола.

14. Да се докаже дека низ точката $A(4,3)$ можат да се повлечат две прави, кои отсекуваат од првиот квадрант триаголници со иста плоштина, еднаква на 27. Потоа да се најде аголот меѓу тие две прави.

Решение. Произволна права низ точката A има равенка $y=k(x-4)+3$, која има пресечни точки со x- и y- оската: $A_x(4-\frac{3}{k},0)$ и $A_y(0,3-4k)$.

Од условот на задачата следува дека

$$\frac{(4-\frac{3}{k})(3-4k)}{3}=27.$$

Решавајќи ја ова равенка, се добива $k_1=-\frac{3}{8}$ и $k_2=-\frac{3}{2}$. Нека аголот меѓу тие прави е α. Тогаш $\operatorname{tg}\alpha=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}=\frac{18}{25}$

15. Точката $T(1,2)$ е тежиште на триаголникот ABC; точката $D(3,4)$ е средина на страната BC, а точката $S(\frac{14}{9},\frac{10}{9})$ е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Да се најдат темињата на триаголникот ABC.

Решение. Тежиштето T ја дели тежишната линија AD во однос $1:2$, па за $A(a_1,a_2)$ ќе имаме

$$1=\tfrac{a_1+2\cdot3}{3},\qquad 2=\tfrac{a_2+2\cdot4}{3},$$

од каде што добиваме $a_1=-3$, $a_2=-2$, т.е. $A(-3,-2)$.

Нека $B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2)$. Точката $D(3,4)$ е средина на BC, па ќе имаме

$$b_1+c_1=6,\qquad b_2+c_2=8. \tag{1}$$

Точката S е центар на опишаната кружница, па радиусот r на кружницата ќе биде

$$r^2 = \overline{SA}^2 = (-3-\tfrac{14}{9})^2 + (-2-\tfrac{10}{9})^2 = \tfrac{2465}{81}.$$

Од $\overline{SB}^2 = r^2$ и $\overline{SC}^2 = r^2$, добиваме

$$(9b_1-14)^2 + (9b_2-10)^2 = 2465 \qquad (2)$$

$$(9c_1-14)^2 + (9c_2-10)^2 = 2465 \qquad (3)$$

Од (1), (2) и (3) добиваме

$$b_1 = 7, b_2 = 2, c_1 = -1, c_2 = 6 \text{ или } b_1 = -1, b_2 = 6, c_1 = 7, c_2 = 2.$$

Значи, $B(7,2), C(-1,6)$ или $B(-1,6), C(7,2)$.

16. Нека A и B се две дадени точки, а m е даден позитивен број. Да се најде геометриското место на точките M такви што $\overline{AM} = m\cdot\overline{BM}$.

Решение. Со O да ја означиме онаа точка од отсечката AB за која е $\overline{AO}:\overline{OB} = m$. Ако ставиме $\overline{OB} = a$ и ако поставиме правоаголен координатен сsстем со координатен почеток во точката O и апсцисна оска-правата AB, тогаш ќе имаме $A(-ma,0)$ и $B(a,0)$. Ако $M(x,y)$ е точка од бараното геометриско место точки, од условот $\overline{AM} = m\cdot\overline{BM}$ добиваме

$$(x+ma)^2 + y^2 = m^2[(a-x)^2 + y^2]$$

која по средувањето , се трансформира во облик

$$(m-1)x^2 + (m-1)y^2 = 2max.$$

Со последната равенка дадено е геометриското место на точки и од неа се гледа дека при $m=1$ тоа геометриско место е правата $x=0$, додека при $m\neq 1$ геометриското место е кружницата

$$(x-\tfrac{ma}{m-1})^2 + y^2 = \tfrac{m^2a^2}{(m-1)^2}.$$

17. Дадена е отсечка AB ($\overline{AB} = 2a$). Да се најде геометриско место на точките M , за кои важи $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 2c$ ($c-\text{const}$).

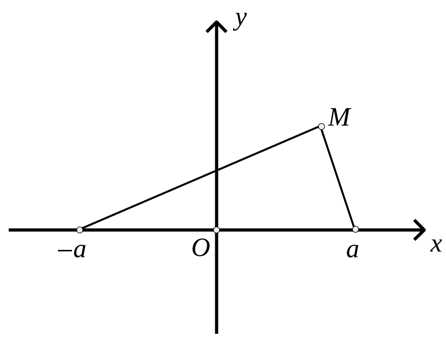
Решение. Избираме правоаголен координатен систем, така што x-оската е правата AB, а y-оската симетралата на отсечката AB. Тогаш имаме $A(-a,0)$, $B(a,0)$. Од условот

$$\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 2c,$$

добиваме

$$(x+a)^2 + y^2 - (x-a)^2 - y^2 = 2c$$

Од каде што, пак, добиваме $x = \frac{c}{2a}$. Значи, бараното геометриско место е права нормална на отсечката AB.



18. Краците на произволен прав агол со теме во координатниот почеток ја сечат параболата $y^2 = 2x$ во точките X и Y. Најди го геометриското место од средините на отсечките XY.

Решение. Едниот крак, на пример правата OX, има равенка $y = tx$, $t > 0$. Тогаш равенката на другиот крак, правата OY, е $y = -\frac{1}{t}x$. За координатите на точките X и Y добиваме $X(\frac{2}{t^2}, \frac{2}{t})$ и $Y(2t^2, -2t)$. Средината на отсечката XY да ја означиме со M и нејзините координати се $X(t^2 + \frac{1}{t^2}, \frac{1}{t} - t)$. Да означиме $x = t^2 + \frac{1}{t^2}$, $y = \frac{1}{t} - t$. Забележуваме дека $y^2 = \frac{1}{t^2} - 2 + t^2 = x - 2$. Значи бараното геометриско место е параболата $y^2 = x - 2$.

19. Темињата на еден триаголник се точки со целобројни координати, во декартов координатн систем.

Докажи дека неговите агли се различни од 60°.

Решение. Нека $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ се темиња на триаголникот (тие се со целобројни координати). Од формулите за растојание помеѓу две точки добиваме дека квадратите на должините на страните на триаголникот a^2, b^2 и c^2 се цели броеви.

Плоштината на триаголникот е еднаква на
$$P = \frac{1}{2} | x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) |,$$
и јасно е дека P е рационален број.

Нека претпоставиме дека барем еден агол на триаголникот има 60°, односно нека $\gamma = 60^\circ$. Според косинусна теорема
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - ab\ ,.$$
од каде добиваме $ab = a^2 + b^2 - c^2 \in \mathbb{Z}$.

Од друга страна, плоштината на триаголникот е еднаква на
$$P = \frac{1}{2} ab\sin\gamma = \frac{\sqrt{3}}{4} ab\ ,$$
од каде добиваме $\sqrt{3} = \frac{4P}{ab} \in \mathbb{Q}$. Последното равенство не е точно, па според тоа триаголникот не може да има агол од 60°.

20. Даден е квадрат $ABCD$ со должина на страна a. Одреди ги сите точки M во рамнината за кои е исполнето
$$\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 - \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = 2c$$
(c е позитивен број).

Докажи дека растојанието од тие точки до правата на која што лежи страната BC е константно. Одреди го тоа растојание.

Решение. Координатниот систем ќе го поставиме како на цртежот, т.е.

$$A(0,-\tfrac{a\sqrt{2}}{2}),\ B(\tfrac{a\sqrt{2}}{2},0),\ C(0,\tfrac{a\sqrt{2}}{2}),\ D(-\tfrac{a\sqrt{2}}{2},0).$$

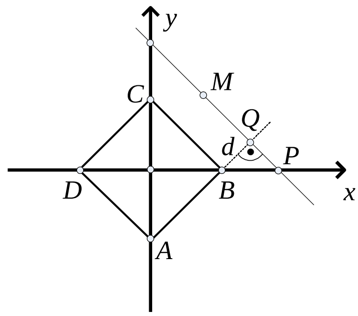
Ако $M(x,y)$, дадениот услов може да се запише во обликот

$$x^2+(y+\tfrac{a\sqrt{2}}{2})^2-(x-\tfrac{a\sqrt{2}}{2})^2-y^2-x^2-(y-\tfrac{a\sqrt{2}}{2})^2+(x+\tfrac{a\sqrt{2}}{2})^2+y^2=2c, \quad (*)$$

кој што после поедноставувањето се сведува на

$$x+y=\frac{c}{a\sqrt{2}}. \qquad (**)$$

Значи множеството точки кои што го задоволуваат условот на задачата е правата зададена со равенката $x+y=\frac{c}{a\sqrt{2}}$. Тоа е права паралелна со правата на која што лежи страната BC на квадратот.

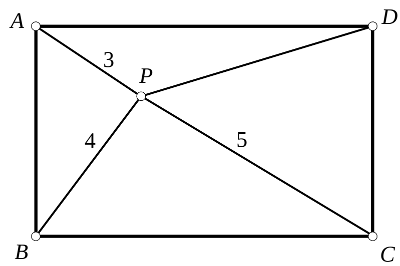


Растојанието од произволна точка M до правата на која што лежи страната BC е всушност растојание помеѓу две паралелни прави, кое што е константно.

Растојанието d меѓу правите може да се одреди од рамнокракиот правоаголен триаголник BPQ (со $P(\frac{c}{a\sqrt{2}},0)$).

Значи, $2d^2=\overline{BP}^2 \Rightarrow d=\frac{\overline{BP}}{\sqrt{2}}=|\frac{c}{2a}-\frac{a}{2}|$.

21. Точката P припаѓа на внатрешноста на правоаголникот $ABCD$. Ако $\overline{AP}=3$, $\overline{BP}=4$ и $\overline{CP}=5$, определи ја должината на отсечката DP.



Решение. Ќе воведеме координатен систем со

$$B(0,0),\ A(0,a),\ C(c,0),\ D(c,a),\ P(x,y).$$

Од Питагоровата имаме

$$\overline{PB}^2=x^2+y^2=16$$

$$\overline{AP}^2=(a-y)^2+x^2=9$$

$$\overline{CP}^2=(c-x)^2+y^2=25.$$

Тогаш

$$\begin{aligned}\overline{DP}^2&=(c-x)^2+(a-y)^2\\&=((c-x)^2+y^2)+((a-y)^2+x^2)-(x^2+y^2)\\&=25+9-16=18.\end{aligned}$$

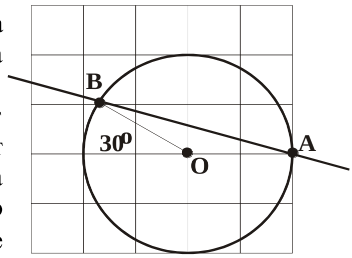
Според тоа, $\overline{DP}=3\sqrt{2}$.

2. КРУЖНИЦА И ПАРАБОЛА

1. Да се пресмета плоштината на делот од рамнината што се наоѓа во внатрешноста на кругот со центар во точката $O(3,2)$ и радиус 2 и е над правата што минува низ точките $A(5,2)$ и $B(3-\sqrt{3}, 3)$.

Решение. Равенката на кружницата е

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4.$$

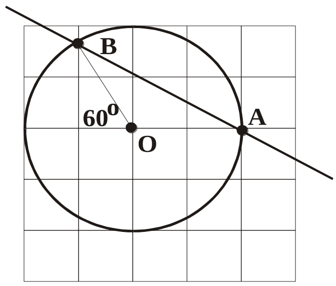


Лесно се проверува дека точките A и B лежат на кружницата. Според тоа, се бара плоштината на отсечокот, прикажан на цртежот. Неговата плоштина е еднаква на плоштината на кружниот исечок AOB минус плоштината на триаголникот AOB, која е еднаква на 1. Од положбата на точката B се заклучува дека аголот AOB е 150^o, односно $5\pi/6$. Според тоа, плоштината на исечокот е $r^2 5\pi/12 = 5\pi/3$, а бараната плоштина е $5\pi/3 - 1$.

2. Да се пресмета плоштината на делот од рамнината што се наоѓа во внатрешноста на кругот со центар во точката $O(2,3)$ и радиус 2, а е над правата што минува низ точките $A(4,3)$ и $B(1, 3+\sqrt{3})$.

Решение. Равенката на кружницата е

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4.$$



Лесно се проверува дека точките A и B лежат на кружницата. Според тоа, се бара плоштината на отсечокот, прикажан на цртежот. Неговата плоштина е еднаква на плоштината на кружниот исечок *AOV* намалена плоштината на триаголникот *AOB*, која е еднаква на $\sqrt{3}$. Од положбата на точката B се заклучува дека аголот AOB е 120^o, односно $2\pi/3$. Според тоа плоштината на исечокот е $r^2 2\pi/6 = 4\pi/3$, а бараната плоштина е $4\pi/3 - \sqrt{3}$.

3. Да се напише равенка на кружница со центар $S(1,-2)$ и радиус еднаков на радиусот на кружницата $x^2 + y^2 + 6y + 8 = 0$.

Решение. Од $x^2 + (y+3)^2 = 1$ следува дека равенката на бараната кружница гласи $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$.

4. а) Низ точката $M(4,-3)$ да се повлече права која со координатните оски зафаќа триаголник со плоштина $3cm^2$.

б) Да се најде центарот и радиусот на впишаниот круг во триаголникот.

Решение. а) Нека k е коефициентот на правецот на бараната права. Тогаш, нејзината равенка е $y+3 = k(x-4)$. Песечните точки на правата со координатните оски се $A(0,-4k-3)$ и , па затоа плоштината на $\triangle ABO$ е

$$P=\frac{1}{2}|(-4k-3)(4+\frac{3}{k})|=\frac{(4k+3)^2}{2|k|}.$$

Од условот на задачата имаме $\frac{(4k+3)^2}{2|k|}=3$ т.е. $16k^2+24k+9=6|k|$. Ќе разгледаме два случаи.

- Ако $k>0$, тогаш равенката има облик $16k^2+18k+9=0$ и таа нема реални решенија.

- Ако $k<0$, тогаш равенката има облик $16k^2+30k+9=0$ и нејзини решенија се $k_1=-\frac{3}{8}$ и $k_2=-\frac{3}{2}$. Според тоа, правите $3x+8y+12=0$ и $3x+2y-6=0$ се решение на задачата.

б) Ако $p>0$, тогаш центарот на впишаната кружница во ΔABO е $S(p,-p)$ и притоа $r=p$. Од друга страна радиусот на впишаната кружница е еднаков на растојанието од центарот до правата AB па затоа:

- во случај на правата $3x+8y+12=0$ добиваме $p=\frac{3p-8p+12}{\sqrt{3^2+8^2}}$ т.е. $p=\frac{12}{5+\sqrt{73}}$ и бараната кружница е $(x-p)^2+(y+p)^2=p^2$.

- во случај на правата $3x+2y-6=0$ добиваме $p=\frac{3p-2p-6}{-\sqrt{3^2+2^2}}$ т.е. $p=\frac{6}{1+\sqrt{13}}$ и бараната кружница е $(x-p)^2+(y+p)^2=p^2$.

5. Да се најде равенката на правата што минува низ пресекот на кружниците: $x^2+y^2+2x-1=0$ и $x^2+y^2-2y-3=0$.

Решение. Секоја пресечна точка $M(x,y)$ на дадените кружници мора да ја задоволува равенката и на едната и на другата кружница, па според тоа и равенството:

$$(x^2+y^2+2x-1)-(x^2+y^2+2y-3)=0$$

т.е. $2x+2y+2=0$ т.е. $x+y+1=0$. Значи, точката $M(x,y)$ лежи на правата $x+y+1=0$. Затоа $x+y+1=0$ е равенка на бараната права.

6. Да се најде равенката на правата што минува низ пресекот на кружниците: $x^2+y^2-2x-1=0$ и $x^2+y^2+2y-3=0.$

Одговор. $x+y-1=0$.

7. Дадената дијагонала на правоаголникот $ABCD$ лежи на правата $x+2y-1=0$, едната страна на правата $x-y+5=0$, а нејзината соседна страна лежи на права која минува низ точката $M(6,3)$. Да се најдат темињата на правоаголникот и равенката на кружница опишана околу него.

Решение. Темето A го наоѓаме во пресекот на правите $x+2y-1=0$ и $x-y+5=0$ и добиваме $A(-3,2)$. Низ точката $M(6,3)$ повлекуваме права нормална на правата $x-y+5=0$. Равенката на оваа права има облик $x+y+k=0,$

при што параметарот k го определуваме со замена на координатите на точката $M(6,3)$ и добиваме $x+y-9=0.$ Темето B го добиваме во пресекот на правите $x-y+5=0$ и $x+y-9=0.$ Имаме, $B(2,7)$. Темето C го добиваме во пресекот на правите $x+y-9=0$ и $x+2y-1=0,$ при што наоѓаме $C(17,-8)$. За да го определиме темето D ја користиме векторската равенка $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ и наоѓаме $D(12,-13)$. Центарот на кружница опишана околу правоаголникот $ABCD$ е средина на отсечката AC и тоа е точката $S(\frac{17-3}{2},\frac{2-8}{2})\equiv S(7,-3),$ а нејзиниот радиус е

$$r=\overline{AS}=\sqrt{(7+3)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{125}.$$

Конечно равенката на кружни-цата е:

$$(x-7)^2+(y+3)^2=125.$$

8. Едната катета на правоаголниот ΔABC лежи на правата $x-y+5=0$, хипотенузата на правата $x+2y-1=0$, а втората катета лежи на права која минува низ точката $M(6,3)$. Да се најдат темињата на триаголникот и равенката на кружницата опишана околу него.

Решение. Темето A го наоѓаме во пресекот на правите $x+2y-1=0$ и $x-y+5=0$ и добиваме $A(-3,2)$. Низ точката $M(6,3)$ повлекуваме права нормална на правата $x-y+5=0$. Равенката на оваа права има облик $x+y+k=0$, при што параметарот k го определуваме со замена на координатите на точката $M(6,3)$ и добиваме $x+y-9=0$. Темето B го добиваме во пресекот на правите $x-y+5=0$ и $x+y-9=0$. Имаме, $B(2,7)$. Темето C го добиваме во пресекот на правите $x+y-9=0$ и $x+2y-1=0$, при што наоѓаме $C(17,-8)$. Центарот на кружница опишана околу правоаголниот ΔABC е средина на отсечката AC и тоа е точката $S(\frac{17-3}{2},\frac{2-8}{2})\equiv S(7,-3),$ а нејзиниот радиус е

$$r=\overline{AS}=\sqrt{(7+3)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{125}.$$

Конечно равенката на кружницата е

$$(x-7)^2+(y+3)^2=125.$$

9. Дадени се кружниците

$$(k_1): x^2+y^2-6x-2y-15=0 \text{ и } (k_2): x^2+y^2-13x-y+30=0$$

и правата $(p): 3x-10y=30$.

a) Најди ги пресечните точки A и B на кружниците (k_1) и (k_2).
b) Состави равенка на права што минува низ средината на отсечката AB и е нормална на неа.
c) Состави равенка на кружница што минува низ точките A и B, а центарот и лежи на правата (p).

Решение. а) Пресечните точки A и B на кружниците (k_1) и (k_2) се добиваат со решавање на системот:

$$\begin{cases} x^2+y^2-6x-2y-15=0 \\ x^2+y^2-13x-y+30=0, \end{cases} \tag{1}$$

составен од равенките (k_1) и (k_2). Со одземање на равенките од системот (1) се добива $7x-y-45=0$ т.е. $y=7x-45$ и ако замениме во правата равенка на (1) после средувањето ја добиваме квадратната равенка $x^2-13x+22=0$ чии решенија се $x_1=11$ и $x_2=2$. Значи, $y_1=7\cdot 11-45=32$, $y_2=7\cdot 2-45=-31$, и значи дека бараните пресечни точки се $A(11,32)$ и $B(2,-31)$.

b) Ако со x_0 и y_0 ги означиме координатите на средината S на отсечката AB имаме: $x_0=\frac{11+2}{2}=\frac{13}{2}$, $y_0=\frac{32+(-31)}{2}=\frac{1}{2}$ што значи $S(\frac{13}{2},\frac{1}{2})$. Коефициент на правецот на правата AB е $k_1=\frac{-31-32}{2-11}=7$, па затоа коефициентот на правецот на правата нормална на AB е $k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{7}$. Конечно, равенката на правата (q) во точката $S(\frac{13}{2},\frac{1}{2})$, нормална на што AB е $y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{7}(x-\frac{13}{2})$ т.е. $y=-\frac{1}{7}x+\frac{10}{7}$

c) Центарот $C(u,v)$ е пресечната точка на правите (p) и (q) т.е. неговите координати се решение на системот равенки

$$\begin{cases} 3x-10y=30 \\ x+7y=10 \end{cases}$$

од каде добиваме дека $C(10,0)$. Јасно, радиусот е

$$r=\overline{AC}=\sqrt{(11-10)^2+(32-0)^2}=\sqrt{1025}\,.$$

Конечно, равенката на бараната кружница е

$$(x-10)^2+y^2=1025.$$

10. Да се најде равенката на кружницата што минува низ точките $A(-1,3)$ и $B(3,-1)$, а центарот и лежи на правата $y=3x-2$.

Решение. Равенка на кружница со центар $S(p,q)$ радиус r е

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Од условот на задачата го добиваме системот

$$\begin{cases} q=3p-2 \\ (p+1)^2+(q-3)^2=r^2 \\ (p-3)^2+(q+1)^2=r^2 \end{cases}.$$

Ако од втората равенка ја извадиме третата добиваме $8p-8q=0$ т.е. $p=q$. Заменуваме во првата равенка на системот и добиваме $p=3p-2$ од каде наоѓаме $p=1, q=1$ и со замена во втората равенка добиваме $r^2=8.$ Конечно, равенката на кружницата е $(x-1)^2+(y-1)^2=8$.

11. Низ точката $M(2,3)$, паралелно со правата $x-3y=1$ е повлечена права која ја сече кружницата $x^2+y^2-7x+3y=48$ во точките *A* и *B*. Да се пресмета должината на тетивата *AB*.

Решение. Од $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$ добиваме дека коефициентот на правецот на паралелната права е $k=\frac{1}{3}$. Равенка на права со коефициент на правец k која минува низ точка (x_0,y_0) е $y-y_0=k(x-x_0)$. Од условот на задачата следува дека равенката на пресечната права е $y-3=\frac{1}{3}(x-2)$ т.е. $x=3y-7$.

Со замена во равенката на кружницата се добива равенката

$$(3y-7)^2+y^2-7(3y-7)+3y=48$$

која е еквивалентна на равенката $y^2-6y+5=0$, чии решенија се $y_1=1$ и $y_2=5$. Со смена во $x=3y-7$ се добива $x_1=-4$ и $x_2=8$, што значи дека точките се $A(8,5)$ и $B(-4,1)$, па затоа должината на тетивата е $\overline{AB}=\sqrt{12^2+4^2}=4\sqrt{10}$.

12. Да се најде равенката на правата на која лежи дијаметарот на кружницата $x^2+y^2-6x+8y=29$ кој е нормален на правата $3x-7y+5=0$.

Решение. Равенките на кружницата и правата ги запишуваме во видот

$$(x-3)^2+(y+4)^2=54 \text{ и } y=\frac{3}{7}x+\frac{5}{7}.$$

Според тоа, центарот на кружницата е $S(3,-4)$ и коефициентот на правецот на правата е $k=\frac{3}{7}$. Бидејќи дијаметарот лежи на права која е нормална на дадената за коефициентот на правецот на оваа права имаме $k_1=-\frac{1}{k}=-\frac{7}{3}$. Конечно, бидејќи бараната права минува низ центарот на кружницата со замена во равенката $y-y_0=k_1(x-x_0)$ добиваме $y+4=-\frac{7}{3}(x-3)$ т.е. $7x+3y=9$.

13. Да се определи равенката на кружницата чиј центар е точката $M(1,2)$ и ја допира правата $y=2x+3$. Потоа да се определат координатите на допирната точка.

Решение. Радиусот на бараната кружница е еднаков на растојанието од точката $M(1,2)$ до правата $y=2x+3$, т.е. $r=\frac{2\cdot1-2+3}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$. Според тоа равенката на кружницата е $(x-1)^2+(y-2)^2=\frac{9}{5}$.

Допирната точка ја наоѓаме како решение на системот равенки

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=\frac{9}{5}\\ y=2x+3\end{cases}$$

Ако од втората равенка замениме во првата ја добиваме равенката

$$(x-1)^2+(2x+1)^2=\frac{9}{5}$$

која е еквивалентна на равенката

$$25x^2+10x+1=0$$

чие решение е $x=-\frac{1}{5}$. Сега,

$$y=2\cdot(-\tfrac{1}{5})+3=\tfrac{13}{5}$$

што значи дека допирната точка е $N(-\frac{1}{5},\frac{13}{5})$.

14. Дадена е кружницата $x^2+y^2=16$.

a) Состави ги равенките на тангентите на кружницата во нејзините точки со апциса 2.

b) Најди ја пресечната точка на тангентите и аголот меѓу нив.

Решение. а) Од $x=2$ следува $y^2=16-2^2=12$ т.е. $y_{1/2}=\pm 2\sqrt{3}$. Според тоа, допирните точки на кружницата и тангентите се $A(2,2\sqrt{3}), B(2,-2\sqrt{3})$. Ако се искористи дека равенката на тангентата на кружницата $x^2+y^2=r^2$ во точка $M(x_0,y_0)$ е $xx_0+yy_0=r^2$, тогаш за равенките на тангентите наоѓаме

$$(t_1):\quad 2x+2\sqrt{3}y=16 \text{ т.е. } y=-\tfrac{1}{\sqrt{3}}x+\tfrac{8}{\sqrt{3}} \text{ и}$$

$$(t_2):\quad 2x-2\sqrt{3}\cdot y=16 \text{ т.е. } y=\tfrac{1}{\sqrt{3}}x-\tfrac{8}{\sqrt{3}}.$$

b) За да ја определиме равенката на пресечната точка на тангентите ќе ги собереме равенките на (t_1) и (t_2). Имаме, $2y=0$ т.е. $y=0$, па затоа $x=8$, т.е. пресечната точка е $M(8,0)$. За аголот α меѓу тангентите добиваме

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-(-\frac{1}{\sqrt{3}})}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}(-\frac{1}{\sqrt{3}})}=\sqrt{3},$$

што значи $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

15. Даден е рамнокрак правоаголен триаголник со координати на темето при еден од острите агли $M(5,6)$ и равенката на правата $3x+2y=1$ на која што лежи спротивната катета.

а) Определи ги координатите на другите две темиња на триаголникот. Колку решенија има задачата?

b) Состави равенка на кружница чиј дијаметар е катетата која со крајна точка $M(5,6)$.

Решение. а) Равенката на правата (p) на која лежи втората катета ќе ја запишеме во обликот $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$. Низ точката M повлекуваме права (q) нормална на (p) и во пресекот на правите го наоѓаме темето A на правиот агол. Имаме, $(q): y-6=\frac{2}{3}(x-5)$ т.е. $(q): 2x-3y=-8$ и го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases} 2x-3y=-8 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$$

чие решение е $x=-1, y=2$ што значи дека темето на правиот агол е $A(-1,2)$. За да го определиме темето B ќе искористи дека триаголникот е рамнокрак т.е. дека $\overline{AM}=\overline{AB}$ и дека $B(u,v)$ лежи на правата (p). Имаме

$$\begin{cases}(u+1)^2+(v-2)^2=(5+1)^2+(6-2)^2\\ 3u+2v=1\end{cases}$$

Решенијата на последниот систем равенки се $u_1=-5, v_1=8$ и $u_2=3, v_2=-4$, што значи дека задачата има две решенија.

b) Центарот $S(a,b)$ на бараната кружница е средината на отсечка AM, а нејзиниот радиус е $r=\frac{\overline{AM}}{2}$. Според тоа,

$$a=\tfrac{-1+5}{2}=2, b=\tfrac{2+6}{2}=4,\ r=\tfrac{1}{2}\sqrt{(5+1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{13}$$

и равенката на кружницата е $(x-2)^2+(y-4)^2=13$.

16. Да се најдат равенките на тангентите повлечени од точката $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ кон кружницата $x^2+y^2=1$.

Решение. Ќе составиме равенка на права низ точката $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ и произволен коефициент на правец k:

$$y+\sqrt{2}=k(x-\sqrt{2}) \tag{1}$$

Произволниот коефициент k ќе го определиме од условот да правата (1) е тангента на кружницата $x^2+y^2=1$ т.е. од условот да правата (1) ја допира споменатата кружница. Тоа значи дека системот:

$$\begin{cases}y+\sqrt{2}=k(x-\sqrt{2})\\ x^2+y^2=1\end{cases} \tag{2}$$

има единствено решение по непознатите x и y. Од првата равенка во (2) го изразуваме y:

$$y=kx-k\sqrt{2}-\sqrt{2}, \tag{1'}$$

заменуваме во втората равенка т.е. во равенката на кружницата:

$$x^2+(kx-k\sqrt{2}-\sqrt{2})^2=1,$$

и после степенувањето и групирањето на соодветните членови ја добиваме квадратната равенка по x:

$$(1+k^2)x^2-2\sqrt{2}k(k+1)x+2k^2+4k+1=0 \tag{3}$$

Системот (2) ќе има единствено решение ако квадратната равенка (3) има двоен реален корен, а тоа е во случај кога дискриминантата $D=0$. Имаме:

$$D=8k^2(k+1)^2-4(1+k^2)(2k^2+4k+1)=0$$

или, после средувањето $k^2+4k+1=0$ па затоа

$$k_{1/2}=\tfrac{-4\pm\sqrt{16-4}}{2}=-2\pm\sqrt{3}.$$

Бидејќи има две решенија за k заклучуваме дека задачата има две решенија т.е. низ дадената точка $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ можат да се повлечат две тангенти на кружницата $x^2+y^2=1$. Тие се:

$$y=(-2-\sqrt{3})x-(-2-\sqrt{3})\sqrt{2}-\sqrt{2} \quad \text{т.е.} \quad y=(-2-\sqrt{3})x+\sqrt{2}+\sqrt{6}$$

и

$$y=(-2+\sqrt{3})x-(-2+\sqrt{3})\sqrt{2}-\sqrt{2} \quad \text{т.е.} \quad y=(-2+\sqrt{3})x+\sqrt{2}-\sqrt{6}\,.$$

17. Да се најдат равенките на тангентите повлечени од точката $A(\sqrt{2},\sqrt{2},)$ кон кружницата $x^2+y^2=1$.

Решение. Оваа задача може на потполно ист начин да се реши како задачата 4 од I група од овој испитен рок, но сега ќе ја решиме на поинаков начин. Нека со $M_0(x_0,y_0)$ ја означиме точката од кружницата $x^2+y^2=1$ низ која што минува бараната тангента (t). Значи координатите на точката $M_0(x_0,y_0)$ ја задоволуваат равенката на кружницата $x^2+y^2=1$, поради што

$$x_0^2+y_0^2=1 \tag{1}$$

Знаеме дека равенката на тангента на кружница $x^2+y^2=r^2$ повлечена во нејзина точка $M_0(x_0,y_0)$, е $xx_0+yy_0=r^2$, поради што имаме:

(t): $$xx_0+yy_0=1$$

По услов на задачата, тангентата (t) минува низ точката $A(\sqrt{2},\sqrt{2},)$, поради што

$$\sqrt{2}\,x_0+\sqrt{2}\,y_0=1 \tag{2}$$

Така, за определување на точката $M_0(x_0,y_0)$ го имаме системот составен од равенките (1) и (2) т.е. системот:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\,x_0+\sqrt{2}\,y_0=1 \\ x_0^2+y_0^2=1 \end{cases} \tag{3}$$

Ако од првата равенка (3) најдеме

$$y_0=\tfrac{1}{\sqrt{2}}-x_0$$

и замениме во втората равенка на (3) се добива квадратната равенка по x_0:

$$2x_0^2-\sqrt{2}x_0-\tfrac{1}{2}=0$$

чии што решенија се:

$$x_0=\tfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \Rightarrow y_0=\tfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

и

$$x_0=\tfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \Rightarrow y_0=\tfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\,.$$

Според тоа, системот (3) има две решенија па постојат две точки $M_0(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4})$ и $M_1(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4})$ на кружницата $x^2+y^2=1$ во кои што ако повлечеме тангенти тие ќе поминуваат низ точката $A(\sqrt{2},\sqrt{2})$. Значи задачата има две решенија. Едната тангента е:

$$(\sqrt{2}+\sqrt{6})x+(\sqrt{2}-\sqrt{6})y-4=0$$

а другата тангента е

$$(\sqrt{2}-\sqrt{6})x+(\sqrt{2}+\sqrt{6})y-4=0\,.$$

18. Со $y=x^2-2(k-1)x+k^2$, каде k е реален број е дадено множество параболи (секој број k определува по една парабола). Да се определи геометриското место на на точки кои се темиња на дадените парболи.

Решение. Апсцисата на темето на параболата

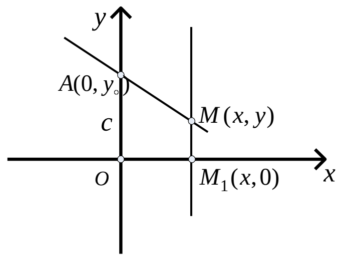
$$y=x^2-2(k-1)x+k^2\,,$$

е $x=-\frac{b}{2a}=k-1$, а соодветната ордината е $y=(k-1)^2-2(k-1)(k+1)+k^2=2k-1$. Со елиминација на параметарот k, ја добиваме равенката на бараното геометриско место на точки: $y=2x+1$.

Значи, бараното геометриско место на точки е права.

19. Најди го геометриското место на точки во рамнина за кои што разликата од квадратите на растојанијата од дадена точка и од дадена права е постојано и еднакво на c.

Решение. Нека A е дадената точка и нека таа не лежи на дадената права l. Избираме координатен систем со $x-$оска дадената права, а $y-$оска нормалата на дадената права што минува низ A. Тогаш $A(0,y_0)$.



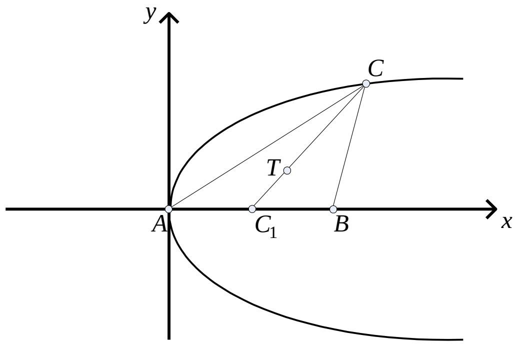
Нека $M(x,y)$ е произволна точка од бараното геометриско место и $M_1(x,0)$ е проекцијата на M на $x-$оската. Тогаш $\overline{AM}^2+\overline{M_1M}^2=c$, т.е.

$$x^2+(y-y_0)^2-y^2=c\,.\text{ Оттука }2yy_0=x^2+y_0^2-c\,.$$

1) Ако $y_0\neq 0$, т.е. A не лежи на l, бараното геометриско место е параболата $y=\frac{1}{2y_0}x^2+\frac{y_0^2-c}{2y_0}$.

2) Ако $y_0=0$, т.е. A лежи на l, добиваме $x^2=c$, па бараното геометриско место се правите $x=\sqrt{c}$ и $x=-\sqrt{c}$ за $c\geq 0$, а празно множество за $c<0$. правите се совпаѓаат, а при $c<0$ бараното множество точки е празно.

20. Што претставува геометриското место на тежиштата на триаголниците со темиња: A е во темето на параболата $y^2=2px$, B во фокусот на параболата и C на дадената парабола?

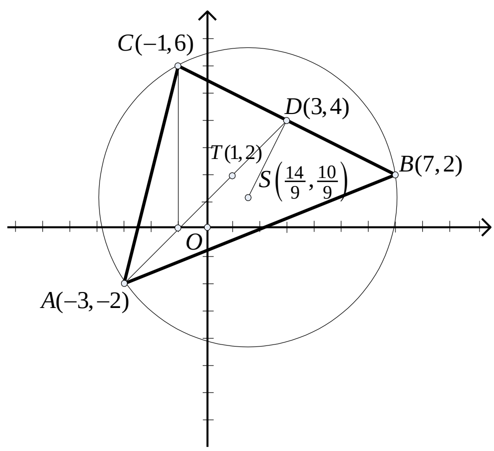


Решение. Нека $C=(x_1,y_1)$ е произволна точка од параболата $y^2=2py$, различна од $A(0,0)$. Точката C се бира да биде различна од A за да ABC биде триаголник. Нека $T=(x,y)$ е тежиштето на триаголникот ABC. За темето B коешто е во фокусот на параболата $B=(\frac{p}{2},0)$, а за половината на страната AB имаме $C_1=(\frac{p}{4},0)$. Бидејќи T ја дели отсечката C_1C во однос $1:2$, добиваме $x=\frac{p+2x_1}{6}$ и $y=\frac{y_1}{3}$, од каде што $x_1=\frac{6x-p}{2}$ и $y_1=3y$. Бидејќи $C(x_1,y_1)$ лежи на параболата, добиваме $9y^2=2p\frac{6x-p}{2}$, од каде што:

$$y^2=2p(x-\frac{p}{6}) \qquad (1)$$

Значи, бараното геометриско место на точки е парабола дадена во (1), но без темето $(\frac{p}{6},0)$, затоа што $A\neq Cx$.

21. Точката $T(1,2)$ е тежиште на триаголникот $\triangle ABC$, точката $D(3,4)$ е средина на страната BC, а $S(\frac{14}{9},\frac{10}{9})$ е центар на опишаната кружница на триаголникот ABC. Најди ги координатите на темињата на триаголникот ABC.



Решение. Од својството на тежиштето имаме $\overline{AT}:\overline{TD}=2:1$. Според тоа, $A(-3,-2)$. Значи, квадратот на радиусот на опишаната кружница на триаголникот ΔABC е

$$r^2=\overline{AS}^2=\frac{2465}{81},$$

а равенката на кружницата гласи

$$(9x-14)^2+(9y-10)^2=2465. \qquad (1)$$

Коефициентот на правецот на симетралата DS на страната BC е $k=2$. Затоа, коефициентот на правецот на страната BC е

$$k'=\frac{1}{k}=-\frac{1}{2},$$

а нејзината равенка гласи

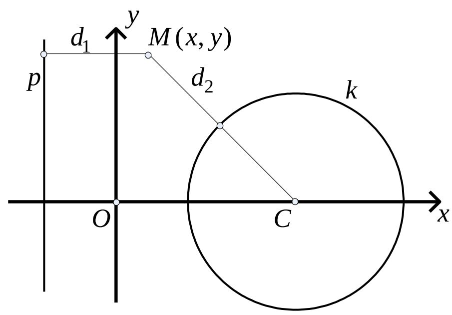
$$x+2y-11=0 \qquad (2)$$

Со решавање на системот равенки (1) и (2) добиваме $B(7,2)$ и $C(-1,6)$.

22. Дадени се кружница $(x-5)^2+y^2=9$ и права $x+2=0$. Да се најде геометриското место на точки еднакво оддалечени од кружницата и правата.

Решение. Нека k и p се дадената кружница и права. Нека $M(X,Y)$ е точка од рамнината чии растојанија до p и k се d_1 и d_2 соодветно (види цртеж), при што $d_1=|X+2|$ и

$d_2=|\overline{MC}-3|=|\sqrt{(X-5)^2+Y^2}-3|$.



Точката M припаѓа на бараното геометриско место ако и само ако $d_1=d_2$, т.е.

$$|X+2|=|\sqrt{(X-5)^2+Y^2}-3|.$$

Притоа, $X+2>0$ и $\sqrt{(X-5)^2+Y^2}-3>0$ (види цртеж). Значи,

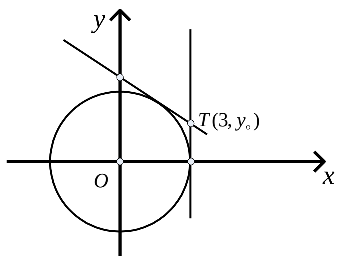
$$X+2=\sqrt{(X-5)^2+Y^2}-3,$$

од каде што се добива дека $Y^2=20X$. Според тоа, бараното геометриско место е параболата $y^2=20x$.

23. На правата $x=3$ најди точка T таква што трапезот формиран од двете тангенти повлечени од точката T кон кружницата $x^2+y^2=9$ и координатните оски има најмала плоштина.

Решение. Едната тангента повлечена од T кон дадената кружница има равенка $x=3$. Точката T има координати $(3,y_0)$. Нека равенката на втората тангента е $y=kx+l$. Тогаш важи

$$9(1+k^2)=l^2. \qquad (1)$$



Бидејќи точката $T(3,y_\circ)$ лежи на $y=kx+l$, добиваме

$$y_\circ=3k+l. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува $k=\frac{y_0^2-9}{6y_0}$, $l=\frac{y_0^2+9}{2y_0}$. Сега зап лоштината на трапезот добиваме

$$P=\frac{3(y_0+l)}{2}=\frac{9}{4}(y_0+\frac{3}{y_0})\geq\frac{9}{4}\sqrt{y_0\frac{3}{y_0}}=\frac{9\sqrt{3}}{2},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $y_0=\frac{3}{y_0}$, т.е. ако и само ако $y_0=\pm\sqrt{3}$.

Конечно, бараните точки се $T(3,\pm\sqrt{3})$, а максималната плоштина е $\frac{9}{2}\sqrt{3}$ квадратни единици.

24. Одреди го геометриското место на средините на тетивите на една кружница C, кои лежат на прави што минуваат низ дадена точка.

Решение. а) Нека равенката на кружницата е

$$x^2+y^2=r^2\,, \tag{1}$$

а равенката на правите на тетивите што минуваат низ точка $A(a,b)$

$$y-b=k(x-a)\,. \tag{2}$$

Ако од (1) и (2) извршиме елиминација на y, ја добиваме квадратната равенка

$$(1+k^2)x^2+2k(b-ak)x+(ka-b)^2-r^2=0\,,$$

чии што решенија ќе ги означиме со x_1 и x_2. Координатите на бараното геометриско место се $x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$, $y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$.

Од Виетовите формули и од равенката (2), добиваме

$$x=k\tfrac{ka-b}{1+k^2}\,,\; y=\tfrac{b-ka}{1+k^2}\,. \tag{3}$$

Елиминирајќи го k од равенствата (3), ја добиваме равенката на бараното геометриско место која гласи

$$(x-\tfrac{a}{2})^2+(y-\tfrac{a}{2})^2=\tfrac{a^2+b^2}{4}\,. \tag{4}$$

Бараното геометриско место е кружницата (4), ако точката A е во внатрешноста на кружницата (1); дел од кружницата (4), ако A е надвор од кругот определен со равенката (1).

25. Дадена е правата $x=a$ ($a>0$) и кружница со радиус a која минува низ координатниот почеток и ја допира дадената права. Низ координатниот почеток е повлечена произволна права, којашто ја сече кружницата во точката A ($A\neq 0$), а дадената права во точката B. Низ точките A и B се повлечени прави паралелни соодветно со Oy и Ox. Нека тие прави се сечат во точката M. Најди го геометриското место на точките M.

Решение. Равенката на кружницата е $x^2+y^2-ax=0$, а равенката на произволна права низ координатниот почеток е $y=kx$, $k\in\mathbb{R}$. Според тоа, ќе имаме:

$$A(\tfrac{a}{1+k^2},\tfrac{ak}{1+k^2}),\; B(a,ak)\,.$$

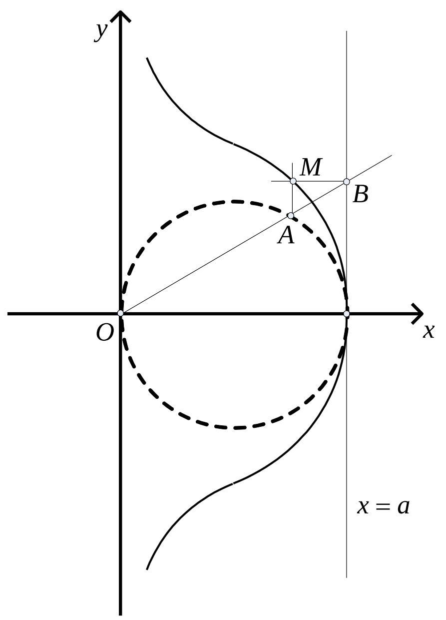
За координатите x,y на точката M имаме:

$$x=\tfrac{2}{1+k^2}\,,\; y=ak\,,$$

од каде што добиваме (со елиминација на k)

$$x(a^2+y^2)=a^3,$$

што претставува равенка на бараното геометриско место. Графикот е даден на цртежот.



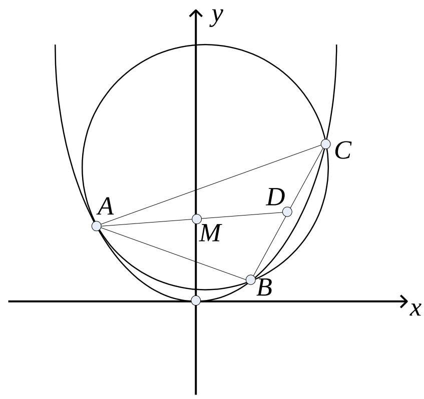
26. Дадена кружница допира дадена парабола во точката A и ја сече во точките B и C. Докажи дека средината на тежишната линија AD на триаголникот ABC припаѓа на оската на параболата.

Решение. Воведуваме координатен систем, таков што темето на параболата е во координатниот почеток, оската на параболата е $y-$ оската и е нормална на $x-$ оската. Тогаш равенката на параболата е од видот $y = mx^2, m > 0$.

Нека a, b, c се апсциси на точките A, B, C, соодветно. Апсциса на точката D е $\frac{b+c}{2}$, а апсциса на средината на отсечката AD, на точката M е $\frac{2a+b+c}{4}$.

Равенката на кружницата е од видот $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$. Координатите на заедничките точки на параболата и кружницата го задоволуваат системот равенки

$$y = mx^2,\ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2,$$



од каде што следува

$$(x-\alpha)^2 + (mx^2-\beta)^2 = r^2,$$

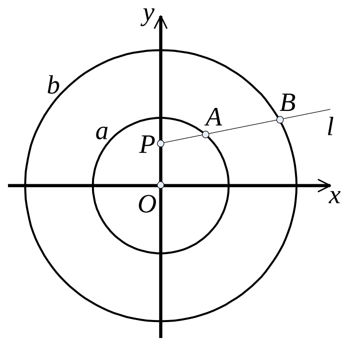
т.е.

$$m^2x^4 + (1-2m\beta)x^2 + (-2\alpha)x + (\alpha^2 + \beta^2 - r^2) = 0 .$$

Но, корените на ова равенка се апсцисите на точките A, B, C, т.е. $x = a, x = b, x = c$, при што $x = a$ е двоен корен. Од Виетовите формули следува $a + b + c + a = 0$. Значи $2a + b + c = 0$, т.е. апсцисата на точката M е 0, а тоа значи дека M лежи на $y-$ оската, т.е. на оската на параболата.

27. Дадени се концентричните кружници a и b со центар O и точката $P \neq O$ во внатрешноста на помалата кружница. Полуправата l со почетна точка P ги сече кружниците a и b во точки A и B, содветно. Докажи дека должината $\overline{AB}$ е најголема ако полуправата l е нормална на правата OP.

Решение. Воведуваме правоаголен координатен систем со координатен почеток во O. Не се губи од општоста ако претпоставиме дека точката P лежи на y-оската. Нека $d = \overline{OP}$, а r и R се радиуси на помалата и поголемата кружница, соодветно. Тогаш равенката на полуправата l е $y = kx + d,\ x \geq 0$ (не се губи од општоста ако се претпостави дека $x \geq 0$). Ако l е дел од y-оската, ќе сметаме дека $k = \infty$. Нека $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$. Тогаш важи $x_A^2 + y_A^2 = r^2$ и $y_A = kx_A + d$, $x_A \geq 0$. Од овие две равенки добиваме



$$(1+k^2)\,x_A^2 + 2kdx_A + d^2 - r^2 = 0 .$$

Од $r > d$ следува дека

$$(1+k^2)r^2-d^2>0,$$

па равенката има две реални решенија. Но, од $r>d$ добиваме

$$(kd)^2<r^2-d^2+(kr)^2, \text{ т.е. } (kd)^2<(1+k^2)r^2-d^2.$$

Бидејќи $x_A\geq 0$, гоземаме само решението:

$$x_A=\frac{-kd+\sqrt{(1+k^2)\,r^2-d^2}}{1+k^2}.$$

Аналогно

$$x_B=\frac{-kd+\sqrt{(1+k^2)R^2-d^2}}{1+k^2}.$$

Според тоа $y_A=kx_A+d$, $y_B=kx_B+d$, па растојанието меѓу точките $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ е:

$$D(k)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\frac{R^2-r^2}{\sqrt{R^2-\frac{d^2}{1+k^2}}+\sqrt{r^2-\frac{d^2}{1+k^2}}}.$$

Последниот израз има најголема вредност ако именителот е најмал, т.е. ако $\frac{d^2}{1+k^2}$ има најголема вредност, а таа се достигнува за $k=0$. Оттука следува дека полуправата l е нормална на правата OP.

28. а) Кој дел од рамнината е ограничен со неравенствата:

$$3x+4y-25\leq 0,\quad 5x-12y-65\leq 0 \;\text{ и }\; 8x-15y+85\geq 0.$$

б) Состави равенка на кружница впишана во делот од рамнината под а).

Решение. Секое од овие неравенства определува полурамнина, поради што делот од рамнината што се бара е пресек на три полурамнини. Граничните прави се сечат во точките $A(10,-\frac{5}{4})$, $B(\frac{5}{7},\frac{40}{7})$ и $C(-95,-45)$. Пресечните точки ги наоѓаме како решенија на следните системи равенки:

$$A:\begin{cases}3x+4y-25=0\\5x-12y-65=0\end{cases},\quad B:\begin{cases}3x+4y-25=0\\8x-15y+85=0\end{cases}\quad\text{и}\quad C:\begin{cases}5x-12y-65=0\\8x-15y+85=0\end{cases}$$

За да определиме која фигура е ограничена со дадените неравенства треба да ја провериме дали пресечната точка меѓу две прави припаѓа на делот од рамнината определен со третото неравенство. Со непосредна проверка добиваме дека последното важи за сите три точки A,B и C, па оттука заклучуваме дека со дадените неравенства е определен ΔABC.

б) Поаѓајќи од формулата $\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$ за симетралите меѓу правите $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ за симетрала на внатрешниот агол кај темето A во ΔABC наоѓаме $x+8y=0$, а за симетралата на внатрешниот агол кај темето B во ΔABC добиваме $13x-y=0$. Решението на системот

$$\begin{cases}x+8y=0\\13x-y=0\end{cases}$$

е точката $O(0,0)$ и таа е центарот на впишаната кружница во ΔABC.

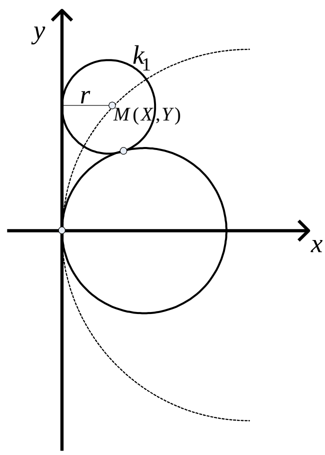
Радиус r на впишаната кружница во ΔABC е еднаков на растојанието од точката $O(0,0)$ до правата $3x+4y-25=0,$ па затоа

$$r=\frac{|3\cdot 0+4\cdot 0-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=5\,.$$

Конечно, равенката на бараната кружница е $x^2+y^2=5^2$.

29. Нека a е позитивен реален број. Најди го геометриското место на центрите на кружниците кои ги допираат кружницата $x^2+y^2-2ax=0$ и y - оската.

Решение. Нека $k_1:\ (x-X)^2+(y-Y)^2=r^2$ е кружница чиј центар $M(X,Y)$ припаѓа на бараното геометриско место. Бидејќи y-оската е тангента на k_1, следува дека $X=r$ или $X=-r$.



1) Ако $X=r$, добиваме дека

$$k_1: x^2-2xX+y^2-2yY+Y^2=0\,.$$

Сега, од системот

$$\begin{cases} x^2-2xX+y^2-2yY+Y^2=0 \\ x^2+y^2-2ax=0 \end{cases},$$

добиваме

$$-2xX-2yY+2ax+Y^2=0\,.$$

Оттука, ако $Y\neq 0$, имаме

$$y=\tfrac{1}{2Y}(-2xX+2ax+Y^2)=\tfrac{a-X}{Y}x+\tfrac{Y}{2}\,.$$

Со замена во втората равенка од системот, добиваме

$$x^2+\tfrac{(a-X)^2}{Y^2}x^2+(a-X)x+\tfrac{Y^2}{4}-2ax=0\,.$$

Бидејќи двете кружници имаат едиствена пресечна точка, следува дека мора дискриминантата на последната равенка да е нула. Значи,

$$(X+a)^2-Y^2(1+\tfrac{(a-X)^2}{Y^2})=0\,.$$

Со средување на последново равенство добиваме $Y^2=4aX$. Значи бараното геометриско место во овој случај е параболата $y^2=4ax$.

Ако $Y=0$, се добива

$$\begin{cases} x^2-2xX+y^2=0 \\ x^2+y^2-2ax=0 \end{cases}.$$

Оттука $2(a-X)x=0$. Уште и $a\neq X$ (во спротивно кружниците би се совпаѓале), па $x=0$ и $y=0$. Според тоа двете кружници се допираат. Во овој случај бараното геометриско место на точки е позитивниот дел од $x-$оската.

2) Ако $X=-r$ и $Y=0$, работејќи слично како во 1) го добиваме системот

$$\begin{cases} x^2+2xr+y^2-2yY+Y^2=0 \\ x^2+y^2-2ax=0 \end{cases}$$

а потоа и равенката

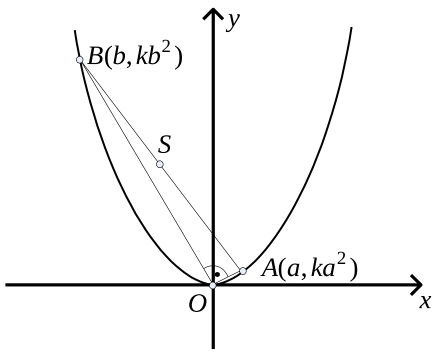
$$(1+(\tfrac{a+r}{Y})^2)x^2+(r-a)x+\tfrac{Y^2}{4}=0,$$

чија дискриминанта е $-Y^2-4ar$ и е негативна. Значи кружниците немаат пресечни точки. Ако $Y=0$ се добива негативниот дел од x-оската.

Конечно, бараното геометриско место на точки е x-оската и параболата $y^2=4ax$.

30. Докажи дека центрите на опишана кружница околу правоаголен триаголник, чии темиња лежат на дадена парабола, и темето каде што е правиот агол се совпаѓа со темето на параболата, лежат исто така на парабола.

Решение. Нека темињата на правоаголниот триаголник AOB со прав агол кај темето $O(0,0)$ лежат на параболата $y=kx^2$ (јасно $O(0,0)$ е теме на параболата). Тогаш координатите на темето A се (a,ka^2) а на B се (b,kb^2) каде што $a,b\neq 0$. Равенката на правата низ O и A е $y=kax$ а низ O и B е $y=kbx$. Бидејќи OA и OB се заемно нормални прави следува дека $b=-\frac{1}{k^2a}$. Значи



темето B има координати $(-\frac{1}{k^2a},\frac{1}{k^3a^2})$. Ако S е центарот на опишаната кружница околу триаголникот, тогаш S е средина на $\overline{AB}$ па има координати

$$S(\tfrac{1}{2}(a-\tfrac{1}{k^2a}),\tfrac{1}{2}(ka^2+\tfrac{1}{k^3a^2})),.$$

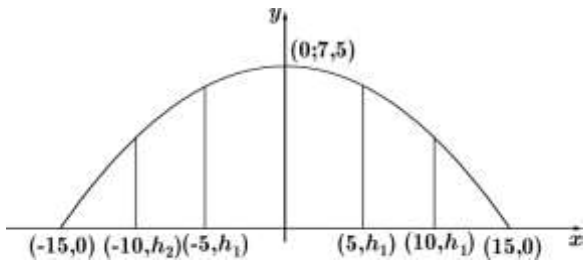
Нека $x=\frac{1}{2}(a-\frac{1}{k^2a})$, $y=\frac{1}{2}(ka^2+\frac{1}{k^3a^2})$. Тогаш

$$y=\tfrac{1}{2}(ka^2+\tfrac{1}{k^3a^2})=\tfrac{1}{2}k((a-\tfrac{1}{k^2a})^2+\tfrac{2}{k^2})=\tfrac{1}{2}k((2x)^2+\tfrac{2}{k^2})=2kx^2+\tfrac{1}{k}.$$

31. На река широка $30m$ треба да се изгради параболичен мост со столбови на растојание $5m$. Висината на средниот столб е $7,5m$.

Колкави се висините на другите столбови?

Решение. Мостот го поставуваме во координатен систем како на цртежот. Тогаш равенката на параболата е $y=ax^2+b$ а бидејќи таа минува низ точките $(0;7,5)$ и $(15,0)$ добиваме $b=7,5$ и $a=-\frac{1}{30}$. Висините на другите столбови се $h_1=-\frac{1}{30}5^2+7,5=\frac{20}{3}$ и $h_2=-\frac{1}{30}10^2+7,5=\frac{25}{6}$.



32. Определи ја кривата на која се наоѓаат темињата на параболите $y=-x^2+bx+c$, кои ја допираат параболата $y=x^2$.

Решение. Нека параболите $y=-x^2+bx+c$ и $y=x^2$ меѓусебно се допираат. Тогаш равенката $-x^2+bx+c=x^2$ има едно решение. Равенката $2x^2-bx-c=0$ има едно решение, т.е. има двоен корен ако и само ако $b^2+8c=0$. Според тоа параболите се допираат ако и само ако $c=-\frac{b^2}{8}$, т.е. ако и само ако параболата $y=-x^2+bx+c$ го има обликот $y=-x^2+bx-\frac{b^2}{8}$. Нејзино теме е $T(\frac{b}{2},\frac{b^2}{8})$. Бидејќи $\frac{b^2}{8}=\frac{1}{2}(\frac{b}{2})^2$, добиваме дека темињата на параболите се наоѓаат на параболата $\frac{b}{2}\to\frac{1}{2}(\frac{b}{2})^2$, т.е. $y=\frac{1}{2}x^2$.

33. Дадена е фамилијата параболи $y(x)=mx^2+2x+n,\ m,n\in\mathbb{R}$.

а) Да се определи онаа парабола која минува низ точките A и B кои лежат на правата $y=1$, симетрични се во однос на правата $x=2$ и такви, што $\overline{AB}=2$.

б) Да се најдат нулите на оваа парабола.

Решение. а) Бидејќи точките A и B лежат на правата $y=1$ добиваме $A(x_1,1)$, $B(x_2,1)$. Понатаму, од $\overline{AB}=2$ следува $2=|x_1-x_2|$ и како без ограничување на општоста можеме да земе дека $x_1>x_2$ добиваме $x_1-x_2=2$. Точките A и B лежат на парабола од дадениот вид, па затоа

$$\begin{aligned} mx_1^2+2x_1+n&=1,\\ mx_2^2+2x_2+n&=1, \end{aligned}\qquad (1)$$

и ако ги одземеме последните две равенки добиваме

$$m(x_1^2-x_2^2)+2(x_1-x_2)=0$$

од што следува $m(x_1+x_2)=-2$. Но, точките A и B се симетрични во однос на правата $x=2$, па затоа $\frac{x_1+x_2}{2}=2$ т.е. $x_1+x_2=4$, што значи дека $m=-\frac{1}{2}$. Од системот равенки

$$\begin{cases} x_1+x_2=4\\ x_1-x_2=2 \end{cases}$$

наоѓаме $x_1 = 3, x_2 = 1$. Конечно, со замена во правата равенка од (1) добиваме $n = 1-(-\frac{1}{2})\cdot 3^2 - 2\cdot 3 = -\frac{1}{2}$ и бараната парабола има равенка $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}$.

б) Нулите на параболата се добиваат како решенија на равенката

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2} = 0.$$

Имаме, $x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{3}$.

34. Дадено е множество параболи

$$f(x) = ax^2 + (2a-3)x + a + 1,\ a \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Определи го геометриското место на темињата на параболите. Каква е зависноста меѓу координатите на темињата на парболите?

Решение. Нека точката $T(x_T, y_T)$ е теме на параболата

$$f(x) = ax^2 + (2a-3)x + a + 1. \qquad (1)$$

Параболата ќе ја запишеме во облик

$$f(x) = a(x^2 + \tfrac{2a-3}{a}x) + a + 1 = a(x^2 + 2\tfrac{2a-3}{2a}x + (\tfrac{2a-3}{2a})^2 - (\tfrac{2a-3}{2a})^2) + a + 1,$$

односно

$$f(x) = a(x + \tfrac{2a-3}{2a})^2 + \tfrac{16a-9}{4a}.$$

Според тоа, $T(\frac{3-2a}{2a}, \frac{16a-9}{4a})$, односно $x_T = \frac{3-2a}{2a}, y_T = \frac{16a-9}{4a}$. Од првото од последните две равенства имаме $a = \frac{3}{2(1+x_T)}$ и ако замениме во y_T добиваме

$$y_T = \tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{2}x_T.$$

Значи, геометриското место на темињата на двете параболи е

$$A = \{(\tfrac{3-2a}{2a}, \tfrac{16a-9}{4a}) \mid a \in \mathbb{R}, a \neq 0\},$$

и сите точки припаѓаат правата $y = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x$. Не е тешко да се види дека секоја точка од $y = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x,\ x \neq -1$ е теме на една од множеството параболи зададени со (1).

35. Множеството прави Γ е определено со равенката $y = 2ax - a^2$. Определи го множеството точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ низ кои не минува ниту една од правите од множеството Γ.

Решение. Ако (x, y) е точка од рамнината низ која не минува ниту една права од множеството прави Γ, тогаш равенката $y = 2ax - a^2$ нема реално решение по параметарот a во множеството реални броеви. Значи, квадратната равенка

$$a^2 - 2ax + y = 0$$

нема реални решенија. Според тоа, нејзината дискриминанта D е негативна. Сега $(-2x)^2 - 4y < 0$, односно $x^2 < y$.

Обратно, нека (x, y) е точка од рамнината за која $x^2 < y$. Нека претпоставиме дека постои права $y = 2ax - a^2$ која минува низ точката (x, y). Значи, равенката

$$a^2 - 2ax + y = 0$$

има реално решение. Според тоа, $D \geq 0$, каде $D = 4(x^2 - y)$. Добиваме $x^2 - y \geq 0$, т.е. $y \leq x^2$ што е во спротивност со почетната претпоставка.

Конечно, множеството точки од рамнината низ кои не минува ниту една права од множеството точки Γ е внатрешноста на параболата $y = x^2$.

36. Низ точка која припаѓа на x-оската и е различна од $(0,0)$ се повлечени две прави l и m. Правата l ја сече параболата $y = x^2$ во точки со апсциси s_1 и s_2, а правата m во точки со апсциси t_1 и t_2.

Докажи дека

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}.$$

Решение. Апсцисите x_1 и x_2 на точките на пресек на правата $y = kx + b$ и параболата $y = x^2$ се решенија на равенката $x^2 = kx + b$. Според виетовите правила, добиваме

$$x_1 + x_2 = k$$
$$x_1 x_2 = -b$$

Нека правата $y = kx + b$ ја сече оската Ox во точката x_0. Да забележиме дека од условот на задачата $x_\circ \neq 0$, и

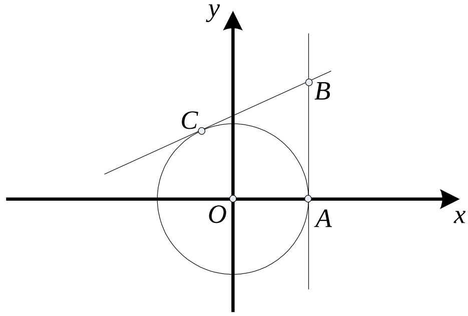
$$x_0 = -\frac{b}{k} = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}.$$

Сега $\frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, па од условот на задачата имаме

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}.$$

37. Во точката $A(4,0)$ повлечена е тангентата на кружницата $x^2 + y^2 = 16$. Одреди точка B на таа тангента таква што плоштината на трапезот образуван од координатните оски и тангентите на кружницата повлечени од точката B има плоштина 26.

Решение. Нека t е тангентата на кружницата повлечена во точката A и $B(4,b) \in t$. Со $C(0,c)$ да ја означиме пресечната точка на правата BC и y-оската. Тогаш за плоштината на трапезот $OABC$ добиваме $\frac{b+c}{2} \cdot 4 = 26$, односно $b + c = 13$.



Натаму, равенката на правата BC гласи $y=\frac{b-c}{4}x+c$. Условот правата $y=kx+n$ да биде тангента на кружницата $x^2+y^2=r^2$ е $r^2(1+k^2)=n^2$, па добиваме $16(1+(\frac{b-c}{4})^2)=c^2$ и оттука $c=\frac{16+b^2}{2b}$. Заменувајќи $b+c=13$ во последното равенство добиваме $3b^2-26b+16=0$. Решенијата на оваа равенка се $b_1=\frac{2}{3}$ и $b_2=8$. Точката B може да биде од двете страни на x-оската (кружницата е симетрична во однос на $x-$оската) па затоа добиваме 4 точки кои го исполнуваат условот на задачата. Тие се $B_1(4,8), B_2(4,-8), B_3(4,\frac{2}{3})$ и $B_4(4,-\frac{2}{3})$.

38. Нека n природан број. Докажи дека кружницата $x^2+y^2=4^n$ не минува низ точка со целобројни координати, која не е на x-оска или на y-оска.

Решение. За фиксен природен број n, дадената кружница минува низ точките со целобројни координати $(\pm 2^n,0)$ и $(0,\pm 2^n)$. Да претпоставиме дека постои целоброен пар (x,y) кој ја задоволува равенката и за кој $|x|<2^n, |y|<2^n.$ Не е можно едната координата да биде парен, а другата непарен број. (Тогаш левата страна на равенката би била непарен број, а десната парен број). Исто така не е можно двете координати да бидат непарни броеви. Имено, ако

$$x=2p+1,\ y=2q+1, (p,q\in\mathbb{Z}),\ \text{тогаш}\ x^2+y^2=2[2(p^2+q^2+p+q)+1],$$

па според тоа $2(p^2+q^2+p+q)+1=2^{2n-1}$ што не е можно. Да претпоставиме дека двете координати се парни цели броеви. Тогаш постојат непарни цели броеви a и b и природен број $k,(k<n)$ такви што $x=2^k a,\ y=2^k b.$ Во тој случај почетното равенство го добива обликот $a^2+b^2=2^{2(n-k)}$ кое, како што видовме, не е исполнето за нитуедни a и b.

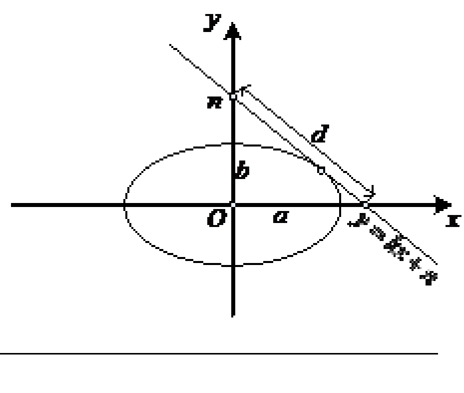
3. ЕЛИПСА И ХИПЕРБОЛА

1. Одреди ја онаа тангента на елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ која со координатните оски формира триаголник со најмала хипотенуза.

Решение. Нека правата $y=kx+n$ е тангента на дадената елипса. Според тоа системот

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=kx+n\end{cases}$$

има единствено решение. Заменувајќи го y од втората во првата равен-



ка добиваме квадратна равенка по y и користејќи дека нејзината дискриминанта е еднаква на 0 го добиваме условот за допир на правата и елипсата $a^2k^2+b^2=n^2$. Ако $k=0$ или $n=0$ тангентата е паралелна со една од координатните оски, па не формира триаголник. Значи можеме да претпоставиме дека $k\neq 0$ и $n\neq 0$. Натаму, ако ја запишеме равенката на тангентата во сегментен облик добиваме $\frac{x}{-\frac{n}{k}}+\frac{y}{n}=1$, па нејзиниот отсечок меѓу координатните оски има должина

$d=\sqrt{\frac{n^2}{k^2}+n^2}$. Според тоа

$$d^2=\frac{n^2}{k^2}+n^2=\frac{a^2k^2+b^2}{k^2}+a^2k^2+b^2=a^2k^2+\frac{b^2}{k^2}+a^2+b^2=(ak-\frac{b}{k})^2+(a+b)^2.$$

Должината на отсечокот ќе биде најмала ако $ak-\frac{b}{k}=0$. Оттука $k=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ и $n=\pm\sqrt{ab+b^2}$ ($a,b>0$). Значи постојат четири прави со бараната особина и тие се

$$y=\sqrt{\frac{b}{a}}\,x+\sqrt{ab+b^2}\,,\quad y=\sqrt{\frac{b}{a}}\,x-\sqrt{ab+b^2}\,,$$
$$y=-\sqrt{\frac{b}{a}}\,x+\sqrt{ab+b^2}\,,\ y=-\sqrt{\frac{b}{a}}\,x-\sqrt{ab+b^2}\,.$$

2. На елипсата $9x^2+4y^2-18x-16y=11$ да се најде точка A најблиска до правата $x+y=8$ и точка B најоддалечена од истата права.

Решение. Бараните точки се точки во кои елипсата допира прави p и q кои се паралелни со правата $x+y=8$. Нека s е права паралелна со правата $x+y=8$, т.е. $s:\ y=n-x$, за некој $n\in\mathbb{R}$. Заменувајќи во $9x^2+4y^2-18x-16y=11$, добиваме:

$$9x^2+4(n-x)^2-18x-16(n-x)=11,$$

т.е.

$$13x^2-x(8n+2)+4n^2-16n-11=0. \qquad (1)$$

Точките A и B се единствени, па затоа решението на (1) по x е двоен корен, што значи дека дискриминантата на (1) е нула, т.е.

$$D=(8n+2)^2-4\cdot 13\cdot(4n^2-16n-11)=0.$$

Со средување, се добива дека

$$D=-144(n^2-6n-4),$$

па од $n^2-6n-4=0$, добиваме дека $n=3\pm\sqrt{13}$. За $n=3+\sqrt{13}$ ја добиваме најблиската точка $A(1+\frac{4\sqrt{13}}{13},2+\frac{9\sqrt{13}}{13})$, а за $n=3-\sqrt{13}$ ја добиваме најоддалечената точка $B(1-\frac{4\sqrt{13}}{13},2-\frac{9\sqrt{13}}{13})$.

3. Нека P_1 и P_2 се пресеците на произволна тангента од елипсата

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,,\ (\,a>b\,)$$

со тангентите на таа елипса што се повлечени во темињата на нејзината главна оска. Докажи дека отсечката P_1P_2 се гледа од кој било фокус на елипсата под прав агол.

Решение. Фокуси на елипсата се $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$, каде што $c^2=a^2-b^2$. Равенката на тангентата на елипсата, повлечена во една нејзина произволна точка (x_0,y_0), гласи $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$. Пресеците на ова тангента со правите $x=a$ и $x=-a$ се точките

$$P_1(a,\frac{b^2}{y_0}(1-\frac{x_0}{a}))\ \text{и}\ P_2(-a,\frac{b^2}{y_0}(1+\frac{x_0}{a}))\ .$$

Коефициентите на правците на правите P_1F_1 и P_2F_2 се

$$k_1=\frac{b^2}{y_0}\frac{1-\frac{x_0}{a}}{a-c}\ \text{и}\ k_2=\frac{b^2}{y_0}\frac{1+\frac{x_0}{a}}{-a-c},$$

па имаме:

$$k_1k_2=\frac{b^2}{y_0}\frac{1-\frac{x_0}{a}}{a-c}\frac{b^2}{y_0}\frac{1+\frac{x_0}{a}}{-a-c}=\frac{b^4}{y_0^2}\frac{1-\frac{x_0^2}{a^2}}{-(a^2-c^2)}=\frac{b^4}{y_0^2}\frac{\frac{y_0^2}{b^2}}{-(a^2-c^2)}=\frac{b^2}{-(a^2-c^2)}=-1\,.$$

Значи, правите P_1F_1 и P_2F_1 зафаќаат прав агол, т.е. отсечката P_1P_2 се гледа од фокусот F_1 под прав агол.

Поради симетрија, истото тврдење важи и за фокусот F_2 .

4. Да се определи геометриското место на точките M од кои елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ се гледа под прав агол.

Решение. Нека $M(\alpha,\beta)$ е точка од која дадената елипса се гледа под права агол. Произволна права низ M има равенка

$$y-\beta=k(x-\alpha)\,,\ \text{т.е.}\ y=kx+\beta-k\alpha$$

или $x=\alpha$. Услов за правата $y=kx+\beta-k\alpha$ и елипсата да имаат точно една заедничка точка е системот равенки по x и y

$$y=kx+\beta-k\alpha\,,\ b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

да има единствено решение, т.е. равенката

$$(b^2+a^2k^2)x^2+2a^2k(\beta-k\alpha)x+a^2(\beta-k\alpha)^2-a^2b^2=0$$

да има единствено решение. Значи, потребно е и доволно е дискриминантата да биде нула, т.е.

$$(a^2-\alpha^2)k^2-2\beta\alpha k+b^2-\beta^2=0\,.$$

Нека k_1 и k_2 се решенија на оваа квадратна равенка. За елипсата да се гледа под прав агол од M потребно е правите $y=k_1x+\beta-k_1\alpha$ и $y=k_2x+\beta-k_2\alpha$ да се сечат под прав агол, т.е. $k_1k_2=-1$. Но, $k_1k_2=\frac{b^2-\beta^2}{a^2-\alpha^2}$, од што следува дека

$b^2 - \beta^2 = -a^2 + \alpha^2$, т.е. $\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2$. Ако правата $x = \alpha$ е тангента на елипсата тогаш $\alpha = \pm a$ и за елипсата да се гледа под прав агол од M мора да биде $\beta = \pm b$. Значи и во овој случај $\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2$. Според тоа, бараното геометриско место е кружница со центар во $(0,0)$ и радиус $a^2 + b^2$.

5. Дадени се две заемно нормални прави p и q и една точка O што не лежи на ниедна од правите p и q. Една променлива права низ точката O ги сече правите p и q соодветно во точките A и B. Да се најде геометриското место на средините M од отсечките AB.

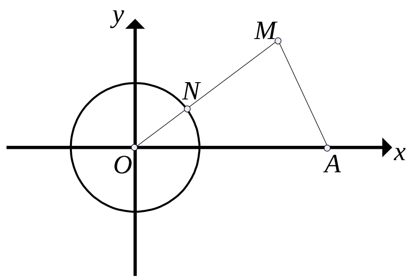
Решение. Да избереме правоаголен координатен систем со почеток во точката O и координатни оски паралелни со правите p и q соодветно. Ако x-оската е паралелна со правата p, а y-оската е паралелна со правата q, тогаш равенките на правите p и q ќе бидат соодветно $y = a$ и $x = b$. Равенката на произволна права низ точката O ќе биде $y = kx$, каде што k е реален параметер. Оваа права ја сече правата p во точката $A(\frac{a}{k}, a)$, а правата q во точката $B(b, kb)$. Средината M на отсечката AB ќе има координати

$$x = \frac{1}{2}(\frac{a}{k} + b), \qquad y = \frac{1}{2}(a + kb).$$

Со елиминација на параметарот k добиваме , $2xy = ax + by$, што претставува равенка на бараното геометриско место.

6. Што претставува геометриското место на точки во рамнината Oxy еднакво оддалечени од кружницата $x^2 + y^2 = 1$ и точката $A(3,0)$?

Решение. Нека $M(x, y)$ е произволна точка од бараното геометриско место точки и N е точка во која правата OM (O е координатен почеток) се сече со кружницата. Бидејќи $\overline{NM} = \overline{AM}$, имаме



$$\overline{NM} = \overline{OM} - \overline{ON} = \overline{OM} - 1$$

$$\overline{OM} = \sqrt{x^2 + y^2} \ ,$$

$$\overline{AM} = \sqrt{(x-3)^2 + y^2} \ ,$$

добиваме

$$\sqrt{x^2 + y^2} - 1 = \sqrt{(x-3)^2 + y^2} \ .$$

Со квадрирање се добива

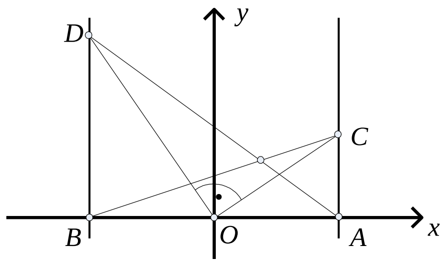
$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3x - 4 \ .$$

Со повторно квадрирање се добива

$$8x^2 - 24x - y^2 + 16 = 0 \text{, т.е. } 8(x - \tfrac{3}{2})^2 - y^2 = 2,$$

а ова е равенка на хипербола.

7. Во рамнината е даден правоаголен координатен систем со почеток O. Точките A и B се дадени со своите координати $A(a,0)$ и $B(-a,0)$, при што $a>0$. На нормалата на x-оската во A, дадена е произволна точка C, а точката D се наоѓа на нормалата на x-оската во B, така што аголот COD е прав. Да се определи и испита геометриското место на точки определено со пресеците на правите BC и AD.



Решение. Нека равенката на правата OC е $y=kx$, каде што k е произволен параметер. Бидејќи правата OD е нормална на правата OC нејзината равенка е

$$OD: \qquad y=-\tfrac{1}{k}x.$$

Оттука лесно се добиваат координатите на точките C и D, т.е.

$$C(a,ka) \qquad \text{и} \qquad D(-a,\tfrac{1}{k}a).$$

Равенките на правите AD и BC се

$$AD: \quad y=-\tfrac{1}{2k}(x-a) \qquad \text{и} \qquad BC: \quad y=\tfrac{k}{2}(x+a). \qquad (1)$$

Координатите на точката $AD\cap BC$ се добиваат со решавање на системот (1), што значи меѓусебна зависност на координатите на пресечната точка се добиваат со елиминација на параметарот k од системот (1).

Од равенката на BC се добива $k=\frac{2y}{x+a}$, па со замена на равенката на AD, се добива

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(\frac{a}{2})^2}=1.$$

Значи, бараното геометриско место на точки е елипса чија што голема оска е AB, а малата оска е половина од големата. Од оваа елипса треба да се исклучат точките A и B, бидејќи ако пресекот на правите AD и BC лежат на правата AB, тогаш и точките D и C лежат на правата AB, па тогаш аголот COD не може да е прав.

8. Дадена е елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, каде $a>b>0$. Што претставува геометриското место на точки кои се средини на сите тетиви на елипсата кои минуваат низ десниот форкус $F_2(e,0)$?

Решение. Равенката на произволна права низ десниот фокус е:

$$y=k(x-e). \qquad (1)$$

Со замена во равенката на елипсата, добиваме:

$$(b^2+a^2k^2)x^2-2a^2k^2ex+a^2k^2e^2-a^2b^2=0. \qquad (2)$$

Ако со x_1 и x_2 ги означиме решенијата на квадратната равенка (2), кои се всушност апсцисите на крајните точки на тетивата определена со правата (1), апсцисата на средната точка на соодветната тетива, според Виетовите формули, е:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{a^2k^2e}{b^2+a^2k^2} \tag{3}$$

Соодветната ординате е:

$$y = k(x-e) = -\frac{b^2ke}{b^2+a^2k^2}\ . \tag{4}$$

Од (3) и (4) следува:

$$\frac{x}{y} = -\frac{a^2k}{b^2}\ , \tag{5}$$

па со елиминација на k од (1) и (5) ја добиваме равенката на бараното геометриско место на точки:

$$b^2(x-\tfrac{e}{2})^2 + a^2y^2 = (\tfrac{eb}{2})^2,$$

т.е.

$$\frac{(x-\frac{e}{2})^2}{(\frac{e}{2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{eb}{2a})^2} = 1\ .$$

Значи, бараното геометриско место на точки е елипса.

9. Ако темињата на еден триаголник припаѓаат на хиперболата $xy = 1$, тогаш неговиот ортоцентар припаѓа на таа хипербола. Докажете!

Решение. Нека $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ се темиња на триаголникот. Равенката на висината спуштена од темето A е:

$$y - y_1 = -\frac{x_3-x_2}{y_3-y_2}(x - x_1)\ .$$

Ако замениме $y_1 = \frac{1}{x_1}$, $y_2 = \frac{1}{x_2}$, $y_3 = \frac{1}{x_3}$ добиваме

$$y - \frac{1}{x_1} = x_2x_3(x - x_1) \tag{1}$$

Равенката на висината спуштена од темето B е: $y - y_2 = -\frac{x_3-x_1}{y_3-y_1}(x - x_2)$. Со замена $y_1 = \frac{1}{x_1}$, $y_2 = \frac{1}{x_2}$, $y_3 = \frac{1}{x_3}$ добиваме:

$$y - \frac{1}{x_2} = x_3x_1(x - x_2)\ . \tag{2}$$

Со решавање на системот равенки (1) и (2) по непознати x и y добиваме $x = -\frac{1}{x_1x_2x_3}$, $y = -x_1x_2x_3$. Значи, $x = -\frac{1}{x_1x_2x_3}$, $y = -x_1x_2x_3$ се координатите на ортоцентарот. За нив важи $xy = 1$, од каде следува дека ортоцентарот припаѓа на хиперболата.

10. Нека точките $A_i(x_i, y_i)$, $i = 1,2,3,4$ се различни меѓу себе и припаѓаат на хиперболата $xy = 1$. Ако овие четири точки припаѓаат на една кружница, докажи дека $x_1x_2x_3x_4 = 1$.

Решение. Нека точките $A_i(x_i, y_i)$, $i = 1,2,3,4$ припаѓаат на кружницата

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0\ .$$

Тогаш $(x(x_i, y_i))$, $i = 1,2,3,4$ се решенија на системот

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

Ако во втората равенка од системот ставиме $y = \frac{1}{x}$, добиваме

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + Ax + \frac{B}{x} + C = 0$$

односно,

$$x^4 + Ax^3 + Cx^2 + Bx + 1 = 0 \qquad (1)$$

Бидејќи x_1, x_2, x_3 и x_4 се решенија на равенката (1),следува дека

$$x^4 + Ax^3 + Cx^2 + Bx + 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

Со изедначување на слободните членови добиваме $x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$.

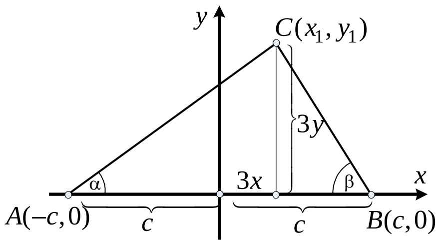
11. Точките $A(-c,0)$ и $B(c,0)$ се темиња на $\triangle ABC$. Аглите $\measuredangle A = \alpha$ и $\measuredangle B = \beta$ го исполнуваат равенството $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = -k^2$. Најди го геометриското место на тежиштата на $\triangle ABC$.

Решение. Ако $T(x, y)$ е тежиште на триаголникот ABC, каде $C(x_1, y_1)$, тогаш

$$x = \frac{-c+c+x_1}{3} = \frac{x_1}{3} \quad \text{т.е.} \quad x_1 = 3x$$

и

$$y = \frac{0+0+y_1}{3} = \frac{y_1}{3} \text{ т.е. } y_1 = 3y.$$



Значи, $C(3x, 3y)$.

Проекцијата на точката C врз $x-$оската ќе ја означиме со $C'(3x, 0)$.

Ако точката C припаѓа на првиот или третиот квадрант, од правоаголниот триаголник $BC'C$ имаме $\operatorname{tg}\beta = \frac{3y}{c-3x}$, а од правоаголниот триаголник $AC'C$ имаме $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3y}{c+3x}$.

Според тоа, од равенството $tg\alpha \cdot tg\beta = -k^2$ добиваме

$$\frac{3y}{c+3x} \cdot \frac{3y}{c-3x} = -k^2 \text{ т.е. } \frac{x^2}{(\frac{c}{3})^2} - \frac{y^2}{(\frac{ck}{3})^2} = 1.$$

Аналогно се разгледува и случајот кога точката C припаѓа на втор или четврт квадрант.

12. Нека AB е дадена отсечка со должина $2a$ и средина O. Точките C и D се движат по нормалите на AB повлечени во точките A и B така што аголот COD е прав. Одреди го геометриското место на пресечните точки на правите AD и BC.

Решение. Да воведеме координатен систем со центар во O и $x-$оска правата AB. Тогаш $A(-a,0)$ и $B(a,0)$. Нека $C(-a,r)$ и $D(a,s)$. Тогаш правата AD има равенка $y = \frac{s}{2a}(x+a)$, а правата BC има равенка $y = -\frac{r}{2a}(x-a)$. Оттука

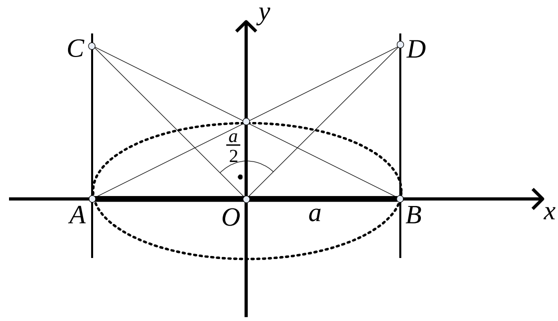
$y^2=-\frac{rs}{4a^2}(x^2-a^2)$ (1)

Правите CO и DO имаат равенки $y=-\frac{r}{a}x$ и $y=\frac{s}{a}x$, соодветно. Уште тие се нормални, па $rs=a^2$. Заменувајќи $rs=a^2$ во (1) добиваме

$$y^2=-\frac{1}{4}(x^2-a^2),$$

па бараното геометриско место на точки е елипсата

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(\frac{a}{2})^2}=1.$$

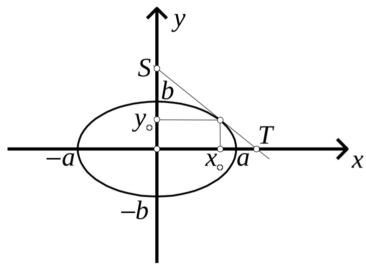


13. Докажи дека, растојанието меѓу пресечните точки на тангентата со координатните оски, повлечена во произволна нејзина точка што не е пресечна со координатните оски, не е помало од збирот на нејзините полуоски.

Решение. За елипсата $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, равенката на тангентата во нејзината точка $M(x_0,y_0)$ е

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

Пресечни точки на тангентата со координатните оски се $T(\frac{a^2}{x_0},0)$ и $S(0,\frac{b^2}{y_0})$. Растојанието меѓу нив е еднакво на



$$d=\sqrt{(\frac{a^2}{x_0}-0)^2+(0-\frac{b^2}{y_0})^2}=\sqrt{\frac{a^4}{x_0^2}+\frac{b^4}{y_0^2}}.$$

Бидејќи $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$, имаме

$$d^2=d^2\cdot 1=(\frac{a^4}{x_0^2}+\frac{b^4}{y_0^2})(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2})=a^2+b^2+ab(\frac{a^3y_0^2}{b^3x_0^2}+\frac{b^3x_0^2}{a^3y_0^2}).$$

Но, $\frac{a^3y_0^2}{b^3x_0^2}+\frac{b^3x_0^2}{a^3y_0^2}\geq 2$. Според тоа,

$$d^2\geq a^2+b^2+2ab=(a+b)^2,$$

односно $d\geq a+b$.

14. Да се определи геометриското место на центрите на кружинците што минуваат низ точката $A(3,0)$ и ја допираат кружницата $x^2+y^2=25$.

Решение. Нека точката $M(p,q)$ припаѓа на бараното геометриско место на точки од задачата. Тогаш постои кружница со центар во M

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \qquad (1)$$

која минува низ точката A и ја допира дадената кружница.

Бидејќи кружницата (1) минува низ точката A добиваме

$$(3-p)^2+(0-q)^2=r^2,$$

т.е.

$$r^2-p^2-q^2=9-6p\,. \qquad (2)$$

Бидејќи кружницата (1) ја допира дадената кружница, системот

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x^2+y^2-2(px+qy)=r^2-p^2-q^2 \end{cases}$$

кој со оглед на (2) се запишува во облик

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x^2+y^2-2(px+qy)=9-6p \end{cases} \qquad (3)$$

има единствено решение. Ако од првата равенка на системот (3) ја одземеме втората равенка се добива $qy=8+3p-px$.

Единствената точка на бараното геометриско место на точки, за која $q=0$ е точката $M_\circ(-1,0)$. Ќе го разгледаме бараното место точки без ова точка, т.е. ќе претпоставиме дека $q\neq 0$. Тогаш

$$y=\tfrac{8+3p-px}{q}\,.$$

Ако ова вредност ја замениме во првата равенка од системот (3) добиваме квадратна равенка по x

$$x^2-\tfrac{2p(8+3p)}{p^2+q^2}x+\tfrac{(8+3p)^2-25q^2}{p^2+q^2}=0\,. \qquad (4)$$

Бидејќи системот (3) има единствено решение, и равенката (4) има единствено решение, односно мора дискриминантата на квадратната равенка да биде еднаква на нула, т.е.

$$4\tfrac{p^2(8+3p)^2}{(p^2+q^2)^2}-4\tfrac{(8+3p)^2-25q^2}{p^2+q^2}=0\,.$$

Ова равенство се трансформира во $16p^2+25q^2-48p-64=0$ или

$$\tfrac{(p-\frac{3}{2})^2}{(\frac{5}{2})^2}+\tfrac{q^2}{4}=1\,.$$

Исто така точката $M_\circ(-1,0)$ ја задоволува ова равенка. Значи бараното геометриско место на точки е елипса.

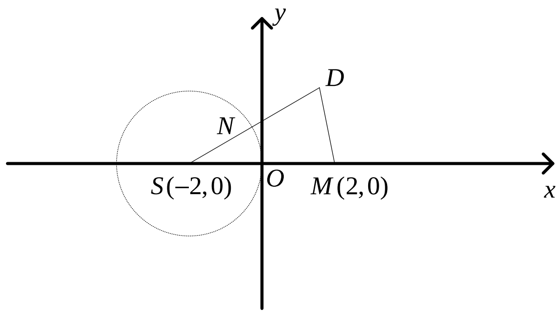
15. Да се најде геометриското место на на точките $P(u,v)$ кои се еднакво оддалечени од кривата

$x^2+4x+y^2=0$

и од точката $M(2,0)$.

Решение. Кривата

$$x^2+4x+y^2=0$$



е кружница со центар $S(-2,0)$ и радиус 2 (види цртеж). Ако $N(x,y)$ е произволна точка од кружницата, тогаш според условот на задачата, имаме $\overline{NP}=\overline{MP}$,

$$\overline{SP}=\overline{SN}+\overline{NP}=2+\overline{MP}\ .$$

Бидејќи

$$\overline{SP}^2=(u+2)^2+v^2\ ,\ \overline{MP}=(u-2)^2+v^2\ ,$$

заменувајќи во второто равенство на (1), добиваме

$$\sqrt{(u+2)^2+v^2}=2+\sqrt{(u-2)^2+v^2}\ ,$$

т.е.

$$u^2-\frac{v^2}{3}=1\,.$$

Следствено, бараното геометриско место на точки е хипербола.

IV НЕРАВЕНСТВА

1. ЕЛЕМЕНТАРНИ НЕРАВЕНСТВА

1. Реалните броеви a, b и c го исполнуваат неравенството

$$|\tfrac{a+b}{2}|+|\tfrac{a-b}{2}|<c\,.$$

Докажи дека $|a|<c$ и $|b|<c$.

Решение. Од особините на апсолутни вредности, имаме

$$|a|=|2\tfrac{a}{2}|=|\tfrac{a}{2}+\tfrac{a}{2}|=|(\tfrac{a}{2}+\tfrac{b}{2})+(\tfrac{a}{2}-\tfrac{b}{2})|\le|\tfrac{a+b}{2}|+|\tfrac{a-b}{2}|<c\,.$$

Значи, $|a|<c$. Потполно аналогно се добива $|b|<c$.

2. За реалните броеви a,b,c и d важи равенството $a^2+b^2=c^2+d^2$ и неравенствата $ab+cd>0$, $ac+bd>0$. Докажи дека $ad+bc>0$.

Решение. Заради $a^2+b^2=c^2+d^2>0$ и $ab+cd>0$, $ac+bd>0$ добиваме:

$$\begin{aligned}(ad+bc)(ac+bd) &= a^2dc+c^2ab+d^2ab+b^2dc\\ &=(a^2+b^2)dc+(c^2+d^2)ab\\ &=(a^2+b^2)dc+(a^2+b^2)ab\\ &=(a^2+b^2)(dc+ab)>0\end{aligned}$$

т.е. $(ad+bc)(ac+bd)>0$. Бидејќи $ac+bd>0$, па според тоа $ad+bc>0$, што и требаше да се докаже.

3. Да се докаже неравенството

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}\le|a_1|+|a_2|+|a_3|+...+|a_n|$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\le(|a_1|+|a_2|+|a_3|+...+|a_n|)^2\,. \qquad (1)$$

Imame>

$$\begin{aligned}(|a_1|+|a_2|+|a_3|+...+|a_n|)^2 &=|a_1|^2+|a_2|^2+...+|a_n|^2+\sum_{1\le i<j\le n}2|a_i|\cdot|a_j|\ge\\ &\ge|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2+...+|a_n|^2\\ &=a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\end{aligned}$$

па со тоа неравенството (1) е докажано.

4. Нека a и b се позитивни реални броеви за кои што важи

$$a^{1997}+b^{1997}=a^{1995}+b^{1995}\,.$$

Докажи дека $a^2+b^2\le2$.

Решение. Ако еден од броевите a или b е еднаков на 1, тогаш од (1) следува дека и другиот е еднаков на 1, па затоа $a^2+b^2\le2$.

Нека претпоставиме дека $a \geq b$ и $b \neq 1$. Ќе докажеме дека од

$$a^{n+2}+b^{n+2}=a^n+b^n$$

следува $a^2+b^2 \leq 2$.

Ќе разгледаме два случаи:

1. Ако $1-b^2>0$, тогаш

$$a^{n+2}-a^n=b^n-b^{n+2}$$
$$a^n(a^2-1)=b^n(1-b^2)$$
$$\frac{a^2-1}{1-b^2}=\frac{b^n}{a^n}=(\frac{b}{a})^n \leq 1$$

па затоа $a^2-1 \leq 1-b^2$, т.е. $a^2+b^2 \leq 2$.

2. Ако $1-b^2<0$, тогаш $1<b^2$ и $1<b^2<a^2$ па затоа $b^n<b^{n+2}$ и $a^n<a^{n+2}$, т.е. $a^{n+2}+b^{n+2}>a^n+b^n$, што е противречност.

5. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ се реални броеви и $x_1+x_2+...+x_n>n$. Докажи дека

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2>x_1+x_2+...+x_n$$

Решение. Нека $x_i=1+y_i$ за $i=1,2,...,n$. Од тука се добива

$$x_1+x_2+...+x_n=n+y_1+y_2+...+y_n.$$

Од условот $x_1+x_2+...+x_n>0$ добиваме $y_1+y_2+...+y_n>0$.

Од друга страна, за квадратите на x_i важи

$$x_i^2=(1+y_i)^2=1+2y_i+y_i^2,\ i=1,2,3,...,n$$

па значи

$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2+...+x_n^2 &= n+2(y_1+y_2+...+y_n)+y_1^2+y_2^2+...+y_n^2 \\ &\geq n+2(y_1+y_2+...+y_n) \\ &\geq n+y_1+y_2+...+y_n \\ &> x_1+x_2+...+x_n. \end{aligned}$$

6. Докажи дека $3(1+a^2+a^4)>(1+a+a^2)^2$ за секој реален број $a \neq 1$.

Решение. Даденото неравенство ќе го трансформираме во еквивалентно неравенство, од кое ќе се види дека почетното неравенство е точно. Даденото неравенство е еквивалентно со

$$3+3a^2+3a^4>1+2a+3a^2+2a^3+a^4$$
$$2a^4-2a^3-2a+2>0$$
$$a^4-a^3-(a-1)>0$$
$$(a-1)^2(a^2+a+1)>0$$

Бидејќи $a^2+a+1>0$ за секој реален број a, почетното неравенство е точно.

7. Ако $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$ и $ac>0$, тогаш $\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b} \geq 4$. Докажи!

Решение. Имаме, $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$, па затоа $b=\frac{2ac}{a+c}$. Според тоа

$$\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}=\frac{a+\frac{2ac}{a+c}}{2a-\frac{2ac}{a+c}}+\frac{c+\frac{2ac}{a+c}}{2c-\frac{2ac}{a+c}}=\frac{a^2+3ac}{2a^2}+\frac{c^2+3ac}{2c^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{c}{a}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{a}{c}=1+\frac{3}{2}(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})\geq 1+\frac{3}{2}\cdot 2=4.$$

Притоа го користевме неравенството $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geq 2$, кое важи за $ac>0$. Знакот за еднаквост важи за $a=c$.

8. Одреди го најголемиот природен број помал од вредноста на изразот

$$\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots\sqrt{6}}}}_{2001\ \text{корени}}+\underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\cdots\sqrt[3]{6}}}}_{2001\ \text{корени}},$$

ако се знае дека $\sqrt[3]{6}>1,8$.

Решение. Бидејќи $\sqrt{6}>2,4$ и $\sqrt[3]{6}>1,8$ добиваме

$$4,2<\sqrt{6}+\sqrt[3]{6}<\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6}}}+\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}\ .$$

Од друга страна е:

$$\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}<\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6+3}}}=3 \text{ и}$$

$$\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6}}}<\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6+2}}}=2$$

па затоа

$$\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+...+\sqrt[3]{6}}}<5.$$

Значи бараниот број е 4.

9. Ако барем еден од броевите a,b и c е различен од нула, тогаш барем еден од броевите $(a+b+c)^2-8ab$, $(a+b+c)^2-8bc$ и $(a+b+c)^2-8ca$ е позитивен. Докажи!

Решение. Го претпоставуваме спротивното, т.е. дека

$$(a+b+c)^2-8ab\leq 0,\quad (a+b+c)^2-8bc\leq 0,\quad (a+b+c)^2-8ca\leq 0.$$

Ако ги собереме овие три неравенства се добива

$$a^2+b^2+c^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\leq 0,$$

што е во спротивност со условот $a^2+b^2+c^2>0$. Затоа, барем еден од дадените три броја е позитивен.

10. Докажи дека, ако $a>0,b>0,c>0$, тогаш

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Притоа знак за равенство ќе важи ако и само ако $a=b=c$.

Решение. *Прв начин.* Од

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}\geq\frac{2a(a+b)(a+c)+2b(b+c)(b+a)+2c(c+a)(c+b)-3(a+b)(b+c)(c+a)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{(a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(a+c)(a-c)^2}{2(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 0$$

добиваме дека неравенството важи за секои $a>0,b>0,c>0$.

За да го докажеме вториот дел од тврдењето ќе користиме дека, ако $\alpha>0$, $\beta>0,\ \gamma>0$, тогаш $\alpha A^2+\beta B^2+\gamma C^2=0$ ако и само ако $A=B=C=0$.

Бидејќи $\frac{1}{2(b+c)(c+a)}>0$, $\frac{1}{2(a+b)(c+a)}>0$, $\frac{1}{2(a+b)(b+c)}>0$ имаме

$$\frac{(a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(a+c)(a-c)^2}{2(a+b)(b+c)(c+a)}=0,$$

ако и само ако $a-b=b-c=c-a=0$, т.е. ако и само ако $a=b=c$.

Втор начин. Нека ставиме

$$x=b+c,\ y=c+a,\ z=a+b. \tag{2}$$

Од $a>0,b>0,c>0$ следува $x>0,y>0,z>0$. Од (2) имаме

$$a=\frac{y+z-x}{2},\ b=\frac{z+x-y}{2},\ c=\frac{x+y-z}{2}.$$

Со овие трансформации неравенството (1) е еквивалентно на неравенството $\frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\geq\frac{3}{2}$, т.е. на неравенството

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\geq 6. \tag{3}$$

Од $x>0,\ y>0,\ z>0$ следува

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2,\ \frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 2,\ \frac{z}{x}+\frac{x}{z}\geq 2. \tag{4}$$

Ако ги собереме неравенствата (4) го добиваме неравенството (4). Притоа во (4) важи знак за равенство ако и само ако знак за равенство важи во секое од равенствата (3), т.е. ако и само ако $x=y=z$ односно ако и само ако $a=b=c$.

11. Нека a и b се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$ab+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 1+a+b.$$

Решение. Бидејќи a и b се позитивни реални броеви, следните неравенства се еквивалентни

$$ab+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 1+a+b,$$

$$a^2b^2+a^2+b^2\geq ab(1+a+b),$$

$$2a^2b^2+2a^2+2b^2-2ab-2a^2b-2ab^2\geq 0,$$

$$a^2-2ab+b^2+a^2b^2-2a^2b+a^2+a^2b^2-2b^2a+b^2\geq 0,$$

$$(a-b)^2+a^2(b^2-2b+1)+b^2(a^2-2a+1)\geq 0,$$

$$(a-b)^2+a^2(b-1)^2+b^2(a-1)^2\geq 0.$$

Последното равенство е точно бидејќи секој собирок е ненегативен.

Равенство важи ако и само ако секој собирок во последното равенство е нула. Според тоа $a=b=1$.

12. *а*) Ако x, y, z се три реални броеви, сите различни од 1, такви што $xyz=1$, докажи дека:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

б) Докажи дека равенство важи за бесконечно многу тројки рационални броеви x, y, z.

Решение. Нека $a=\frac{x}{1-x}$, $b=\frac{y}{1-y}$, $c=\frac{z}{1-z}$. Имаме:

$$abc=\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}\cdot\frac{z}{1-z}=\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}=(a+1)(b+1)(c+1)$$

што е еквивалентно со:

$$ab+ac+bc+a+b+c+1=0$$

Одовде:

$$a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)+2(a+b+c)+2$$

па:

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c+1)^2+1\geq 1$$

од каде следува тврдењето под *а*). Равенство важи ако и само ако

$$a+b+c+1=0$$

односно, ако и само ако

$$ab+ac+bc=0$$

б) Имаме:

$$\frac{xy}{(1-x)(1-y)}+\frac{xz}{(1-x)(1-z)}+\frac{yz}{(1-y)(1-z)}=0$$

од каде добиваме $xy+xz+yz=3$. Бидејќи $x=\frac{1}{yz}$, ова се трансформира до:

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+yz=3 \text{ и } z^2y^2-(3z-1)y+z=0$$

Оваа равенка може да ја набљудуваме како квадратна равенка по y. Дискриминантата на равенката е:

$$D=(3z-1)^2-4z^3=(z-1)^2(1-4z),$$

Па ако го избереме z таков што $z=\frac{1-m^2}{4}$, за некој ненулти рационален број m, тогаш $\sqrt{D}$ е рационален број, па и решението y е рационален број. Бидејќи $x=\frac{1}{yz}$, и x е рационален.

13. Нека a,b,c се ненегативни реални броеви такви што $a+b+c=3$. Докажи, дека

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{3}{2}.$$

Решение. Имаме

$$a+b+c-\frac{a}{b^2+1}-\frac{b}{c^2+1}-\frac{c}{a^2+1}=\frac{b}{b^2+1}ab+\frac{c}{c^2+1}bc+\frac{a}{a^2+1}ca$$

$$\leq\frac{ab+bc+ca}{2}\leq\frac{(a+b+c)^2}{6}$$

и останува да искористиме дека $a+b+c=3$.

14. Нека a и b се позитивни реални броеви такви што $a+b=1$. Докажи дека

$$a^a b^b + a^b b^a \le 1.$$

Решение. Имаме

$$1 = a+b = a^{a+b} + b^{a+b} = a^a a^b + b^a b^b .$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} 1 - a^a b^b - a^b b^a &= a^a a^b + b^a b^b - a^a b^b - a^b b^a \\ &= a^a (a^b - b^b) - b^a (a^b - b^b) \qquad (1) \\ &= (a^a - b^a)(a^b - b^b). \end{aligned}$$

Сега, ако $a \le b$, тогаш $a^a \le b^a$ и $a^b \le b^b$, а ако $a \ge b$, тогаш $a^a \ge b^a$ и $a^b \ge b^b$. Затоа производот на десната страна во (1) е ненегативен, што значи дека $a^a b^b + a^b b^a \le 1$.

15. Докажи, дека за секој природен број $n>1$ се точни неравенствата

$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \dots + \frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} .$$

Решение. Имаме $n^2 < n^2+1 < n^2+2 < \dots < n^2+n$, па затоа важи

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \dots + \frac{n}{n^2+1} &> \frac{1}{n^2+n} + \frac{2}{n^2+n} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \\ &= \frac{1}{n^2+n}(1+2+\dots+n) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Слично, имаме

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \dots + \frac{n}{n^2+1} &< \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2}(1+2+\dots+n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

16. Нека x, y, z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{y^2+z^2}{x} + \frac{z^2+x^2}{y} + \frac{x^2+y^2}{z} \ge 2(x+y+z) .$$

Решение. Даденото неравенство ќе го запишеме во облик

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{y} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{z} \ge 2(x+y+z) . \qquad (1)$$

Имаме $x^2 + y^2 - xy \ge xy$, па затоа

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2+y^2-xy) \ge xy(x+y) ,$$

односно

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \ge x+y .$$

Аналогно добиваме $\frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{y} \ge y+z$ и $\frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{z} \ge x+z$. Ако ги собереме последните три неравенства, го добиваме неравенството (1).

17. Нека x, y, z се реални броеви такви што $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 1$. Докажи дека

$$(1+x)(1+y)(1+z) \leq 4 + 4xyz .$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Од условот на задачата и познатите неравенства

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \text{ и } a^2 + 1 \geq 2a ,$$

добиваме

$$\begin{aligned} 1 + 2xyz &= x^2 + y^2 + z^2 && \Leftrightarrow \\ 3 + 3xyz &= \tfrac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \tfrac{3}{2} && \Rightarrow \\ 3 + 3xyz &= x^2 + y^2 + z^2 + \tfrac{1}{2}[(x^2+1) + (y^2+1) + (z^2+1)] \\ &\geq xy + yz + zx + x + y + z. \end{aligned}$$

Во последното неравенство на двете страни додаваме $1 + xyz$ и добиваме

$$\begin{aligned} 4 + 4xyz &\geq 1 + xy + yz + zx + x + y + z + xyz \\ &= (1+x)(1+y)(1+z), \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z = 1$.

18. Нека x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 се ненегативни реални броеви чијшто збир е 1. Да се определи максималната можна вредност на изразот

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 .$$

Решение. Поради ненегативноста на броевите x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, важи неравенството

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 \leq (x_2 + x_4)(x_1 + x_3 + x_5) \qquad (1)$$

Имајќи го предвид неравенството

$$ab \leq \tfrac{1}{4}(a+b)^2$$

за $a = x_2 + x_4$ и $b = x_1 + x_3 + x_5$ добиваме

$$(x_2 + x_4)(x_1 + x_3 + x_5) \leq \tfrac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = \tfrac{1}{4} . \qquad (2)$$

Од (1) и (2) е јасно дека вредноста на дадениот израз не надминува $\frac{1}{4}$. Дадениот израз за $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ и $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ е еднаков на $\frac{1}{4}$, па значи тоа е неговата максимална вредност(ова вредност се достигнува и за некои други вредности на променливите).

19. Нека a, b, c, A, B, C се ненегативни реални броеви такви што

$$a + A = b + B = c + C = k .$$

Докажи дека $aB + bC + cA \leq k^2$.

Решение. *Прв начин.* Од

$$\begin{aligned} k^3 &= (a+A)(b+B)(c+C) = abc + ABC + cA(b+B) + bC(a+A) + aB(c+C) \\ &= abc + ABC + k(aB + bC + cA) \end{aligned}$$

и од $aB+bC+cA\le k^2$ следува дека

$$k(aB+bC+cA)\le k^3 \text{, т.е. } aB+bC+cA\le k^2 .$$

Втор начин. Не се губи од општоста ако претпоставиме дека $a\le b\le c$. Тогаш

$$\begin{aligned} aB+bC+cAa &= (k-b)+b(k-c)+c(k-a)=k(a+b+c)-ab-ba-ca \\ &= b(k-a-c)+ka+kc-ac \end{aligned}$$

Значи неравенството $aB+bC+cA\le k^2$ е еквивалентно со

$$b(k-a-c)\le k^2-ka-kc+ac=(k-a)(k-c) \qquad (1)$$

Ако $k\le a+c$, тогаш за левата страна на (1) добиваме $b(k-a-c)\le 0$. Десната страна од (1) е ненегативна, па (1) важи.

Ако $k>a+c$, тогаш $k-a>c\ge b$ и $k-c\ge k-a-c$ од каде што следува (1).

20. Нека a и b се природни броеви и $c=\frac{a^{a+1}+b^{b+1}}{a^a+b^b}$. Да се докаже дека

$$c^a+c^b\ge a^a+b^b .$$

Решение. Јасно е дека ако $a=b$, тогаш неравенството преминува во равенство па според тоа е точно. Нека претпоставиме дека $a\ne b$.

Ако $x,y\in\mathbb{N}$ и $x\ne y$, тогаш $\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}\cdot y+...+x\cdot y^{n-2}+y^{n-1}$. При тоа:

а) Ако $x<y$, тогаш $\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}\cdot y+...+x\cdot y^{n-2}+y^{n-1}<ny^{n-1}$, за било кој $n\in\mathbb{N},\ n\ge 1$.

б) Ако $x>y$, тогаш $\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}\cdot y+...+x\cdot y^{n-2}+y^{n-1}>ny^{n-1}$. Ако избереме $y=n$, тогаш добиваме за $x<n$, $\frac{x^n-n^n}{x-n}<n^n$, и за $x>n$, $\frac{x^n-n^n}{x-n}>n^n$. Според тоа $x^n-n^n>(x-n)n^n$, за $x,n\in\mathbb{N}$, $x\ne n$.

Ако избереме $x=c,n=a$ добиваме $c^a-a^a>(c-a)a^a$ и аналогно за $x=c,$ $n=b$ добиваме $c^b-b^b>(c-b)b^b$. Конечно

$$c^a+c^b-a^a-b^b\ge(c-a)a^a+(c-b)b^b=c(a^a+b^b)-(a^{a+1}+b^{b+1})=0 ,$$

односно $c^a+c^b\ge a^a+b^b$.

21. Позитивните броеви x,y,z се такви што апсолутната вредност на разликата на било кои два од нив е помала од 2.

Докажи дека

$$x+y+z<\sqrt{xy+1}+\sqrt{yz+1}+\sqrt{zx+1} .$$

Решение. Од условот на задачата имаме $|x-y|<2$, $|y-z|<2$ и $|z-x|<2$ и според тоа

$$x^2-2xy+y^2<4,\quad y^2-2yz+z^2<4,\quad z^2-2zx+x^2<4$$

односно

$$(x+y)^2 < 4+4xy, \quad (y+z)^2 < 4+4yz, \quad (z+x)^2 < 4+4zx$$

Од неравенствата $x+y < 2\sqrt{xy+1}$, $y+z < 2\sqrt{yz+1}$ и $z+x < 2\sqrt{zx+1}$ ја добиваме точноста на бараното равенство.

22. Нека $m,n \in \mathbb{N}$ се такви што $m \geq 2$ и $n \geq 2$. Докажи дека

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} > 1.$$

Решение. Од условите $m \geq 2$ и $n \geq 2$, имаме $\sqrt[n]{m} = 1+u$, $\sqrt[m]{n} = 1+v$, при што $u,v > 0$. Сега

$$\begin{matrix} m = (1+u)^n \geq 1+nu \\ n = (1+v)^m \geq 1+mv \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} m+n \geq 1+n(u+1) \\ m+n \geq 1+m(v+1) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 1+u \leq \frac{m+n-1}{n} \\ 1+v \leq \frac{m+n-1}{m} \end{matrix}$$

Од последните неравенства, имаме

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} = \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} \geq \frac{m}{m+n-1} + \frac{n}{m+n-1} = \frac{m+n}{m+n-1} > 1.$$

23. Докажи дека за позитивни реални броеви a,b,c,d,e,f важи неарвенството

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d} + \frac{ef}{e+f} \leq \frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}.$$

Решение. Нека се x,y,z,u позитивни броеви. Со елементарни трансформации лесно може да го докажеме неравенството

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{zu}{z+u} \leq \frac{(x+z)(y+u)}{x+y+z+u} \tag{1}$$

Ако неравенството (1) двапати последователно го примениме, добиваме

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d} + \frac{ef}{e+f} \leq \frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d} + \frac{ef}{e+f} \leq \frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}.$$

24. Нека a,b,c се реални броеви такви што $a^2+b^2+c^2 = 1$. Докажи дека

$$-\frac{1}{2} \leq ab+bc+ca \leq 1.$$

Решение. За било кои реални броеви a,b,c е точна низата неравенства

$$(a+b+c)^2 \geq 0$$
$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geq 0$$
$$1+2(ab+bc+ca) \geq 0$$
$$ab+bc+ca \geq -\frac{1}{2}.$$

Од друга страна, за било кои реални броеви a,b,c е исполнета низата неравенства

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$$
$$2a^2+2b^2+2c^2-2(ab+bc+ca) \geq 0$$
$$2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca) \geq 0$$
$$2 \geq 2(ab+bc+ca)$$
$$ab+bc+ca \leq 1.$$

25. За секој реален број a, $3(1+a^2+a^4)\geq(1+a+a^2)^2$. Докажи!

Решение. За разликата на двете страни од даденото неравенство имаме

$$3(1+a^2+a^4)-(1+a+a^2)^2=3+3a^2+3a^4-1-a^2-a^4-2a-2a^2-2a^3$$
$$=(a^4-2a^3+a^2)+(a^4-2a^2+1)+(a^2-2a+1)$$
$$=a^2(a-1)^2+(a^2-1)^2+(a-1)^2\geq 0$$

Очигледно е дека равенство е исполнето ако и само ако $a=1$.

26. Нека a,b,c се ненегативни реални броеви такви што

$$a+b\leq c+1,\ b+c\leq a+1,\ c+a\leq b+1.$$

Докажи дека

$$a^2+b^2+c^2\leq 2abc+1.$$

Решение. Ако попарно ги собереме дадените неравенства, добиваме

$$a+2b+c\leq a+c+2$$
$$b+2c+a\leq b+a+2$$
$$c+2a+b\leq b+c+2$$

од каде добиваме $2b\leq 2$, $2a\leq 2$, $2c\leq 2$, односно $a\leq 1$, $b\leq 1$, $c\leq 1$. Ако избереме $\alpha=1-a$, $\beta=1-b$, $\gamma=1-c$, тогаш $0\leq\alpha,\beta,\gamma\leq 1$ и

$$\alpha+\beta=(1-a)+(1-b)=2-a-b\geq 2-1-c=1-c=\gamma$$
$$\beta+\gamma=(1-b)+(1-c)=2-b-c\geq 2-1-a=1-a=\alpha$$
$$\alpha+\gamma=(1-a)+(1-c)=2-a-c\geq 2-1-b=1-b=\beta.$$

Сега, неравенството кое што треба да се докаже се сведува на

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\leq 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2\alpha\beta\gamma.$$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\alpha\leq\gamma$ и $\beta\leq\gamma$. Бидејќи $\gamma\leq\alpha+\beta$ точно е неравенството $\gamma^2\leq\gamma(\alpha+\beta)$, и од тоа што $\alpha^2\leq\alpha\gamma$, $\beta^2\leq\beta\gamma$ имаме

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\leq 2(\beta\gamma+\alpha\gamma).$$

Според тоа, доволно е да се докаже дека

$$0\leq 2\alpha\beta-2\alpha\beta\gamma,$$

што е точно бидејќи $\gamma\leq 1$.

27. Нека $x_1,x_2,x_3,...,x_n,y_1,y_2,y_3,...,y_n$ се позитивни реални броеви такви што

а) $0<x_1y_1<x_2y_2<....<x_ny_n$

б) $x_1+x_2+...+x_k\geq y_1+y_2+...+y_k$, за секој $k\in\{1,2,3,...,n\}$.

Докажи дека

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}<\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}+...+\frac{1}{y_n}.$$

Решение. За секој $k\in\{1,2,3,...,n\}$ имаме

$$S_k=(x_1-y_1)+(x_2-y_2)+(x_3-y_3)+...+(x_n-y_n)\geq 0,$$

и ако $z_k=\frac{1}{x_ky_k}$, тогаш $z_k-z_{k+1}>0$, $k=1,2,3,...,n-1$. Но тогаш

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}-\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_3}-...-\frac{1}{y_n}=(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{y_1})+(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{y_2})+...+(\frac{1}{x_n}-\frac{1}{y_n})$$
$$=\frac{y_1-x_1}{x_1y_1}+\frac{y_2-x_2}{x_2y_2}+...+\frac{y_n-x_n}{x_ny_n}=-S_1z_1-(S_2-S_1)z_2-...-(S_n-S_{n-1})z_n$$
$$=-(z_1-z_2)S_1-(z_2-z_3)S_2-...-(z_{n-1}-z_n)S_{n-1}-z_nS_n<0$$
што требаше и да се докаже.

Равенство е исполнето ако и само ако $S_k=0$, $k=1,2,3,...,n$, од каде што следува дека $x_k=y_k$, $k=1,2,3,...,n$.

28. Нека $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}\subset\mathbb{N}$ е множество такво што ако $B,C\subseteq A$ и $B\neq C$, тогаш

$$\sum_{x\in B}x\neq\sum_{x\in C}x.$$

Докажи дека

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}<2.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека

$$0<a_1<a_2<...<a_n.$$

Нека k е произволен фиксен број од множеството $\{1,2,3,...,n\}$. Множеството $\{a_1,a_2,...,a_k\}$ има 2^k различни меѓу себе подмножества. Според тоа за $\{a_1,a_2,...,a_k\}$ постојат 2^k различни збирови меѓу кои е и 0. Значи, за него постојат 2^k-1 различни ненулти збирови, а бидејќи $a_1+a_2+...+a_k$ е најголем меѓу нив. Според тоа,

$$a_1+a_2+...+a_k\geq 2^k-1.$$

Сега ако избереме $x_1=a_1,x_2=a_2,...,x_n=a_n$, $y_1=1,y_2=2,y_3=2^2,...,y_n=2^{n-1}$ исполнети се двата услови а) и б) од претходната задача. Заради тоа

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n}<2.$$

29. За позитивните реални броеви a,b и c е исполнето неравенството

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq a+b+c.$$

Докажи дека $a+b+c\geq 3abc$.

Решение. За позитивните реални броеви a,b и c неравенството

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq a+b+c$$

е еквивалентно со неравенството

$$\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\geq abc.$$

Според тоа, доволно е да се докаже дека

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}. \qquad (1)$$

Последното неравенство е еквивалентно со

$$(a+b+c)^2\geq 3ab+3bc+3ca,$$

$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca\,,$$
$$a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+c^2 \ge 0\,,$$
$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0\,.$$

Бидејќи последното неравенство е точно за $a,b,c\in\mathbb{R}$, добиваме дека (1) е точно неравенство за позитивни реални броеви a,b и c. Со тоа точно е и почетното неравенство.

30. Докажи дека за произволни позитивни реални броеви a,b и c е исполнето неравенството

$$\tfrac{a^3}{bc}+\tfrac{b^3}{ca}+\tfrac{c^3}{ab} \ge a+b+c\,.$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенствата

$$a^4+b^4+c^4 \ge abc(a+b+c)\,. \qquad (1)$$

Ако на неравенството (1) двапати последователно го примениме неравенството

$$x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx$$

добиваме

$$a^4+b^4+c^4 \ge (a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2 = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = (ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$$
$$\ge (ab)(bc)+(bc)(ca)+(ca)(ab)=abc(a+b+c)$$

Значи, точно е неравенството (1), а со тоа и почетното неравенство.

31. Нека a и b се позитивни реални броеви и n е цел број. Докажи дека важи неравенството

$$(1+\tfrac{a}{b})^n+(1+\tfrac{b}{a})^n \ge 2^{n+1}\,.$$

Решение. За $n=0$ важи равенство. Да претпоставиме дека $n>0$. Тогаш

$$(1+\tfrac{a}{b})^n+(1+\tfrac{b}{a})^n \ge 2\sqrt{(1+\tfrac{a}{b})^n(1+\tfrac{b}{a})^n} = 2\sqrt{(2+\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{a})^n} \ge 2\sqrt{4^n}=2^{n+1}\,.$$

Нека $n<0$. Ставаме $m=-n>0$. Тогаш

$$(1+\tfrac{a}{b})^n+(1+\tfrac{b}{a})^n = (\tfrac{b}{a+b})^m+(\tfrac{a}{a+b})^m = \tfrac{1}{2^m}((\tfrac{2b}{a+b})^m+(\tfrac{2a}{a+b})^m)$$
$$=\tfrac{1}{2^m}((1+\tfrac{b-a}{a+b})^m+(1+\tfrac{a-b}{a+b})^m) \ge \tfrac{1}{2^m}\cdot 2 = 2^{1-m}=2^{n+1},$$

бидејќи $(1+\tfrac{b-a}{a+b})^m+(1+\tfrac{a-b}{a+b})^m \ge 2$. Последново неравенство следува од биномната формула.

32. Докажи дека за секој природен број $n>1$ важат неравенствата

$$\sqrt{n} < \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{7}{6}\cdot\ldots\cdot\tfrac{2n-1}{2n-2} < \sqrt{2n}\,.$$

Решение. Нека означиме $P_n=\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{7}{6}\cdot\ldots\cdot\tfrac{2n-1}{2n-2}$. Бидејќи за $k>1$ важи

$$\tfrac{2k-1}{2k-2} > \sqrt{\tfrac{k}{k-1}}$$

добиваме

$$P_n > \sqrt{\tfrac{2}{1}}\cdot\sqrt{\tfrac{3}{2}}\cdot\sqrt{\tfrac{4}{3}}\cdot\ldots\sqrt{\tfrac{n}{n-1}}=\sqrt{n}$$

т.е. левото неравенство важи.

Означуваме, $Q_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}$. Бидејќи за $k \in \mathbb{N}$ важи $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$ добиваме

$$Q_n < \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{P_n}\frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}\frac{1}{Q_n} < \frac{1}{2nQ_n}$$

што значи $Q_n < \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Конечно,

$$P_n = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n-2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot 2n = 2nQ_n < \sqrt{2n}$$

со што го докажавме и десното неравенство.

33. Нека $\{a_k, k = 1, 2, ..., n\}$ е низа од различни природни броеви. Докажи дека за секој $n \in N$ важи неравенството

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Решение. Ако низата $a_1, a_2, ..., a_n$ не е растечка, тогаш постои j, таков што $a_j > a_{j+1} (1 \leq j \leq n)$. Тогаш лесно се проверува дека важи неарвенството

$$\frac{a_j}{j^2} + \frac{a_{j+1}}{(j+1)^2} > \frac{a_{j+1}}{j^2} + \frac{a_j}{(j+1)^2}.$$

Тоа значи дека збирот $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}$ ќе биде поголем од соодветниот збир за низата $(b_1, b_2, ..., b_n, ...)$ за која $b_1 < b_2 < b_3 < ... < b_n$. Но, очигледно $b_k \geq k$, за $k = 1, 2, ..., n$ што значи

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

34. Докажи дека за секои природни броеви $n \geq 1$ и $m \geq 1$ точно е неравенството

$$\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \ldots + \frac{1}{(n+m)^3} < \frac{1}{2n(n+1)}.$$

Решение.

$$\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \ldots + \frac{1}{(n+m)^3} < \frac{1}{(n+1)^3-(n+1)} + \frac{1}{(n+2)^3-(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+m)^3-(n+m)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)n(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+1)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+m)(n+m+1)(n+m-1)}$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{n+2-n}{(n+1)n(n+2)} + \frac{n+3-(n+1)}{(n+2)(n+1)(n+3)} + \ldots + \frac{n+m+1-(n+m-1)}{(n+m)(n+m+1)(n+m-1)}]$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{(n+1)n} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+m)(n+m-1)} - \frac{1}{(n+m)(n+m+1)}]$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{(n+1)n} - \frac{1}{(n+m)(n+m+1)}] < \frac{1}{2n(n+1)}.$$

35. Ако n е природен број , тогаш $(n!)^2 \geq n^n$ ($n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$). Докажи!

Решение. За природниот број n, $(n!)^2$ можеме да го запишеме во облик

$$\begin{aligned}(n!)^2 &= (1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n)(1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n)\\ &= (1\cdot n)(2\cdot (n-1))(3\cdot (n-2))...((n-2)\cdot 3)((n-1)\cdot 2)(n\cdot 1)\end{aligned}.$$

Да забележиме дека

$$(k+1)(n-k) = k(n-k)+(n-k) \geq k\cdot 1+(n-k) = n .$$

Сега јасно е дека

$$(n!)^2 \geq \underbrace{n\cdot n\cdot n\cdot ...\cdot n}_{n-\text{пати}} = n^n .$$

36. Докажи дека $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2} < \frac{2}{3}$.

Решение. *Прв начин.* Очигледни се неравенствата

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2} < \frac{1}{3\cdot 2}, ..., \frac{1}{n^2} < \frac{1}{3\cdot 2^{n-2}} .$$

Ако ги собереме овие неравенства, добиваме

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2} < \frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 2}+....+\frac{1}{3\cdot 2^{n-2}} . \qquad (*)$$

Десната страна на (*) е збир на првите $n-1$ членови на геометриската прогресија со прв член $\frac{1}{2}$ и количник $\frac{1}{2}$. Значи,

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2} < \frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 2}+....+\frac{1}{3\cdot 2^{n-2}} = S_{n-1} = \frac{2}{3}(1-\frac{1}{2^{n-1}}) < \frac{2}{3} .$$

Втор начин. Имаме

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2} &< (\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25})+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+...+\frac{1}{n(n-1)}\\ &= \frac{1669}{3600}+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}) = \frac{1669}{3600}+\frac{1}{5}-\frac{1}{n}\\ &= \frac{2398}{3600}-\frac{1}{n} < \frac{2400}{3600} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

37. Докажи дека $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot ...\cdot\frac{99}{100} < \frac{1}{10}$.

Решение. Нека $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot ...\cdot\frac{99}{100}$ и $B = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot ...\cdot\frac{100}{101}$. Ќе покажеме дека $A < B$. Имено:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \frac{5}{6} < \frac{6}{7}, ..., \frac{99}{100} < \frac{100}{101} ,$$

бидејќи $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$, што е еквивалентно со $(n-1)(n+1) = n^2-1 < n^2$ за секој природен број n. Од друга страна

$$AB = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot ...\cdot\frac{99}{100}\cdot\frac{100}{101} = \frac{1}{101} ,$$

па според тоа $A^2 < AB = \frac{1}{101}$, од каде се добива неравенството $A < \frac{1}{\sqrt{101}} < \frac{1}{10}$.

38. Докажи дека за секој природен број n важи

$$(2n+1)^n \geq (2n)^n + (2n-1)^n .$$

Решение. Бидејќи

$$(1+\tfrac{1}{2n})^{2n}-(1-\tfrac{1}{2n})^{2n}-1=(1+n\cdot\tfrac{1}{2n}+\tbinom{n}{2}\tfrac{1}{(2n)^2}+\tbinom{n}{3}\tfrac{1}{(2n)^3}+\ldots)-$$
$$-(1-n\cdot\tfrac{1}{2n}+\tbinom{n}{2}\tfrac{1}{(2n)^2}-\tbinom{n}{3}\tfrac{1}{(2n)^3}+\ldots)-1$$
$$=2(\tbinom{n}{3}\tfrac{1}{(2n)^3}+\tbinom{n}{5}\tfrac{1}{(2n)^5}+\ldots)>0$$

ако помножиме со $(2n)^n$ се добива бараното неравенство. Равенство важи акко $n=1$ или $n=2$.

39. Да се покаже дека за секој природен број k важи:

$$\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{8}{9}\cdot\ldots\cdot\tfrac{2k}{2k+1}>\tfrac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

Решение. За секој $k\geq 1$, од $4k^2-1<4k^2$ делејќи со позитивниот број $2k(2k+1)$ следува дека $\frac{2k-1}{2k}<\frac{2k}{2k+1}$. Според тоа, даденото неравенство следува од неравенството

$$\tfrac{1}{2k+1}=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{8}{9}\cdot\ldots\cdot\tfrac{2k-1}{2k}\cdot\tfrac{2k}{2k+1}$$
$$=(\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{8}{9}\cdot\ldots\cdot\tfrac{2k}{2k+1})(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\tfrac{2k-1}{2k})$$
$$<(\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{8}{9}\cdot\ldots\cdot\tfrac{2k}{2k+1})^2.$$

40. Да се докаже дека за секој природен број n важи:

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}<1.$$

Решение.За било кој природен број n имаме

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k})=1-\frac{1}{n}<1.$$

41. Докажи дека за секој природен број n, $n\geq 2$ важи неравенството

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2}>1.$$

Решение. Бидејќи за $n+1\leq k\leq n^2-1,\ k\in\mathbb{N}$ важи $\frac{1}{k}>\frac{1}{n^2}$, се добива дека

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}+\frac{n^2-n}{n^2}=1,$$

што и требаше да се докаже.

42. Нека n е природен број, и x и y се позитивни реални броеви такви што $x^n+y^n=1$. Докажи дека

$$(\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}})(\sum_{k=1}^{n}\frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}})<\frac{1}{(1-x)(1-y)}.$$

Решение. За секој $t\in(0,1)$ имаме

$$\frac{1+t^2}{1+t^4}=\frac{1}{t}-\frac{(1-t)(1-t^3)}{t(1+t^4)}<\frac{1}{t}.$$

Заменувајќи $t=x^k$ и $t=y^k$, добиваме:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x^k}=\frac{1-x^n}{x^n(1-x)} \text{ и } \sum_{k=1}^{n}\frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{y^k}=\frac{1-y^n}{y^n(1-y)}.$$

Ако ги искористиме равенствата $1-x^n=y^n$ и $1-y^n=x^n$, имаме

$$(\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x^{2k}}{1+x^{4k}})(\sum_{k=1}^{n}\frac{1+y^{2k}}{1+y^{4k}})<\frac{1-x^n}{x^n(1-x)}\frac{1-y^n}{y^n(1-y)}=\frac{y^n}{x^n(1-x)}\frac{x^n}{y^n(1-y)}=\frac{1}{(1-x)(1-y)}.$$

2. МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА И НЕРАВЕНСТВА

1. Да се докаже дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи неравенството

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1}>1$$

Решение. Неравенството ќе го докажеме со помош на принципот на математичка индукција. За таа цел, левата страна на даденото неравенство да ја означиме со S_n. Имаме

$$S_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1.$$

Да претпоставиме дека $S_k>1$. Тогаш имаме:

$$S_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}=S_k+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}$$
$$=S_k+\frac{1}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)}>S_k>1$$

Конечно, од принципот на математичката индукција, неравенството е точно за секој природен број n.

2. Нека $n\geq 2$ е природен број и $0<a_1<a_2<...<a_{2n+1}$ се реални броеви. Докажи го неравенството

$$\sqrt[n]{a_1}-\sqrt[n]{a_2}+...-\sqrt[n]{a_{2n}}+\sqrt[n]{a_{2n+1}}<\sqrt[n]{a_1-a_2+a_3-...-a_{2n}+a_{2n+1}}.$$

Решение. Нека $m\geq 2$ е природен број. Со индукција по $n\geq 1$ ќе докажеме поопшто неравенство од даденото, т.е. ќе докажеме дека

$$\sqrt[m]{a_1}-\sqrt[m]{a_2}+...-\sqrt[m]{a_{2n}}+\sqrt[m]{a_{2n+1}}<\sqrt[m]{a_1-a_2+a_3-...-a_{2n}+a_{2n+1}}.$$

За $n=1$ треба да докажеме дека

$$\sqrt[m]{a_1}-\sqrt[m]{a_2}+\sqrt[m]{a_3}<\sqrt[m]{a_1-a_2+a_3},$$

т.е. $(a-b+c)^m-a^m\leq c^m-b^m$, каде $a=\sqrt[m]{a_1}, b=\sqrt[m]{a_2}, c=\sqrt[m]{a_3}$. Последното следува од

$$(a-b+c)^m-a^m=(c-b)(a^{m-1}+a^{m-2}(c-b)+...+a(c-b)^{m-2}+(c-b)^{m-1})$$
$$<(c-b)(b^{m-1}+b^{m-2}c+...+bc^{m-2}+c^{m-1})=c^m-b^m,$$

(искористивме дека $m>1, 0<a<b, 0<c-b<c$).

Нека претпоставиме дека неравенството е точно за некој $n \geq 1$. Тогаш

$$\sqrt[m]{a_1} - \sqrt[m]{a_2} + ... - \sqrt[m]{a_{2n}} + \sqrt[m]{a_{2n+1}} - \sqrt[m]{a_{2n+2}} + \sqrt[m]{a_{2n+3}} <$$
$$< \sqrt[m]{a_1 - a_2 + a_3 - ... - a_{2n} + a_{2n+1}} - \sqrt[m]{a_{2n+2}} + \sqrt[m]{a_{2n+3}}$$
$$< \sqrt[m]{a_1 - a_2 + a_3 - ... - a_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3}}$$

При што првото неравенство важи заради индуктивната претпоставка, а второто неравенство е веќе докажаната база на индукцијата, т.е. неравенството за три броја. Со тоа поопштото неравенство е докажано за $n+1$ и од принципот на математичка индукција следува дека тоа важи за секој природен број n.

3. Докажи дека, ако $x_i > 0$, $i = 1, 2, ..., n$ и $x_1 x_2 ... x_n = 1$, тогаш

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$$

при што

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = n$$

ако и само ако $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$.

Решение. Даденото неравенство ќе го докажеме со математичка индукција по n.

За $n = 1$ неравенството е точно и притоа важи знак на равенство.

Ако $n = 2$ и $x_1 x_2 = 1$, тогаш без ограничување на општоста можеме да претпоставиме $x_1 \leq 1$ и $x_2 \geq 1$. Според тоа

$$x_1 x_2 = 1 + x_1 x_2 + (x_2 - 1)(1 - x_1) = 2 + (x_2 - 1)(1 - x_1) \geq 2$$

и знак за равенство важи ако и само ако $x_2 - 1 = 0$ или $1 - x_1 = 0$, што заедно со $x_1 x_2 = 1$ дава $x_1 = x_2 = 1$.

Нека претпоставиме дека за $n = k$ и произволни реални броеви x_i, $i = 1, 2, ..., k$, чиј производ е единица, точно е неравенството

$$x_1 + x_2 + ... + x_k \geq k$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x_i = 1$, $i = 1, 2, ..., k$.

Нека $n = k + 1$ и $x_1, x_2, ..., x_{k+1}$ се позитивни броеви за кои $x_1 x_2 ... x_{k+1} = 1$. Ако сите x_i не се еднакви на еден, тогаш имаме броеви поголеми од 1, но и помали од 1. Без ограничување на општоста можеме да земеме $x_1 < 1$ и $x_2 > 1$. Тогаш имаме k позитивни броеви $x_1 x_2, x_3, ..., x_k, x_{k+1}$ чиј производ е еднаков на 1, па затоа

$$x_1 x_2 + x_3 + ... + x_k + x_{k+1} \geq k$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$x_1 x_2 = x_3 = ... = x_k = x_{k+1} = 1.$$

Но, тогаш

$$x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} = x_1 x_2 + x_3 + x_4 + ... + x_k + x_{k+1} + (x_2 - 1)(1 - x_1)$$
$$\geq k + 1 + (x_2 - 1)(1 - x_1) \geq k + 1$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$x_1 x_2 = x_3 = ... = x_k = x_{k+1} = 1$$

и при тоа $(x_2 - 1)(1 - x_1) = 0$, т.е. $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_k = x_{k+1} = 1$.

4. Докажи го неравенството

$$\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2x_3}+\frac{x_2^2}{x_2^2+x_3x_4}+...+\frac{x_n^2}{x_n^2+x_1x_2}\le n-1$$

каде $x_1, x_2, x_3,..., x_n$ се произволни позитивни реални броеви.

Решение. Ставаме $y_i=\frac{x_i^2}{x_{i+1}x_{i+2}}$, $i=1,2,...,n$, $x_{n+1}=x_1$, $x_{n+2}=x_2$. Тогаш $\prod\limits_{i=1}^{n} y_i=1$ и неравенството се сведува на

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{1+y_i}\le n-1 \text{ т.е. } \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+y_i}\ge 1.$$

Последното неравенство ќе го докажеме со индукција по n.

Бидејќи $\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+y^{-1}}=1$ и $yy^{-1}=1$ неравенството е точно за $n=2$.

Нека претпоставиме дека неравенството е точно за $n=k$ т.е. ако $y_i>0$ и $\prod\limits_{i=1}^{k} y_i=1$, тогаш $\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{1+y_i}\ge 1$.

Ќе докажеме дека неравенството е точно за $n=k+1$. Нека се дадени $k+1$ позитивни реални броеви y_i такви што $\prod\limits_{i=1}^{k+1} y_i=1$. Според индуктивната претпоставка и очигледното неравенство

$$\frac{1}{1+y_ky_{k+1}}<\frac{1}{1+y_k}+\frac{1}{1+y_{k+1}}$$

имаме

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{1+y_i}>\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{1+y_i}+\frac{1}{1+y_ky_{k+1}}\ge 1$$

т.е. неравенството важи за $n=k+1$.

5. Докажете дека за различни природни броеви $a_1, a_2,..., a_n$ важи неравенството

$$(a_1+a_2+...+a_n)^2\le a_1^3+a_2^3+...+a_n^3.$$

Решение. Ставаме

$$S_n=a_1+a_2+...+a_n \text{ и } A_n=a_1^3+a_2^3+...+a_n^3$$

каде $a_1, a_2,..., a_n$ се различни природни броеви, за кои без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека

$$a_1<a_2<...<a_n.$$

Неравенството $S_n^2\le A_n$ ќе го докажеме со индукција по n.

За $n=1$ важи $S_1^2=a_1^2\le a_1^3=A_1$.

Нека претпоставиме дека $S_k^2\le A_k$, т.е. тврдењето важи за $n=k$.

За $n=k+1$ добиваме: од $1\le a_1<a_2<...<a_k<a_{k+1}$ следува

$$\begin{aligned}2S_k &= 2(a_1 + a_2 + ... + a_k)\\ &\le 2[1+2+3+...+a_k + (a_k - 1) + ... + (a_{k+1} - 2) + (a_{k+1} - 1)]\\ &= 2\tfrac{a_{k+1}(a_{k+1}-1)}{2} = a_{k+1}^2 - a_{k+1}\end{aligned}$$

т.е. $2S_k a_{k+1} + a_{k+1}^2 \le a_{k+1}^3$, што значи

$$S_{k+1}^2 = (S_k + a_{k+1})^2 = S_k^2 + 2S_k a_{k+1} + a_{k+1}^2 \le A_k + a_{k+1}^3 = A_{k+1} .$$

Равенство $S_n^2 = A_n$ важи ако и само ако $a_1 = 1$ и за секој $k \in \{1,2,3,...,n\}$ важи $a_k + 1 = a_{k+1}$ т.е. ако и само ако $a_i = i$, за $i = 1,2,...,n$.

6. Нека a е позитивен реален број и $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа за која $x_1 = a$ и

$$x_{n+1} \ge (n+2)x_n - \sum_{k=1}^{n} kx_k .$$

Докажи дека постои природен број n таков што $x_n \ge 2011!$.

Решение. Со принципот на математичка индукција ќе покажеме дека

$$x_{n+1} > \sum_{k=1}^{n} kx_k .$$

Од условот на задачата имаме

$$x_2 \ge 3x_1 = 3a > a = x_1 = \sum_{k=1}^{1} kx_k .$$

Значи, тврдењето е точно за $n = 1$. Од друга страна,

$$x_3 \ge 4x_2 - x_1 = 2x_2 + x_2 + x_2 - x_1 > 2x_2 + x_2 > 2x_2 + x_1 = \sum_{k=1}^{2} kx_k .$$

Значи, тврдењето е точно за $n = 2$.

Нека претпоставиме дека $x_{n+1} > \sum_{k=1}^{n} kx_k$. Тогаш

$$\begin{aligned}x_{n+2} &\ge (n+3)x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} kx_k\\ &= (n+1)x_{n+1} + 2x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} kx_k\\ &> (n+1)x_{n+1} + 2\sum_{k=1}^{n} kx_k - \sum_{k=1}^{n} kx_k\\ &= (n+1)x_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} kx_k = \sum_{k=1}^{n+1} kx_k\end{aligned}$$

Според принципот на математичка индукција $x_{n+1} > \sum_{k=1}^{n} kx_k$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

Според тоа, $x_{n+1} > nx_n$. Од последното неравенство, со последоватлна негова примена конечен број пати, добиваме $x_{n+1} > nx_n > n(n-1)x_{n-1} > ... > n!x_1 = n!a$.

7. Нека $x_1, x_2, ..., x_{2012}$ се реални броеви и $x_{12} = 1$. Определи ја најмалата можна вредност на изразот $\sum_{i,j=1}^{2012} \min(i, j) x_i x_j$.

Решение. Да ги замениме 2012 со произволен $n \geq 2$ и $x_{12} = 1$ со $x_k = 1$, $1 \leq k < n$. Со индукција по n следува дека

$$S_n = \sum_{i,j=1}^{n} \min(i, j) x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=i}^{n} x_j)^2 . \tag{1}$$

За $n = 1$ равенството (1) е очигледно. Нека (1) е точно за некој n. Тогаш лесно се гледа дека

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) x_{n+1}^2 + \sum_{i=1}^{n} 2 i x_i x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} (\sum_{j=i}^{n+1} x_j)^2 ,$$

што значи дека равенството (1) важи и за $n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број.

Ако $s_{nk} = \sum_{i=k+1}^{n} x_i$, тогаш $S_n \geq (1 + s_{nk})^2 + s_{nk}^2 \geq \frac{1}{2}$. Не е тешко да се види дека $S_n = \frac{1}{2}$ само ако $x_{k+1} = x_{k-1} = -\frac{1}{2}$ и $x_i = 0$ ако $|i - k| > 1$.

3. НЕРАВЕНСТВА МЕЃУ СРЕДИНИТЕ

1. Ненегативните реални броеви a, b, x и y се такви што $a^5 + b^5 \leq 1$ и $x^5 + y^5 \leq 1$. Докажи дека $a^2 x^3 + b^2 y^3 \leq 1$.

Решение. Ако го искористиме неравенството меѓу аритметичка и геометриската средина, добиваме

$$a^2 x^3 = \sqrt[5]{a^5 a^5 x^5 x^5 x^5} \leq \frac{1}{5}(a^5 + a^5 + x^5 + x^5 + x^5) = \frac{2}{5} a^5 + \frac{3}{5} x^5 ,$$

$$b^2 y^3 = \sqrt[5]{b^5 b^5 y^5 y^5 y^5} \leq \frac{1}{5}(b^5 + b^5 + y^5 + y^5 + y^5) = \frac{2}{5} b^5 + \frac{3}{5} y^5 .$$

Ако ги собереме последните две неравенства, добиваме

$$a^2 x^3 + b^2 y^3 \leq \frac{2}{5} a^5 + \frac{3}{5} x^5 + \frac{2}{5} b^5 + \frac{3}{5} y^5 = \frac{2}{5}(a^5 + b^5) + \frac{3}{5}(x^5 + y^5) \leq \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1 .$$

2. За позитивните броеви x и y е исполнето неравенството

$$x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4 .$$

Докажи дека $x^3 + y^3 \leq 2$.

Решение. Ако x е позитивен реален број, тогаш според неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина

$$x + x^3 \geq 2x^2 . \tag{1}$$

Аналогно, ако y е позитивен реален број, имаме

$$y^2+y^4 \geq 2y^3. \quad (2)$$

Ако x и y се позитивни броеви за кои $x^2+y^3 \geq x^3+y^4$, тогаш $x+y^2 \geq x^2+y^3$. Навистина, ако претпоставиме спротивно, т.е. дека $x+y^2 < x^2+y^3$ и го собереме со неравенството $x^3+y^4 \leq x^2+y^3$, заради (1) и (2) имаме

$$2x^2+2y^3 \leq (x+x^3)+(y^2+y^4) < 2x^2+2y^3.$$

Заради добиената контрадикција $x+y^2 \geq x^2+y^3 \geq x^3+y^4$ и сега

$$2x+2y^2 \geq x^2+y^3+x^3+y^4.$$

Бараното неравенство се добива од последното неравенство и неравенствата

$$2x \leq 1+x^2 \text{ и } 2y^2 \leq 1+y^4.$$

3. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се позитивни реални броеви такви што $a_1+a_2+...+a_n=1$. Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geq n^2.$$

Решение. Според неравенство меѓу аритметичката и хармониската средина имаме

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}}$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i} = n^2$$

Равенство важи ако и само ако $a_1=a_2=...=a_n=\frac{1}{n}$.

4. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се позитивни реални броеви такви што $a_1a_2...a_n=1$. Докажи дека

$$(4+a_1)(4+a_2)...(4+a_n) \geq 5^n.$$

Решение. Забележуваме дека

$$4+x=5\frac{1+1+1+1+x}{5} \geq 5\sqrt[5]{x}, \quad (1)$$

за секој $x>0$ Ако го искористиме неравенството (1) добиваме

$$(4+a_1)(4+a_2)...(4+a_n) \geq 5^n \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} = 5^n$$

Равенство важи ако и само ако $a_1=a_2=...=a_n=1$.

5. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи дека

$$(1+\tfrac{1}{x})(1+\tfrac{1}{y})(1+\tfrac{1}{z}) \geq 64.$$

Решение. Според неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме имаме

$$\begin{aligned}(1+\tfrac{1}{x})(1+\tfrac{1}{y})(1+\tfrac{1}{z}) &= 1+\tfrac{yz+zx+xy}{xyz}+\tfrac{x+y+z}{xyz}+\tfrac{1}{xyz}\\ &\geq 1+\tfrac{3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}{xyz}+\tfrac{3\sqrt[3]{xyz}}{xyz}+\tfrac{1}{xyz}\\ &= 1+\tfrac{3}{\sqrt[3]{xyz}}+\tfrac{3}{\sqrt[3]{(xyz)^2}}+\tfrac{1}{xyz}\\ &= (1+\tfrac{1}{\sqrt[3]{xyz}})^3 \geq (1+\tfrac{3}{x+y+z})^3 = 64\end{aligned}$$

Равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{3}$.

6. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a, b и c важи неравенството

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc.$$

Решение. Без губење на општоста, може да претпоставиме дека $a \geq b \geq c$. Во тој случај, $a+b-c>0$ и $a+c-b>0$. Ако $b+c-a \leq 0$, важи строго неравенство. Инаку, дадените изрази се позитивни, па од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, имаме

$$\begin{aligned}&(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=\\ &\quad=\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}\cdot\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}\cdot\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}\\ &\quad\leq \tfrac{a+b-c+b+c-a}{2}\cdot\tfrac{c+a-b+a+b-c}{2}\cdot\tfrac{b+c-a+c+a-b}{2}=abc.\end{aligned}$$

7. Нека $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ се такви што, $(a+b)(b+c)(c+a)=8$. Докажи го неравенството

$$\tfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[27]{\tfrac{a^3+b^3+c^3}{3}}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)=a^3+b^3+c^3+24\\ &= a^3+b^3+c^3+\underbrace{3+...+3}_{8} \geq 9\sqrt[9]{(a^3+b^3+c^3)3^8}\end{aligned}$$

Според тоа,

$$(\tfrac{a+b+c}{3})^3 \geq \sqrt[9]{\tfrac{a^3+b^3+c^3}{3}}, \text{ т.е. } \tfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[27]{\tfrac{a^3+b^3+c^3}{3}}.$$

8. Нека $n \geq 3$ и $a_1,a_2,...,a_n$ се позитивни реални броеви за кои што важи $\frac{1}{1+a_1^4}+\frac{1}{1+a_2^4}+...+\frac{1}{1+a_n^4}=1$. Докажи го неравенството $a_1a_2\cdot...\cdot a_n \geq (n-1)^{n/4}$.

Решение. Нека $a_i^2=\operatorname{tg} x_i, x_i \in [0,\frac{\pi}{2}), i=1,2,...,n.$ Тогаш $\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2 x_i=1$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\sin^2 x_i = 1-\cos^2 x_i \geq (n-1)(\prod_{j=1,\, j\neq i}^{n} \cos x_j)^{2/(n-1)},\ i=1,2,...,n\ .$$

Множејќи ги горните n неравенства, добиваме

$$\prod_{i=1}^{n}\sin^2 x_i \geq (n-1)^n \prod_{i=1}^{n}\cos^2 x_i .$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\prod_{i=1}^{n}\operatorname{tg} x_i \geq (n-1)^{n/2}.$$

Конечно, $\prod_{i=1}^{n} a_i = (\prod_{i=1}^{n}\operatorname{tg} x_i)^{1/2} \geq (n-1)^{n/4}$, што и требаше да се докаже.

9. Нека a,b,c се позитивни реални броеви за кои важи $abc=1$. Докажи дека

$$a^2b+b^2c+c^2a \geq \sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)}\ .$$

Решение. Ако во познатото неравенство

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)\ ,$$

земеме $x=a^2b, y=b^2c, z=c^2a$ добиваме

$$\begin{aligned}(a^2b+b^2c+c^2a)^2 &\geq 3(a^2b\cdot b^2c+b^2c\cdot c^2a+c^2a\cdot a^2b)\\ &= 3abc(b^2a+c^2b+a^2c) = 3(b^2a+c^2b+a^2c).\end{aligned}$$

Понатаму, од од условот $abc=1$ и неравенството меѓу аритметичката и геометрискската средина следува

$$\begin{aligned}(a^2b+b^2c+c^2a)^2 &= (a^2b+b^2c+c^2a)(a^2b+b^2c+c^2a)\\ &\geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}(a^2b+b^2c+c^2a) = 3(a^2b+b^2c+c^2a)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}(a^2b+b^2c+c^2a)^2 &= (a^2b+b^2c+c^2a)\cdot(a^2b+b^2c+c^2a)\\ &\geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}\,3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 9abc.\end{aligned}$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенства последователно добиваме

$$\begin{aligned}3(a^2b+b^2c+c^2a)^2 &\geq 3(b^2a+c^2b+a^2c)+3(a^2b+b^2c+c^2a)+9abc\\ &= 3(a^2b+b^2c+c^2a+b^2a+c^2b+a^2c+3abc)\\ &= 3(a+b+c)(ab+bc+ca)\end{aligned}$$

односно

$$a^2b+b^2c+c^2a \geq \sqrt{\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)}\ .$$

10. Ако a,b,c,d се позитивни реални броеви такви што $abcd=1$ тогаш докажи дека важи неравенството

$$\frac{1}{bc+cd+da-1}+\frac{1}{ab+cd+da-1}+\frac{1}{ab+bc+da-1}+\frac{1}{ab+bc+cd-1} \leq 2\ .$$

Решение. Со множење на $1+bc+cd+da$ и $1+ab$ добиваме

$$(1+bc+cd+da)(1+ab)=1+bc+cd+da+ab+ab^2c+abcd+a^2bd$$
$$=2+ab+bc+cd+da+\tfrac{b}{d}+\tfrac{a}{c}$$

Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина за позитивните броеви $\frac{b}{d}$ и $\frac{a}{c}$, како и од $abcd=1$ добиваме, $\frac{b}{d}+\frac{a}{c}\geq 2\sqrt{\frac{ab}{cd}}=2ab$, па затоа важи неравенството

$$(1+bc+cd+da)(1+ab)\geq 2+2ab+ab+bc+cd+da\,,$$

т.е.

$$1+bc+cd+da\geq 2+\tfrac{ab+bc+cd+da}{1+ab}$$

или

$$\frac{1+ab}{ab+bc+cd+da}\geq\frac{1}{bc+cd+da-1} \qquad (1)$$

Аналогно се добива

$$\frac{1+bc}{ab+bc+cd+da}\geq\frac{1}{ab+cd+da-1} \qquad (2)$$
$$\frac{1+cd}{ab+bc+cd+da}\geq\frac{1}{ab+bc+da-1} \qquad (3)$$
$$\frac{1+da}{ab+bc+cd+da}\geq\frac{1}{ab+bc+cd-1} \qquad (4)$$

Со собирање на (1), (2), (3) и (4) се добива неравенството

$$\frac{4+ab+bc+cd+da}{ab+bc+cd+da}\geq\frac{1}{bc+cd+da-1}+\frac{1}{ab+cd+da-1}+\frac{1}{ab+bc+da-1}+\frac{1}{ab+bc+cd-1}$$

Бидејќи $ab+bc+cd+da\geq 4\sqrt[4]{(abcd)^2}=4$ следува

$$\frac{1}{bc+cd+da-1}+\frac{1}{ab+cd+da-1}+\frac{1}{ab+bc+da-1}+\frac{1}{ab+bc+cd-1}\leq 1+\frac{4}{ab+bc+cd+da}\leq 2$$

што и требаше да се докаже.

11. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c\geq abc$. Докажи, дека

$$a^2+b^2+c^2\geq abc\sqrt{3}\,.$$

Решение. Прво од неравенстото меѓу аритметиочката и квадратната средина, а потоа од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот на задачата следува

$$(a^2+b^2+c^2)^2\geq\tfrac{1}{9}(a+b+c)^4\geq 3(\tfrac{a+b+c}{3})^3(a+b+c)\geq 3abc(a+b+c)\geq 3(abc)^2\,,$$

т.е.

$$a^2+b^2+c^2\geq abc\sqrt{3}\,.$$

12. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\tfrac{a^2+1}{b+c}+\tfrac{b^2+1}{c+a}+\tfrac{c^2+1}{a+b}\geq 3\,.$$

Решение. Од неравенствата $a^2+1\geq 2a,\, b^2+1\geq 2b,\, c^2+1\geq 2c$ следува

$$\tfrac{a^2+1}{b+c}+\tfrac{b^2+1}{c+a}+\tfrac{c^2+1}{a+b}\geq\tfrac{2a}{b+c}+\tfrac{2b}{c+a}+\tfrac{2c}{a+b}\,,$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$\tfrac{2a}{b+c}+\tfrac{2b}{c+a}+\tfrac{2c}{a+b}\geq 3\,.$$

Ако на двете страни во последното неравенство додадеме 6, го добиваме еквивалентното неравенство

$$(2a+2b+2c)(\tfrac{1}{b+c}+\tfrac{1}{c+a}+\tfrac{1}{a+b})\geq 9\,. \tag{1}$$

Воведуваме смени $x=b+c,\ y=c+a,\ z=b+a$, па неравенството (1) е еквивалентно со неравенството

$$(x+y+z)(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{z})\geq 9\,,$$

т.е. со неравенството меѓу аритметичката и хармониската среднина, со што доказот е завршен.

13. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Докажи, дека

$$\frac{1}{(a-1)(b-1)(c-1)}+\frac{8}{(a+1)(b+1)(c+1)}\leq\frac{1}{4}\,. \tag{*}$$

Решение. Прво да забележиме дека од условот и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $a>1, b>1, c>1$ и

$$a-1=a(\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})\geq\frac{2a}{\sqrt{bc}}\,.$$

Аналогно добиваме

$$b-1\geq\frac{2b}{\sqrt{ca}}\ \text{ и }\ c-1\geq\frac{2c}{\sqrt{ab}}\,.$$

Последните три равенства ги множиме и го добиваме неравенството

$$\frac{1}{(a-1)(b-1)(c-1)}\leq\frac{1}{8}\,. \tag{1}$$

Понатаму, $\frac{a+1}{a-1}=1+\frac{2}{a-1}\geq\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a-1}}$, па затоа $a+1\geq 2\sqrt{2(a-1)}$. Аналогно ги добиваме неравенствата $b+1\geq 2\sqrt{2(b-1)}$ и $c+1\geq 2\sqrt{2(c-1)}$. Последните три неравенства ги множиме и ако го искористиме неравенството (1) добиваме

$$(a+1)(b+1)(c+1\geq 16\sqrt{2(a-1)(b-1)(c-1)}\geq 16\sqrt{2\cdot 8}=64\,,$$

од каде следува дека

$$\frac{8}{(a+1)(b+1)(c+1)}\leq\frac{1}{8}\,. \tag{2}$$

Конечно, ако ги собереме неравенствата (1) и (2) го добиваме неравенството (*).

14. Нека x,y се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$4x^4+4y^3+5x^2+y+1\geq 12xy\,.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$4x^4+1\geq 4x^2\ \text{ и }\ 4y^3+y=y(4y^2+1)\geq 4y^2\,.$$

Затоа

$$\begin{aligned}4x^4+4y^3+5x^2+y+1&\geq 4x^2+4y^2+5x^2=9x^2+4y^2\\&\geq 2\sqrt{9x^2 4y^2}=12xy.\end{aligned}$$

15. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\leq 1$. Докажи дека

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)\geq 125\,.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот на задачата добиваме

$$\frac{a}{1+a}=1-\frac{1}{1+a}\geq \frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq \frac{2}{\sqrt{(1+b)(1+c)}}$$

$$\frac{b}{1+b}=1-\frac{1}{1+b}\geq \frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+a}\geq \frac{2}{\sqrt{(1+c)(1+a)}} \quad \text{и}$$

$$\frac{c}{1+c}=1-\frac{1}{1+c}\geq \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\geq \frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)}}\,.$$

Последните три неравенства ги множиме и после средувањето добиваме дека

$$abc\geq 8\,. \tag{1}$$

Конечно, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и неравенството (1) следува

$$\begin{aligned}(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)&=1+a^2+b^2+c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2c^2\\ &\geq 1+3(a^2b^2c^2)^{\frac{1}{3}}+3(a^4b^4c^4)^{\frac{1}{3}}+a^2b^2c^2\\ &\geq 1+3\cdot 4+3\cdot 4^2+8^2=125.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=2$.

16. Нека $a_i,\, i=1,2,...,n,\,(n\geq 2)$ се позитивни броеви такви што $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$. Докажи дека

$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+...+a_n}+\frac{a_2}{1+a_1+a_3+...+a_n}+...+\frac{a_n}{1+a_1+a_2+...+a_{n-1}}\geq \frac{n}{2n-1}\,.$$

Решение. За секој $i=1,2,...,n$ важи

$$\frac{a_i}{1+a_2+...+a_{i-1}+a_{i+1}+...+a_n}=\frac{a_i}{2-a_i}=\frac{2}{2-a_i}-1\,,$$

па затоа даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{1}{2-a_1}+\frac{1}{2-a_2}+...+\frac{1}{2-a_n}\geq \frac{n^2}{2n-1}\,.$$

Ставаме $x_i=2-a_i,\, i=1,2,...,n$ и добиваме

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\geq \frac{n^2}{2n-1}\,,$$

каде $x_i>0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=2n-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=2n-1$. Според тоа, неравенството е еквивалентно со неравенството меѓу аритметичката и хармонсиката средина

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\geq \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}\,.$$

17. Нека a, b, c, d, e и f се реални броеви такви што

$$a+b+c+d+e+f=10$$

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(d-1)^2+(e-1)^2+(f-1)^2=6.$$

Определи ја најголемата вредност која може да ја прими бројот f.

Решение. Од условот на задачата следува

$$a+b+c+d+e+f=10 \text{ и } a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2=20.$$

Тогаш, од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$10-f=a+b+c+d+e\le 5\sqrt{\tfrac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}{2}}=\sqrt{5(20-f^2)}\ ,$$

па затоа $2f(3f-10)\le 0$. Според тоа, бараната максимална вредност на f е $f_{\max}=\frac{10}{3}$ и се достигнува кога $a=b=c=d=e=\frac{4}{3}$.

18. Нека k е природен број и $a_1, a_2, ..., a_{2k}$ се позитивни броеви помали од 1. Докажи дека важи неравенството

$$\sqrt{a_1^2+(1-a_2)^2}+\sqrt{a_2^2+(1-a_3)^2}+...+\sqrt{a_{2k-1}^2+(1-a_{2k})^2}+\sqrt{a_{2k}^2+(1-a_1)^2}\ge k\sqrt{2}\ .$$

Решение. Според неравенството меѓу квадратна и аритметичка средина имаме

$$\sqrt{a_1^2+(1-a_2)^2}+\sqrt{a_2^2+(1-a_3)^2}+...+\sqrt{a_{2k-1}^2+(1-a_{2k})^2}+\sqrt{a_{2k}^2+(1-a_1)^2}\ge$$

$$\ge\sqrt{2}[\tfrac{a_1+1-a_2}{2}+\tfrac{a_2+1-a_3}{2}+...+\tfrac{a_{2k}+1-a_1}{2}]=k\sqrt{2}$$

равенство важи ако и само ако $a_1=a_3=...=x$, $a_2=a_4=...=y$ и $x+y=1$.

19. Нека се $x_1, x_2, ..., x_n$ ненегативни реални броеви и $r_1, r_2, ..., r_n$ позитивни рационални броеви такви што

$$r_1+r_2+...+r_n=1$$

Докажи дека

$$x_1^{r_1}x_2^{r_2}...x_n^{r_n}\le r_1^{r_1}r_2^{r_2}...r_n^{r_n}\left(x_1+x_2+...+x_n\right).$$

Решение. Означуваме $r_1=\frac{p_1}{q}, r_2=\frac{p_2}{q}, ..., r_n=\frac{p_n}{q}$, при што $p_1+p_2+...+p_n=q$ и $p_1, p_2, ..., p_n, q$ се природни броеви. Ако го искористиме неравенството помеѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$(\tfrac{x_1}{r_1})^{r_1}(\tfrac{x_2}{r_2})^{r_2}...(\tfrac{x_n}{r_n})^{r_n}=[(\tfrac{x_1}{r_1})^{p_1}(\tfrac{x_2}{r_2})^{p_2}...(\tfrac{x_n}{r_n})^{p_n}]^{\frac{1}{q}}\le\frac{p_1\frac{x_1}{r_1}+p_2\frac{x_2}{r_2}+...+p_n\frac{x_n}{r_n}}{q}=x_1+x_2+...+x_n$$

20. Докажи дека

$$\sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}+\sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}<2\,,$$

за секој $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Изразот $1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}$ ќе го запишеме во облик $(1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n})\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot ...\cdot 1}_{(n-1)-\text{пат}}$ и со примена на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}=\sqrt[n]{(1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n})\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{(n-1)-\text{пат}}}<\frac{1}{n}(1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}+n-1)=\frac{1}{n}(n+\frac{\sqrt[n]{n}}{n})=1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}.$$

Потполно аналогно се добива и неравнството

$$\sqrt[n]{1\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}=\sqrt[n]{(1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n})\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{(n-1)-\text{пат}}}<\frac{1}{n}(1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}+n-1)=\frac{1}{n}(n-\frac{\sqrt[n]{n}}{n})=1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}.$$

Сега е јасно дека

$$\sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}+\sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}<1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}+1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}=2.$$

21. Докажи дека

$$1+\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{3+1}{3}}+\sqrt[4]{\frac{4+1}{4}}+\ldots+\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}<n+1,\ n\in\mathbb{N}.$$

Решение. За $k=1,2,3,\ldots,n$ имаме

$$\sqrt[k]{\frac{k+1}{k}}=\sqrt[k]{\frac{k+1}{k}\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{(k-1)-\text{пат}}}.$$

Ако го примениме неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме

$$\sqrt[k]{\frac{k+1}{k}\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{(k-1)-\text{пат}}}<\frac{1}{k}(\frac{k+1}{k}+k-1)=\frac{1}{k}(k+\frac{1}{k})=1+\frac{1}{k^2}.$$

Сега:

$$\begin{aligned}1+\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{3+1}{3}}+\sqrt[4]{\frac{4+1}{4}}+\ldots+\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}&<1+(1+\frac{1}{2^2})+(1+\frac{1}{3^2})+\ldots+(1+\frac{1}{n^2})\\&=n+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\\&<n+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n-1)},\\&=n+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\\&=n+1-\frac{1}{n}<n+1.\end{aligned}$$

22. Докажи дека

$$(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})^2\geq\frac{3}{2}(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}),\qquad(1)$$

за било кои позитивни реални броеви a,b,c.

Решение. Ако воведеме ознаки $\frac{a}{b}=x$, $\frac{b}{c}=y$, $\frac{c}{a}=z$ тогаш почетното неравенство го добива обликот

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\geq\frac{3}{2}(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})$$

$$x^2+y^2+z^2+2(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})\geq\frac{3}{2}(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}),$$

бидејќи $xyz=1$. Според тоа,

$$2x^2+2y^2+2z^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3(x+y+z).\qquad(2)$$

Бидејќи x,y и z се позитивни реални броеви, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$2x^2+\frac{1}{x}\geq 3\sqrt[3]{x^2x^2\frac{1}{x}}=3\sqrt[3]{x^3}=3x$$
$$2y^2+\frac{1}{y}\geq 3\sqrt[3]{y^2y^2\frac{1}{y}}=3\sqrt[3]{y^3}=3y$$
$$2z^2+\frac{1}{z}\geq 3\sqrt[3]{z^2z^2\frac{1}{z}}=3\sqrt[3]{z^3}=3z\ .$$

Од точноста на последните три неравенства се добива точноста на (2) а со тоа и точноста на (1).

23. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека
$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c\ .$$

Решение. Според неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина за два позитивни реални броја, имаме
$$\frac{a^2}{b}+b\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b}\cdot b}=2a$$
$$\frac{b^2}{c}+c\geq 2\sqrt{\frac{b^2}{c}\cdot c}=2b$$
$$\frac{c^2}{a}+a\geq 2\sqrt{\frac{c^2}{a}\cdot a}=2c\ .$$
Ако овие неравенства ги собереме, добиваме
$$\frac{a^2}{b}+b+\frac{b^2}{c}+c+\frac{c^2}{a}+a\geq 2a+2b+2c$$
$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c\ .$$

24. Докажи дека за било кои позитивни реални броеви a,b,c е исполнето неравенството
$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq a+b+c\ .$$

Решение. Со трикратна последователна примена на неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме
$$\frac{a^3}{b^2}+b+b\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^2}\cdot b\cdot b}=3a$$
$$\frac{b^3}{c^2}+c+c\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{c^2}\cdot c\cdot c}=3b$$
$$\frac{c^3}{a^2}+a+a\geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{a^2}\cdot a\cdot a}=3c$$
Сега, ако последните три неравенства ги собереме добиваме
$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}+2a+2b+2c\geq 3a+3b+3c\ ,$$
т.е.
$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq a+b+c\ .$$

25. Докажи дека за било кои позитивни реални броеви $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ е исполнето неравенството

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}.$$

Решение. *Прв начин.* Ако го искористиме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, добиваме

$$\frac{a^3}{b^2}+a\geq 2\sqrt{\frac{a^3}{b^2}\cdot a}=2\frac{a^2}{b}$$

$$\frac{b^3}{c^2}+b\geq 2\sqrt{\frac{b^3}{c^2}\cdot b}=2\frac{b^2}{c}$$

$$\frac{c^3}{a^2}+c\geq 2\sqrt{\frac{c^3}{a^2}\cdot c}=2\frac{c^2}{a}$$

Ако овие неравенства ги собереме и го примениме резултатот од задачата 22, добиваме

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}+a+b+c\geq 2(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})=(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})+(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})$$
$$\geq\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c.$$

па според тоа

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}.$$

Втор нмачин. Лема. Ако x и y се позитивни реални броеви, тогаш

$$x^3+y^3\geq xy(x+y).$$

Доказ. **К**ористејќи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за два позитивни реални броеви имаме

$$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2y^2}=2xy.$$

Од друга страна

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)\geq(x+y)(2xy-xy)=xy(x+y).\blacksquare$$

Според лемата, имаме

$$\frac{a^3}{b^2}+b=\frac{a^3+b^3}{b^2}\geq\frac{ab(a+b)}{b^2}=\frac{a^2}{b}+a$$

$$\frac{b^3}{c^2}+c=\frac{b^3+c^3}{c^2}\geq\frac{bc(b+c)}{c^2}=\frac{b^2}{c}+b$$

$$\frac{c^3}{a^2}+a=\frac{c^3+a^3}{a^2}\geq\frac{ac(a+c)}{a^2}=\frac{c^2}{a}+c.$$

Ако ги собереме трите последни неравенства добиваме

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}+a+b+c\geq\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c,$$

односно

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}.$$

26. Нека a,b и c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}.$$

Решение. Според лемата од претходната задача, за било кои позитивни реални броеви x и y е исполнето неравенството

$$x^3+y^3 \ge xy(x+y)\ .$$

Заради тоа

$$a^3+b^3+abc \ge ab(a+b)+abc = ab(a+b+c)$$
$$b^3+c^3+abc \ge bc(b+c)+abc = bc(a+b+c)$$
$$c^3+a^3+abc \ge ca(b+c)+abc = ca(a+b+c)\ ,$$

од каде што добиваме

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} &\le \frac{1}{ab(a+b+c)}+\frac{1}{bc(a+b+c)}+\frac{1}{ca(a+b+c)}\\ &= \frac{c}{abc(a+b+c)}+\frac{a}{abc(a+b+c)}+\frac{b}{abc(a+b+c)}\\ &= \frac{a+b+c}{abc(a+b+c)}=\frac{1}{abc}.\end{aligned}$$

27. Докажи дека

$$(1+\tfrac{a}{b})(1+\tfrac{b}{c})(1+\tfrac{c}{a}) \ge 2+\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}\ , \tag{1}$$

за било кои $a,b,c \in \mathbb{R}^+$.

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$2+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b} \ge 2+\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}$$
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b} \ge \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}\ . \tag{2}$$

Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме

$$\begin{cases}\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c} \ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\frac{a}{b}\frac{b}{c}} = 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}} = \frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}\\ \frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge 3\sqrt[3]{\frac{b}{c}\frac{b}{c}\frac{c}{a}} = 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{abc}} = \frac{3b}{\sqrt[3]{abc}}\\ \frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b} \ge 3\sqrt[3]{\frac{c}{a}\frac{c}{a}\frac{a}{b}} == 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{abc}} = \frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{b} \ge 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}\frac{c}{b}\frac{c}{b}} = 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{abc}} = \frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}\\ \frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{c} \ge 3\sqrt[3]{\frac{c}{b}\frac{a}{c}\frac{a}{c}} = 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}} = \frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}\\ \frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{a} \ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{c}\frac{b}{a}\frac{b}{a}} = 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{abc}} = \frac{3b}{\sqrt[3]{abc}}\end{cases}$$

Сега со собирање неравенствата, на левите и десните имаме

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \tag{3}$$
$$\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b} \ge \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \tag{4}$$

Со собирање на (3) и (4) ја добиваме точноста на (2) а со тоа и точноста на (1).

28. Нека a,b и c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$3(a+b+c) \ge 8\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}\ .$$

Во кои случи важи равенство.

Решение. Од неравенството меѓу аритметичка и кубна средина имаме

$$8\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}} \le 9\sqrt[3]{\frac{8abc+\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}{9}} = 3\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3+24abc}\ .$$

(да забележиме дека $8\sqrt[3]{abc}$ го разгледуваме како збир на осум собироци еднаков на $\sqrt[3]{abc}$). Според тоа, доволно е да се докаже дека

$$3(a+b+c)\geq 3\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3+24abc}$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$a^2b+b^2a+c^2b+b^2c+a^2c+c^2a\geq 6abc,$$

чија точност следува од неравнеството меѓу аритметичка и геометриска средина.

29. Реалните броеви $x_1,x_2,...,x_n$ се позитивни и нивниот збир е еднаков на 3. Докажи дека

$$\frac{x_1}{x_2(x_1+x_2+x_3)}+\frac{x_2}{x_3(x_2+x_3+x_4)}+...+\frac{x_n}{x_1(x_n+x_1+x_2)}\geq \frac{n^2}{8}.$$

Решение. Нека $x_{n+1}=x_1$, $x_{n+2}=x_2$. Определуваме

$$a_i=\frac{x_i}{x_{i+1}},\quad b_i=x_i+x_{i+1}+x_{i+2},\quad \text{за } i=1,2,3,...,n.$$

Од дефинцијата на $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n$ и претпоставките од задачата имаме

$$\prod_{i=1}^{n}a_i=1 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n}b_i=3\sum_{i=1}^{n}x_i=3\cdot 1=3.$$

Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\geq \frac{n^2}{3}. \qquad (1)$$

Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i\geq \sqrt[n]{b_1b_2...b_n},\qquad \frac{3}{n}\geq \sqrt[n]{b_1b_2...b_n},$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{b_1b_2...b_n}}\geq \frac{n}{3} \qquad (2)$$

Од друга страна, со повторна употреба на неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\geq n\cdot\sqrt[n]{\frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2}...\frac{a_n}{b_n}}=n\frac{\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}{\sqrt[n]{b_1b_2...b_n}}=\frac{n}{\sqrt[n]{b_1b_2...b_n}} \qquad (3)$$

Од (2) и (3) се добива точноста на (1), а со тоа и точноста на почетното неравенство.

30. За реалните броеви $x_1,x_2,...,x_6$ се исполнети равенствата

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2=6$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=0.$$

Докажи дека

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6\leq \frac{1}{2}.$$

Решение. Ако меѓу броевите $x_1,x_2,...,x_6$ има непарен број на негативни или некој од нив е 0, тогаш бараното неравенство е очигледно. Заради тоа, нека негативни се два или четири од дадените броеви. Со промена на знаците на броевите, задачата може да се сведе на случај кога два од броевите се негативни а четири се позитивни.

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека негативни се броевите x_1 и x_2. Воведуваме ознаки $y_k = |x_k|$, $k = 1,2,3,4,5,6$. Тогаш

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 = 6$$

$$y_1 + y_2 = y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = s.$$

Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме

$$y_1 y_2 \le (\tfrac{y_1+y_1}{2})^2 = \tfrac{s^2}{4}$$

$$y_3 y_4 y_5 y_6 \le (\tfrac{y_3+y_4+y_5+y_6}{4})^4 = \tfrac{s^4}{4^4},$$

од каде добиваме

$$y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 \le \tfrac{s^6}{4^5}.$$

Од друга страна,

$$2(y_1^2 + y_2^2) \ge (y_1 + y_2)^2 = s^2$$

$$4(y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2) \ge (y_3 + y_4 + y_5 + y_6)^2 = s^2$$

(двете неравенства може да се докажат со алгебарски трансформации или да се употреби неравенството меѓу аритметичка и квадратна средина).

Според тоа

$$6 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 \ge \tfrac{s^2}{2} + \tfrac{s^2}{4} = \tfrac{3}{4} s^2$$

$$s^2 \le 8,$$

од каде добиваме

$$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 = y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 \le \tfrac{s^6}{4^5} \le \tfrac{8^3}{4^5} = \tfrac{1}{2}.$$

31. Нека a, b и c се реални броеви различни од нула. За нив точно е неравенството

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \ge 3.$$

Равенство важи ако и само ако $|a| = |b| = |c|$. Докажи!

Решение. Според неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина за трите позитивни реални броеви имаме

$$\frac{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}}{3} \ge \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}\frac{b^2}{c^2}\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt[3]{1} = 1,$$

од каде, заради тоа што 3 е позитивен реален број, добиваме

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \ge 3.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{a^2} = 1,$$

од каде наоѓаме ако и само ако $|a| = |b| = |c|$

3**2.** Определи ја најмалата вредност на изразот $\frac{a+b+c}{b-a}$, ако a,b и c се коефициенти на квадсратната функција $f(x)=ax^2+bx+c$ за која $a<b$ и $f(x)\geq 0$.

Решение. Од условот на задачата имаме $a>0$ и $b^2-4ac\leq 0$, т.е. $c\geq\frac{b^2}{4a}$. Ако воведеме ознака $A=\frac{a+b+c}{b-a}$, имаме

$$A\geq\frac{a+b+\frac{b^2}{4a}}{b-a}=\frac{4a^2+4ab+b^2}{4a(b-a)}=\frac{9a^2+6a(b-a)+(b-a)^2}{4a(b-a)}$$
$$=\frac{9a^2+(b-a)^2}{4a(b-a)}+\frac{6a(b-a)}{4a(b-a)}\geq\frac{2\sqrt{9a^2(b-a)^2}}{4a(b-a)}+\frac{3}{2}=3.$$

Равенство $A=3$ се достигнува ако и само ако $4ac=b^2$ и $3a=b-a$, т.е. $b=c=4a$. Значи, изразот најмала вредност достигнува ако и само ако

$$f(x)=ax^2+4ax+4a=a(x+2)^2,$$

каде a е позитивен реален број.

33. Нека a,b,c се ненегативни броеви за кои $a+b+c=1$. Докажи дека

$$(1+a)(1+b)(1+c)\geq 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

Решение. Равенството $a+b+c=1$ можеме да го запишеме во облик

$$1+a=(1-b)+(1-c)$$
$$1+b=(1-a)+(1-c)$$
$$1+c=(1-a)+(1-b)$$

Според неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме

$$1+a\geq 2\sqrt{(1-b)(1-c)}$$
$$1+b\geq 2\sqrt{(1-a)(1-c)}$$
$$1+c\geq 2\sqrt{(1-a)(1-b)}$$

Бидејќи десните страни на неравенствата се позитивни, ако помножиме го добиваме бараното неравенство.

34. Нека a,b,c се позитивни реални броеви и $a+b+c=1$. Да се најде најмалата вредност на изразот

$$(\tfrac{1}{a}-1)(\tfrac{1}{b}-1)(\tfrac{1}{c}-1)$$

Решение. Изразот ќе го запишеме во нов облик. Имено,

$$(\tfrac{1}{a}-1)(\tfrac{1}{b}-1)(\tfrac{1}{c}-1)=\frac{1-a}{a}\frac{1-b}{b}\frac{1-c}{c}=\frac{b+c}{a}\frac{a+c}{b}\frac{a+b}{c}=(*)$$

Бидејќи $a,b,c>0$, според неравенството помеѓу аритметичката и геометриската средина имаме, $b+c\geq 2\sqrt{bc}, a+c\geq 2\sqrt{ac}, a+b\geq 2\sqrt{ab}$. Користејќи ги овие неравенства добиваме

$$(*)\geq\frac{2\sqrt{bc}}{a}\frac{2\sqrt{ac}}{b}\frac{2\sqrt{ab}}{c}=8$$

Вредноста 8 се достигнува за $a=b=c=\frac{1}{3}$.

35. Нека a и b се позитивни реални броеви, такви што $a+b=ab$. Докажи дека
$$\frac{a}{b^2+4}+\frac{b}{a^2+4}\ge\frac{1}{2}.$$

Решение. Од условот на задачата и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, имаме
$$ab=a+b\ge 2\sqrt{ab}$$
$$a^2b^2\ge 4ab$$
$$ab\ge 4.$$
Сега, од последното неравенство и повторно од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме
$$\frac{a}{b^2+4}+\frac{b}{a^2+4}\ge\frac{a}{b^2+ab}+\frac{b}{a^2+ab}=\frac{1}{a+b}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{a+b}\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{1}{a+b}\frac{a^2+b^2}{a+b}\ge\frac{1}{2}.$$

36. Нека a,b,c и d се позитивни реални броеви такви што $abcd=1$. Докажи дека
$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+cd}{1+c}+\frac{1+da}{1+d}\ge 4. \qquad (1)$$

Решение. Да забележиме дека $cd=\frac{1}{ab}$ и $da=\frac{1}{bc}$, па според тоа
$$\begin{aligned}\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+cd}{1+c}+\frac{1+da}{1+d}&=\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+\frac{1}{ab}}{1+c}+\frac{1+\frac{1}{bc}}{1+d}=\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+ab}{ab+abc}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+bc}{bc+bcd}\\&=(1+ab)\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{ab+abc}\right)+(1+bc)\left(\frac{1}{1+b}+\frac{1}{bc+bcd}\right)\end{aligned} \qquad (2)$$
Ако го искористиме неравенството $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ кое е исполнето за било кои позитивни реални броеви, имаме
$$\begin{aligned}(1+ab)\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{ab+abc}\right)+(1+bc)\left(\frac{1}{1+b}+\frac{1}{bc+bcd}\right)&\ge 4\frac{1+ab}{1+a+ab+abc}+4\frac{1+bc}{1+b+bc+bcd}\\&=4\frac{1+ab}{1+a+ab+abc}+4\frac{a+abc}{a+ab+abc+1}\\&=4\frac{a+ab+abc+1}{a+ab+abc+1}=4.\end{aligned}$$
Сега од неравенството (2) и од последните неравенства се добива точноста на неравенството (1).

37. Најди ги сите позитивни реални броеви a,b,c,d за кои важи:

1) $16abcd=(a^2+b^2+c^2+d^2)(abc+abd+acd+bcd)$; и

2) $2ab+2cd+ac+ad+bc+bd=8$.

Решение. Од условот 1) имаме :
$$\begin{aligned}1&=\frac{16abcd}{(a^2+b^2+c^2+d^2)(abc+abd+acd+bcd)}=\frac{1}{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}\frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\\&\le\frac{1}{\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2}\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{4}{a+b+c+d}.\end{aligned}$$
Од каде добиваме $a+b+c+d\le 4$. Притоа равенство очигледно важи само кога $a=b=c=d=1$ (кога важи равенство меѓу употребените средини). Од условот 2) имаме:

$$\begin{aligned}16&=4ab+4cd+2ac+2ad+2bc+2bd\\&=2ab+2cd+2ab+2cd+2ac+2ad+2bc+2bd\\&\leq a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2cd+2ac+2ad+2bc+2bd\\&=(a+b+c+d)^2\end{aligned}$$

Од каде $a+b+c+d\geq 4$. Затоа $a+b+c+d=4$ и мора $a=b=c=d=1$.

4. НЕРАВЕНСТВО НА КОШИ-БУЊАКОВСКИ-ШВАРЦ

1. Ако за реалните броеви $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n$ важи

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=b_1^2+b_2^2+...+b_n^2=1,$$

тогаш $|a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n|\leq 1$. Докажи!

Решение. *Прв начин.* Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц имаме

$$|a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n|\leq\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}=\sqrt{1}\sqrt{1}=1$$

Втор начин. Користејќи ги неравенствата $|x+y|\leq|x|+|y|$, $|xy|\leq\frac{x^2+y^2}{2}$ добиваме

$$\begin{aligned}|a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n|&\leq|a_1b_1|+|a_2b_2|+...+|a_nb_n|\\&\leq\frac{a_1^2+b_1^2}{2}+\frac{a_2^2+b_2^2}{2}+...+\frac{a_n^2+b_n^2}{2}\\&=\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{2}+\frac{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}{2}=1.\end{aligned}$$

2. Нека a,b,c се позитивни реални броеви за кои важи $ab+bc+ca=1/3$. Да се докаже неравенството

$$\frac{a}{a^2-bc+1}+\frac{b}{b^2-ca+1}+\frac{c}{c^2-ab+1}\geq\frac{1}{a+b+c}.$$

Решение. Да забележиме дека именителите во левиот израз се позитивни.

Со примена на *Неравенството на Коши - Буњаковски* имаме

$$\frac{a}{a^2-bc+1}+\frac{b}{b^2-ca+1}+\frac{c}{c^2-ab+1}=\frac{a^2}{a^3-abc+a}+\frac{b^2}{b^3-cab+b}+\frac{c^2}{c^3-abc+c}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3+a+b+c-3abc}$$

Понатаму бидејќи

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3-3abc&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-1/3)\end{aligned}$$

следува дека

$$\begin{aligned}\frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3+a+b+c-3abc}&=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+1-1/3)}=\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2/3}\\&=\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}=\frac{1}{a+b+c}\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

3. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $xyz=1$. Докажи дека

$$(x^4+\frac{z^2}{y^2})(y^4+\frac{x^2}{z^2})(z^4+\frac{y^2}{x^2}) \geq (\frac{x^2}{y}+1)(\frac{y^2}{z}+1)(\frac{z^2}{x}+1) \quad .$$

Решение. Користејќи го неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц имаме

$$\sqrt{(x^2)^2+(\frac{z}{y})^2} \cdot \sqrt{(y^2)^2+(\frac{x}{z})^2} \geq x^2y^2+\frac{z}{y}\cdot\frac{x}{z} = x^2(y^2+\frac{1}{xy})$$

$$\sqrt{(y^2)^2+(\frac{x}{z})^2} \cdot \sqrt{(z^2)^2+(\frac{y}{x})^2} \geq y^2z^2+\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{x} = y^2(z^2+\frac{1}{yz})$$

$$\sqrt{(x^2)^2+(\frac{z}{y})^2} \cdot \sqrt{(z^2)^2+(\frac{y}{x})^2} \geq x^2z^2+\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{x} = z^2(x^2+\frac{1}{xz}) \; .$$

Множејќи ги последните три неравенства добиваме,

$$(x^4+\frac{z^2}{y^2})(y^4+\frac{x^2}{z^2})(z^4+\frac{y^2}{x^2}) \geq x^2y^2z^2(y^2+\frac{1}{xy})(z^2+\frac{1}{yz})(x^2+\frac{1}{xz})$$

$$= (xyz)^3(\frac{x^2}{y}+1)(\frac{y^2}{z}+1)(\frac{z^2}{x}+1)$$

$$= (\frac{x^2}{y}+1)(\frac{y^2}{z}+1)(\frac{z^2}{x}+1),$$

што требаше и да се докаже.

4. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи:

$$1+\frac{3}{ab+bc+ca} \geq \frac{6}{a+b+c} \; .$$

Решение. За позитивните реални броеви a,b,c, според неравенството на Коши Буњаковски-Шварц имаме

$$ab+bc+ca \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2+a^2} = a^2+b^2+c^2$$

$$= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$$

Според тоа

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2$$

$$\frac{ab+bc+ca}{3} \leq \frac{(a+b+c)^2}{9}$$

$$\frac{3}{ab+bc+ca} \geq \frac{9}{(a+b+c)^2}$$

$$1+\frac{3}{ab+bc+ca} \geq 1+\frac{9}{(a+b+c)^2} = (1-\frac{3}{a+b+c})^2+\frac{6}{a+b+c} \geq \frac{6}{a+b+c}.$$

5. Ако a,b,c се ненегативни цели броеви такви, што $a^2+b^2+c^2=1$, докажи дека

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1} \geq \frac{3}{4}(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2 \; .$$

Решение. Ќе го користиме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц:

$$(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2 \leq (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2) \; . \qquad (1)$$

Нека

$$x_1=\sqrt{a^2(b^2+1)},\; x_2=\sqrt{b^2(c^2+1)},\; x_3=\sqrt{c^2(a^2+1)} \; ,$$

$$y_1=\sqrt{\frac{a}{b^2+1}},\ y_2=\sqrt{\frac{b}{c^2+1}},\ y_3=\sqrt{\frac{c}{a^2+1}}\ .$$

Ако замениме во неравенството (1) добиваме

$$[a^2(b^2+1)+b^2(c^2+1)+c^2(a^2+1)](\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1})\geq(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2\ .$$

Според тоа, за да го докажеме бараното неравенство, треба да докажеме дека

$$a^2(b^2+1)+b^2(c^2+1)+c^2(a^2+1)\leq\frac{4}{3}\ .$$

Од условот $a^2+b^2+c^2=1$ следува

$$\begin{aligned}a^2(b^2+1)+b^2(c^2+1)+c^2(a^2+1)&=a^2+b^2+c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\\&=1+\frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{3}\\&\leq1+\frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+a^4+b^4+c^4}{3}\\&=1+\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3}=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Последното неравенство следува од неравенството

$$(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\geq0\ .$$

Со тоа е докажано бараното неравенство и знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Во овој случај важи знак за равенство во неравенството (1) и важи знак за равенство последното неравенство.

6. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи го неравенството

$$\frac{2x^2+xy}{(y+\sqrt{zx}+z)^2}+\frac{2y^2+yz}{(z+\sqrt{xy}+x)^2}+\frac{2z^2+zx}{(x+\sqrt{yz}+y)^2}\geq1\ .$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(yx+x^2+x^2)(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z^2}{x^2})\geq(y+\sqrt{zx}+z)^2,$$

од каде добиваме

$$\frac{2x^2+xy}{(y+\sqrt{zx}+z)^2}\geq\frac{x^2}{xy+xz+z^2}\ .$$

Аналогно се добиваат неравенствата

$$\frac{2y^2+yz}{(z+\sqrt{xy}+x)^2}\geq\frac{y^2}{yz+yx+x^2}\ ,\ \frac{2z^2+zx}{(x+\sqrt{yz}+y)^2}\geq\frac{z^2}{zx+zy+y^2}\ .$$

Според тоа, доволно е да докажеме дека

$$M=\frac{x^2}{xy+xz+z^2}+\frac{y^2}{yz+yx+x^2}+\frac{z^2}{zx+zy+y^2}\geq1\ .$$

Повторно од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$M((xy+xz+z^2)+(yz+yx+x^2)+(zx+zy+y^2))\geq(x+y+z)^2$$

и како

$$(xy+xz+z^2)+(yz+yx+x^2)+(zx+zy+y^2)=(x+y+z)^2$$

добиваме дека $M\geq1$.

7. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви, што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le 1.$$

Решение. Бидејќи $x^2+2\ge 2x+1$, доволно е да докажеме дека

$$L=\frac{a}{2a+1}+\frac{b}{2b+1}+\frac{c}{2c+1}\le 1.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$3-2L=\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}\ge 1. \qquad (1)$$

Воведуваме замена $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$ со што (1) се сведува на

$$\frac{y}{2x+y}+\frac{z}{2y+z}+\frac{x}{2z+x}\ge 1. \qquad (2)$$

Сега од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува неравенството

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= \left(\sqrt{\tfrac{y}{2x+y}}\cdot\sqrt{y(2x+y)}+\sqrt{\tfrac{z}{2y+z}}\cdot\sqrt{z(2y+z)}+\sqrt{\tfrac{x}{2z+x}}\cdot\sqrt{x(2z+x)}\right)\\ &\le \left(\tfrac{y}{2x+y}+\tfrac{z}{2y+z}+\tfrac{x}{2z+x}\right)(y(2x+y)+z(2y+z)+x(2x+z))\\ &= \left(\tfrac{y}{2x+y}+\tfrac{z}{2y+z}+\tfrac{x}{2z+x}\right)(x+y+z)^2\end{aligned}$$

кое е еквивалентно со неравенството (2). Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

8. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $xy+yz+zx=x+y+z$. Докажи го неравенството

$$\frac{1}{x^2+y+1}+\frac{1}{y^2+z+1}+\frac{1}{z^2+x+1}\le 1.$$

Кога во претходното неравенство важи знак за равенство?

Решение. Со примена на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц на тројките $(x,\sqrt{y},1)$ и $(1,\sqrt{y},z)$ добиваме $\frac{1}{x^2+y+1}\le\frac{1+y+z^2}{(x+y+z)^2}$. Аналогно важи

$$\frac{1}{y^2+z+1}\le\frac{1+z+x^2}{(x+y+z)^2} \text{ и } \frac{1}{z^2+x+1}\le\frac{1+x+y^2}{(x+y+z)^2}.$$

Со собирање на овие неравенства добиваме

$$\frac{1}{x^2+y+1}+\frac{1}{y^2+z+1}+\frac{1}{z^2+x+1}\le\frac{3+x+y+z+x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}=S.$$

Останува да докажеме дека $S\le 1$, а тоа според условот на задачата е еквивалентно со $3+x+y+z\le 2(xy+yz+zx)=2(x+y+z)$, т.е. со $x+y+z\ge 3$. Последното следува од $x+y+z=xy+yz+zx\le\frac{(x+y+z)^2}{3}$.

9. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви да $x+y+z=1$. Докажи дека $A\ge B^2$, каде

$$A=\frac{(1+xy+yz+zx)(1+3x^2+3y^2+3z^2)}{9(x+y)(y+z)(z+x)} \text{ и } B=\frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{3+9x^2}}+\frac{y\sqrt{y+1}}{\sqrt[4]{3+9y^2}}+\frac{z\sqrt{z+1}}{\sqrt[4]{3+9z^2}}.$$

Решение. Од $x+y+z=1$ наожаме

$$\begin{aligned}1+xy+yz+zx&=(x+y+z)^2+xy+yz+zx\\&=(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)\end{aligned}$$

и ако го искористиме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, за десната страна на даденото неравенство добиваме

$$\begin{aligned}A&=\tfrac{1}{9}(\tfrac{1}{1-x}+\tfrac{1}{1-y}+\tfrac{1}{1-z})((x+3x^2)+(y+3y^2)+(z+3z^2))\\&\geq\sqrt{\tfrac{3x^3+x}{9(1-x)}}+\sqrt{\tfrac{3y^3+y}{9(1-y)}}+\sqrt{\tfrac{3z^3+z}{9(1-z)}})^2.\end{aligned}$$

Според тоа, доволно е да докажеме дека за секој реален број $s\in(0,1)$ е исполнето неравенството

$$\sqrt{\tfrac{3s^3+s}{9(1-s)}}\geq\tfrac{s\sqrt{s+1}}{\sqrt[4]{3+9s^2}}.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството $3(9s^2-1)^2\geq 0$, кое очигледно е точно. Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{3}$.

10. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви да $x+y+z=1$. Докажи дека $A\geq B^2$, каде

$$A=\tfrac{(1+xy+yz+zx)(1+3x^2+3y^2+3z^2)}{9(x+y)(y+z)(z+x)}\ \text{ и }\ B=\tfrac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{3+9x^2}}+\tfrac{y\sqrt{y+1}}{\sqrt[4]{3+9y^2}}+\tfrac{z\sqrt{z+1}}{\sqrt[4]{3+9z^2}}.$$

Решение. Од $x+y+z=1$ наожаме

$$\begin{aligned}1+xy+yz+zx&=(x+y+z)^2+xy+yz+zx\\&=(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)\end{aligned}$$

и ако го искористиме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, за десната страна на даденото неравенство добиваме

$$\begin{aligned}A&=\tfrac{1}{9}(\tfrac{1}{1-x}+\tfrac{1}{1-y}+\tfrac{1}{1-z})((x+3x^2)+(y+3y^2)+(z+3z^2))\\&\geq\sqrt{\tfrac{3x^3+x}{9(1-x)}}+\sqrt{\tfrac{3y^3+y}{9(1-y)}}+\sqrt{\tfrac{3z^3+z}{9(1-z)}})^2.\end{aligned}$$

Според тоа, доволно е да докажеме дека за секој реален број $s\in(0,1)$ е исполнето неравенството

$$\sqrt{\tfrac{3s^3+s}{9(1-s)}}\geq\tfrac{s\sqrt{s+1}}{\sqrt[4]{3+9s^2}}.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството $3(9s^2-1)^2\geq 0$, кое очигледно е точно. Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{3}$.

11. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви што

$$a^2+b^2+c^2<2(a+b+c). \qquad (1)$$

Докажи дека

$$3abc < 4(a+b+c)\,.$$

Решение. Според неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, за позитивните реални броеви a,b и c имаме

$$|\,a+b+c\,|=|\,1\cdot a+1\cdot b+1\cdot c\,|\le \sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ ,$$

$$(a+b+c)^2 < 3(a^2+b^2+c^2)$$

па од (1) имаме

$$(a+b+c)^2 < 3(a^2+b^2+c^2) < 3\cdot 2\cdot (a+b+c)\,.$$

Бидејќи $a+b+c>0$ непосредно добиваме дека

$$a+b+c<6\,.$$

Според тоа,

$$\tfrac{(a+b+c)^3}{9} = \tfrac{(a+b+c)^2(a+b+c)}{9} < \tfrac{36(a+b+c)}{9} = 4(a+b+c)\,. \qquad (2)$$

Од друга страна, од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина

$$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$$

$$(a+b+c)^3 \ge 27abc\,.$$

Од последното неравенство и неравенстввото (2), добиваме

$$3abc < \tfrac{(a+b+c)^3}{9} < 4(a+b+c)\,,$$

што требаше и да се докаже.

12. Докажи дека, ако $a_1a_2a_3...a_n=1$, $a_i>0$, $i=1,2,3,...,n$, тогаш

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+...+\sqrt{a_n} \le a_1+a_2+a_3+...+a_n\,.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина, имаме

$$\frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+...+\sqrt{a_n}}{n} \ge \sqrt[n]{\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\sqrt{a_3}...\sqrt{a_n}} = \sqrt[n]{\sqrt{a_1a_2a_3...a_n}} = \sqrt[n]{\sqrt{1}} = 1\ ,$$

односно $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+...+\sqrt{a_n} \ge n$.

Од друга страна, според неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц имаме

$$\begin{aligned}(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+...+\sqrt{a_n})^2 &\le (1+1+1+...+1)(a_1+a_2+a_3+...+a_n)\\ &= n(a_1+a_2+a_3+...+a_n)\\ &\le (a_1+a_2+a_3+...+a_n)(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+...+\sqrt{a_n})\end{aligned}$$

Сега е јасно дека

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+...+\sqrt{a_n} \le a_1+a_2+a_3+...+a_n\,,$$

што требаше и да се докаже.

13. Нека a,b,c се позитивни реални броеви чиј збир е еднаков на 1. Докажи дека

$$\tfrac{a^2}{b}+\tfrac{b^2}{c}+\tfrac{c^2}{a} \ge 3(a^2+b^2+c^2)\,.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц имаме

$$\tfrac{a^2}{b}+\tfrac{b^2}{c}+\tfrac{c^2}{a} = \tfrac{a^4}{ba^2}+\tfrac{b^4}{cb^2}+\tfrac{c^4}{ac^2} \ge \tfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ba^2+cb^2+ac^2}\,.$$

Според тоа, доволно е да се докаже дека

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ba^2+cb^2+ac^2} \geq 3, \tag{1}$$

односно заради условот $a+b+c=1$ доволно е да се докаже неравенството

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 3(a^2b+b^2c+c^2a).$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$a(a-b)^2+b(b-c)^2+c(c-a)^2 \geq 0,$$

чија точност не е тешко да се провери, кога $a,b,c \in \mathbb{R}^+$.

Сега, од точноста на (1) имаме

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ba^2+cb^2+ac^2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{ba^2+cb^2+ac^2}(a^2+b^2+c^2) \geq 3(a^2+b^2+c^2).$$

14. Нека a,b,c се ненегативни реални броеви такви што

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}=2.$$

Докажи дека

$$ab+bc+ca \leq \frac{3}{2}.$$

Решение. Од условот на задачата имаме

$$\frac{1}{1+a^2}-1+\frac{1}{1+b^2}-1+\frac{1}{1+c^2}-1=-1.$$

$$-\frac{a^2}{1+a^2}-\frac{b^2}{1+b^2}-\frac{c^2}{1+c^2}=-1$$

$$\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{c^2}{1+c^2}=1.$$

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц имаме

$$(\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{c^2}{1+c^2})(a^2+1+b^2+1+c^2+1) \geq (a+b+c)^2$$

$$a^2+b^2+c^2+3 \geq (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

$$3 \geq 2(ab+bc+ca).$$

Според тоа,

$$ab+bc+ca \leq \frac{3}{2}.$$

15. Нека a,b,x,y и z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by} \geq \frac{3}{a+b}.$$

Решение. Десната страна на неравенството можеме да ја запишеме во облик

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by} = \frac{x^2}{ayx+bzx}+\frac{y^2}{azy+bxy}+\frac{z^2}{axz+byz} \tag{1}$$

Според неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц имаме

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{ayx+bzx}+\frac{y^2}{azy+bxy}+\frac{z^2}{axz+byz} &\geq \frac{(x+y+z)^2}{axy+ayz+azx+bxy+byz+bzx} = \frac{(x+y+z)^2}{a(xy+yz+zx)+b(xy+yz+zx)} \\ &= \frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+zx)}.\end{aligned} \tag{2}$$

Од друга страна

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\tfrac{1}{2}[2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx]$$
$$=\tfrac{1}{2}[(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)$$
$$=\tfrac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\geq 0$$

па според тоа

$$\tfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}\geq 1\,.$$

Сега,

$$\tfrac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx}=\tfrac{x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)}{xy+yz+zx}=\tfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}+2\tfrac{y+yz+zx}{xy+yz+zx}\geq 1+2=3\,,$$

од каде добиваме

$$\tfrac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+zx)}\geq\tfrac{3}{a+b} \tag{3}$$

Од (1), (2) и (3) следува точноста на бараното неравенство.

5. ЛОГАРИТАМСКИ НЕРАВЕНСТВА

1. Докажи дека $|\log_a b|+|\log_b a|\geq 2.$

Решение. Даденото неравенство следува од идентитетот $\log_a b\cdot\log_b a=1$ и неравенството меѓу средините.

2. Докажи дека $\tfrac{1}{\log_2\pi}+\tfrac{1}{\log_\pi 2}>2$.

Решение. Неравенството е еквивалентно со неравенството

$$\log_\pi 2+\tfrac{1}{\log_\pi 2}>2\,,$$

кое следува од неравенството меѓу средините.

3. Дадени се броевите $a,b,c\in(0,1)$. Докажи дека

$$\log_a^4 b+\log_b^4 c+\log_c^4 a\geq\log_a b+\log_b c+\log_c a\,.$$

Решение. За било кои реални броеви x,y и z е исполнето неравенството

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx\,. \tag{1}$$

Ако ставиме $x=\log_a^2 b$, $y=\log_b^2 c$ и $z=\log_c^2 a$, добиваме

$$\log_a^4 b+\log_b^4 c+\log_c^4 a\geq\log_a^2 b\log_b^2 c+\log_b^2 c\log_c^2 a+\log_c^2 a\log_a^2 b$$
$$=(\log_a b\cdot\log_b c)^2+(\log_b c\cdot\log_c a)^2+(\log_c a\cdot\log_a b)^2$$
$$=\log_a^2 c+\log_b^2 a+\log_c^2 b$$
$$\overset{(1)}{\geq}\log_a c\cdot\log_b a+\log_b a\cdot\log_c b+\log_c b\cdot\log_a c$$
$$=\log_b c+\log_c a+\log_a b.$$

4. Ако a,b,c се позитивни реални броеви, докажи дека

$$a^a b^b c^c \ge (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенствата

$$a\log a + b\log b + c\log c \ge \tfrac{1}{3}(a+b+c)\log abc$$

$$3(a\log a + b\log b + c\log c) \ge (a+b+c)(\log a + \log b + \log c)$$

$$(a-b)(\log a - \log b) + (a-c)(\log a - \log c) + (b-c)(\log b - \log c) \ge 0.$$

Бидејќи $x \mapsto \log x$ е строго растечка функција, $(a-b)(\log a - \log b) \ge 0,$ односно секој собирок во претходното неравенство е ненегативен, па и нивниот збир е ненегативен. Заради користените еквивалентни неравенства и почетното неравенство е точно.

5. Да се докаже неравенството

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \log_{1981} 1982 \cdot \log_{1982} 1983 < 11.$$

Решение. За произволен број $c > 0$ важи равенството

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b},$$

па за $c = 10$, за изразот A добиваме

$$A = \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} \cdot \ldots \cdot \frac{\log 1982}{\log 1981} \cdot \frac{\log 1983}{\log 1982} = \frac{\log 1983}{} = \log_{\log 2 2} 1983.$$

Нека $\log_2 1983 = x$; тогаш $2^x = 1983$. За $x = 11$ имаме $2^{11} = 2048$, па значи,

$$1983 < 2^{11}, \text{ т.е. } \log_2 1983 < 11.$$

6. Докажи го неравенството $\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 > 4,4$.

Решение. Преминувајќи во логаритам со основа 2 и користејќи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, добиваме:

$$\begin{aligned}\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 &= \frac{\log_2 5}{\log_2 4} + \frac{\log_2 6}{\log_2 5} + \frac{\log_2 7}{\log_2 6} + \frac{\log_2 8}{\log_2 7} \\ &\ge 4\sqrt[4]{\frac{\log_2 5}{\log_2 4}\frac{\log_2 6}{\log_2 5}\frac{\log_2 7}{\log_2 6}\frac{\log_2 8}{\log_2 7}} \\ &= 4\sqrt[4]{\frac{\log_2 8}{\log_2 4}} = 4\sqrt[4]{\frac{3}{2}} = 4\cdot 1,1 = 4,4.\end{aligned}$$

7. Докажи дека за секои $a,b \in (0,1)$ важи неравенството

$$\log_a \tfrac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \tfrac{2ab}{a+b} \ge 1.$$

Решение. Ако $a,b \in (0,1)$, тогаш и $ab \in (0,1)$, па $\sqrt{ab} > ab$. Користејќи го ова, и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} > ab$, односно $\frac{2ab}{a+b} < 1$. Да означиме $c = \frac{2ab}{a+b}$. Притоа $0 < c < 1$. Да претпоставиме спротивно, нека $\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} < 1$, односно $\log_a c \cdot \log_b c < 1$. Тогаш користејќи ги својствата на логаритмите се добива $\frac{1}{\log_c a} \cdot \frac{1}{\log_c b} < 1$, т.е.

$\log_c a \cdot \log_c b > 1$ (логаритмите се добро дефинирани затоа што $a,b,c \in (0,1)$). Повторно од неравенството помеѓу аритметичката и геометриската средина добиваме $\frac{\log_c a + \log_c b}{2} \geq \sqrt{\log_c a \cdot \log_c b}$. Според тоа

$$1 < \sqrt{\log_c a \cdot \log_c b} \leq \frac{\log_c a + \log_c b}{2} = \frac{1}{2}\log_c ab = \log_c \sqrt{ab} .$$

Значи $\log_c \sqrt{ab} > 1 = \log_c c$. Бидејќи $0 < c < 1$, функцијата $\log_c x$ е опаѓачка, па за аргументите важи неравенството $\sqrt{ab} < c = \frac{2ab}{a+b}$. Со квадрирање, последното неравенство го добива обликот $(a+b)^2 < 4ab$, односно $(a-b)^2 < 0$, што е невозможно. Според тоа, $\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 1$.

8. За која вредност на природниот број n функцијата $f(n) = \frac{\log 2 \log 3 ... \log n}{10^n}$ прима најмала вредност?

Решение. Да забележиме дека f може да се запише во облик

$$f(n) = \frac{\log n}{10} \cdot \frac{\log 2 \log 3 ... \log(n-1)}{10^{n-1}} = \frac{\log n}{10} f(n-1)$$

Од последното равенство гледаме дека се точни следние импликации:

$$\log n < 10 \Rightarrow f(n) > f(n-1) ,$$

$$f(n) = 10 \Rightarrow f(n) = f(n-1) \text{ и } \log n > 10 \Rightarrow f(n) < f(n-1) .$$

Од нив заклучуваме дека функцијата опаѓа за $n < 10^{10}$, а расте за $n > 10^{10}$. Ако $n = 10^{10}$ тогаш $f(n) = f(n-1)$. Затоа, за $n = 10^{10}$ и $n = 10^{10} - 1$ функцијата има најмала вредност.

9. Докажи дека за секој $n \geq 2$ е исполнето неравенството

$$\log_n 2 \cdot \log_n 4 \cdot ... \cdot \log_n (2n-2) \leq 1 .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина и од особините на логаритамската функција следуваат неравенствата

$$\begin{aligned} \sqrt{\log_n k \cdot \log_n (2n-k)} &\leq \tfrac{1}{2}[\log_n k + \log_n (2n-k)] \\ &= \tfrac{1}{2}\log_n k(2n-k) \leq \tfrac{1}{2}\log_n \left(\tfrac{k+2n-k}{2}\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\log_n n^2 = 1. \end{aligned}$$

за $k = 1, 2, ..., n$. Според тоа, производите на паровите, еднакво оддалечени од краевите на изразот

$$A = \log_n 2 \cdot \log_n 4 \cdot ... \cdot \log_n (2n-2)$$

не надминуваат единица, па значи $A \leq 1$, за $n = 2k+1$. Но, $A \leq 1$ и за $n = 2k$, бидејќи $\log_n (2n-n) = \log_n n = 1$.

10. Определи ги решенијата на неравенката

$$\frac{1}{4}\log_a x + \frac{1}{7}\log_{a^4} x + \frac{1}{10}\log_{a^7} x + ... + \frac{1}{3n+1}\log_{a^{3n-2}} x \geq 1.$$

Решение. Заради равенството

$$\log_{a^k} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^k} = \frac{\log_a x}{k\log_a a} = \frac{\log_a x}{k},$$

за $k = 1,2,3,...,n$, добиваме

$$\frac{1}{4}\log_a x + \frac{1}{7}\frac{\log_a x}{4} + \frac{1}{10}\frac{\log_a x}{7} + ... + \frac{1}{3n+1}\frac{\log_a x}{3n-2} \geq 1$$

$$\log_a x(\tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{7}) + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{10}) + ... + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3n-2}-\tfrac{1}{3n+1})) \geq 1$$

$$\tfrac{1}{3}(\log_a x)(1-\tfrac{1}{3n+1}) \geq 1$$

$$\frac{1}{3}\frac{3n}{3n+1}\log_a x \geq 1$$

$$\log_a x \geq \frac{3n+1}{n}$$

Во зависност од параметарот a ги имаме следните два случаи.

Случај 1. $a > 1$. Бидејќи $\log_a x$ е монотоно растечка $x \geq a^{\frac{3n+1}{n}} = \sqrt[n]{a^{3n+1}}$. Значи, во овој случај решенија се $x \in [a^3\sqrt[n]{a}, +\infty)$

Случај 2. $0 < a < 1$. Бидејќи $\log_a x$ е монотоно опаѓачка функција, имаме $0 < x \leq \sqrt[n]{a^{3n+1}}$.Значи, во овој случај решенија се $x \in (0, a^3\sqrt[n]{a})$.

11. Нека a,b,c се позитивни реални броеви поголеми од 1. Докажи дека за секој реален број r е исполнето

$$(\log_a bc)^r + (\log_b ac)^r + (\log_c ab)^r \geq 3\cdot 2^r.$$

Решение. Левата страна на неравенството ќе ја означиме со S. Тогаш

$$\frac{S}{3} \geq \sqrt[3]{(\log_a bc)^r(\log_b ac)^r(\log_c ab)^r}$$

$$= [(\log_a b + \log_a c)(\log_b a + \log_b c)(\log_c a + \log_c b)]^{\frac{r}{3}}$$

$$\geq (2\sqrt{\log_a b\cdot\log_a c}\cdot 2\sqrt{\log_b a\cdot\log_b c}\cdot 2\sqrt{\log_c a\cdot\log_c b})^{\frac{r}{3}}$$

$$= 2^r(\log_a b\cdot\log_b a\cdot\log_b c\cdot\log_c b\cdot\log_c a\cdot\log_a c)^{\frac{r}{6}} = 2^r(1\cdot 1\cdot 1)^{\frac{r}{6}} = 2^r$$

Оттука следува $S \geq 3\cdot 2^r$.

Да забележиме дека двапати последователно го применуваме неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина.

12. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ е исполнето неравенството

$$\sum_{k=2}^{n}[\log_{\frac{3}{2}}(k^3+1) - \log_{\frac{3}{2}}(k^3-1)] < 1.$$

Решение. Од особините на логаритми имаме

$$\sum_{k=2}^{n}[\log_{\frac{3}{2}}(k^3+1) - \log_{\frac{3}{2}}(k^3-1)] = \sum_{k=2}^{n}\log_{\frac{3}{2}}\frac{k^3+1}{k^3-1} = \log_{\frac{3}{2}}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3+1}{k^3-1}$$

$$= \log_{\frac{3}{2}}\prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)(k^2+k+1)}{(k-1)(k^2-k+1)} = \log_{\frac{3}{2}}\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k-1}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

Да забележиме дека

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k-1} = \frac{n(n+1)}{1\cdot 2},$$

а заради равенството

$$(k-1)^2 + (k-1) + 1 = k^2 - k + 1, \ k \in \mathbb{N}$$

имаме

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \frac{3}{n^2+n+1}.$$

Сега,

$$\sum_{k=2}^{n} [\log_{\frac{3}{2}}(k^3+1) - \log_{\frac{3}{2}}(k^3-1)] = \log_{\frac{3}{2}} \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k-1} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

$$= \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{n(n+1)}{1\cdot 2} \cdot \frac{3}{n^2+n+1}\right) = \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{n^2+n}{n^2+n+1}\right) < \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} = 1$$

6. ТРИГОНОМЕТРИСКИ НЕРАВЕНСТВА

1. Ако $x \neq \frac{k\pi}{2}$, докажи дека $\text{tg}^4 x + \text{ctg}^4 x \geq 2.$

Решение. Непосредно следува од неравенството меѓу средините. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

2. Докажи дека равенката $2\sin^2(\frac{x}{2})\sin^2(\frac{x}{6}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ нема решенија.

Решение. Левата страна на равенката е помала или еднаква на 2, а десната страна (според претходните задачи) е поголема или еднаква на 2. Според тоа, решение постои ако

$$|\sin(\tfrac{x}{2})||\sin(\tfrac{x}{6})| = 1.$$

Лесно се проверува дека тоа не е можно. (Двата множители на левата страна не може да се еднакви на 1 во исто време).

3. Ако за реалните броеви a, b, x, y важи $a^2 + b^2 = 1, x^2 + y^2 = 1,$ докажи дека $ax + by \leq 1.$

Решение. Од дадените услови заклучуваме дека постојат еднозначни броеви α и β такви што $a = \sin\alpha, \ b = \cos\alpha; \ x = \sin\beta, \ y = \cos\beta.$ Оттука

$$ax + by = \sin\alpha \cdot \sin\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha - \beta) \leq 1.$$

4. Без употреба на логаритамски таблици, докажи дека $\text{tg}11^\circ < 0,2$.

Решение. Нека $\text{tg}\alpha = 0,2$. Тогаш

$$\text{tg}2\alpha = \frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha} = \frac{5}{12}, \ \text{tg}4\alpha = \frac{2\text{tg}2\alpha}{1-\text{tg}^2 2\alpha} = \frac{120}{119} \ \Rightarrow \ \text{tg}4\alpha > 1 = \text{tg}45^\circ,$$

Функцијата тангенс е растечка на $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, па следува $4\alpha > 45^\circ$, т.е. $\alpha > 11^\circ$. Значи, $\mathrm{tg}11^\circ < \mathrm{tg}\alpha = 0,2$.

5. Да се докаже дека еден триаголник е остроаголен ако и само ако за аглите α, β и γ на триаголникот се исполнети неравенствата

$$\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta > 1,$$
$$\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma > 1,$$
$$\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\gamma > 1\ .$$

Решение. Нека претпоставиме дека триаголникот ABC е остроаголен, т.е. дека $\alpha < 90^\circ$, $\beta < 90^\circ$ и $\gamma < 90^\circ$. Тогаш $\cos\gamma > 0$, па

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(180^\circ - \gamma) = -\cos\gamma < 0,$$

т.е. $\cos\alpha\cos\beta < \sin\alpha\sin\beta$, од каде што поради $\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$, добиваме дека $\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta > 1$.

Обратно, да претпоставиме дека $\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta > 1$. Ќе докажеме дека $\gamma < \frac{\pi}{2}$. Од $\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta > 1$ следува дека $\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta > 0$, т.е. $\mathrm{tg}\alpha > 0$ и $\mathrm{tg}\beta > 0$ (еден триаголник не може да има два тапи агли). Значи, $\alpha < 90^\circ$ и $\beta < 90^\circ$, т.е. $\cos\alpha > 0$ и $\cos\beta > 0$. Според тоа, неравенството $\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta > 1$ можеме да го напишеме во обликот $\sin\alpha\sin\beta > \cos\alpha\cos\beta$, т.е. $\cos(\alpha+\beta) < 0$, па $\cos\gamma > 0$. Следствено, $\gamma < 90^\circ$.

6. Нека $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ и нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е функција зададена со

$$f(x) = 1 + a\cos x + b\sin x + c\cos 2x + d\sin 2x\ .$$

Докажете дека, ако за секој $x\in\mathbb{R}$ важи $f(x) > 0$, тогаш за секој $x\in\mathbb{R}$ важи и $f(x) < 3$.

Решение. Ако ги искористиме равенствата

$$\cos x + \cos(x+\tfrac{2\pi}{3}) + \cos(x-\tfrac{2\pi}{3}) = 0$$
$$\cos 2x + \cos 2(x+\tfrac{2\pi}{3}) + \cos 2(x-\tfrac{2\pi}{3}) = 0$$
$$\sin x + \sin(x+\tfrac{2\pi}{3}) + \sin(x-\tfrac{2\pi}{3}) = 0$$
$$\sin 2x + \sin 2(x+\tfrac{2\pi}{3}) + \sin 2(x-\tfrac{2\pi}{3}) = 0$$

добиваме $f(x) + f(x+\frac{2\pi}{3}) + f(x-\frac{2\pi}{3}) = 3$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Но бидејќи $f(y) > 0$ за секој $y\in\mathbb{R}$, следува дека $f(x) < 3$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

7. Ако $0 < \alpha < \beta < \gamma < \frac{\pi}{2}$, докажи дека

$$\mathrm{tg}\alpha < \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma} < \mathrm{tg}\gamma\ .$$

Решение. Функцијата $\sin x$ е растечка на интервалот $(0,\frac{\pi}{2})$, па следува $\sin\alpha < \sin\beta < \sin\gamma$.

Функцијата $\cos x$ е опаѓачка на интервалот $(0, \frac{\pi}{2})$, па следува $\cos\alpha > \cos\beta > \cos\gamma$.

Добиваме:

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma} > \frac{3\sin\alpha}{3\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha, \qquad \frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma} < \frac{3\sin\gamma}{3\cos\gamma} = \mathrm{tg}\,\gamma$$

Значи

$$\mathrm{tg}\,\alpha < \frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma} < \mathrm{tg}\,\gamma .$$

8. Нека $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Докажи го неравенството

$$(1+\frac{1}{\sin x})\,(1+\frac{1}{\cos x}) \geq 3+2\sqrt{2} .$$

Решение. Имаме

$$(1+\frac{1}{\sin x})\,(1+\frac{1}{\cos x}) = 1+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x\cos x} = 1+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{2}{\sin 2x} .$$

За кои било ненегативни реални броеви a и b важи $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, па ставајќи $a=\frac{1}{\sin x}$, $b=\frac{1}{\cos x}$, (бидејќи $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\sin x$ и $\cos x$ се позитивни) добиваме

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin x\cos x}} = 2\sqrt{\frac{2}{\sin 2x}} .$$

Бидејќи $0 < x < \frac{\pi}{2}$, следува $0 < 2x < \pi$, па $\sin 2x > 0$ и $\frac{1}{\sin 2x} \geq 1$. Конечно добиваме

$$(1+\frac{1}{\sin x})\,(1+\frac{1}{\cos x}) = 1+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{2}{\sin 2x} \geq 1+2\sqrt{\frac{2}{\sin 2x}}+\frac{2}{\sin 2x}$$
$$\geq 1+2\sqrt{2}+2 = 3+2\sqrt{2}.$$

9. За произволни α, β и γ барем еден од броевите $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin\beta\cos\gamma$, $\sin\gamma\cos\alpha$ не е поголем од $\frac{1}{2}$. Докажи!

Решение. Да го претпоставиме спротивно, т.е. дека секој од овие производи е поголем од $\frac{1}{2}$. Тогаш

$$\sin\alpha\cos\beta\cdot\sin\beta\cos\gamma\cdot\sin\gamma\cos\alpha > \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$
$$2\sin\alpha\cos\beta\cdot 2\sin\beta\cos\gamma\cdot 2\sin\gamma\cos\alpha > \frac{1}{8}\cdot 8,$$
$$\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma > 1,$$

што не е можно, бидејќи $\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma \leq 1$.

10. Докажи го неравенството $|\sin x| + |\cos x| \geq 1$.

Решение. Ако на основната тригонометриска релација додадеме од двете стани $2|\sin x|\cdot|\cos x|$ добиваме

$$\sin^2 x + 2|\sin x|\cdot|\cos x| + \cos^2 x = 1 + 2|\sin x|\cdot|\cos x|$$

$$(|\sin x| + |\cos x|)^2 = 1 + 2|\sin x|\cdot|\cos x| \geq 1$$

Бидејќи

$$|\sin x|+|\cos x|\geq 0,$$

од неравенството

$$(|\sin x|+|\cos x|)^2 \geq 1,$$

кое е исполнето за секој реален број x, добиваме

$$|\sin x|+|\cos x|\geq 1.$$

11. Докажи дека ако $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$, се такви што

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n \in (0°,180°),$$

каде n е природен број поголем од 1, тогаш

$$\sin(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n) < \sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\dots+\sin\alpha_n .$$

Решение. Неравенството ќе го покажеме со помош на математичка индукција. Неравенството е точно за $n=2$. Навистина, имајќи во предвид дека α_1, α_2 припаѓаат во интервалот $(0°,180°)$, тогаш

$$\sin(\alpha_1+\alpha_2)=\sin\alpha_1\cos\alpha_2+\sin\alpha_2\cos\alpha_1<\sin\alpha_1+\sin\alpha_2 .$$

Претпоставуваме дека неравенството е точно за $n=k$, односно за $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k \in (0°,180°)$ важи

$$\sin(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k) < \sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\dots+\sin\alpha_k .$$

За $n=k+1$ се добива дека

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k+\alpha_{k+1}) &= \sin((\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k)+\alpha_{k+1})\\ &= \sin(\alpha_1+\dots+\alpha_k)\cos\alpha_{k+1}+\cos(\alpha_1+\dots+\alpha_k)\sin\alpha_{k+1}\\ &< \sin(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k)+\sin\alpha_{k+1}\\ &< \sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\dots+\sin\alpha_k+\sin\alpha_{k+1}\end{aligned}$$

од каде согласно принципот на математичка индукција следува точноста на неравенството за секој природен број поголем од 1.

12. Нека $0<x,y<\frac{\pi}{2}$. Докажи дека $x\cos x+y\cos y\leq x\cos y+y\cos x$.

Решение. Неравенството можеме да го запишеме во облик

$$x\cos x+y\cos y-x\cos y-y\cos x\leq 0 .$$

Изразот од левата страна на последното равенство ќе го запишеме во облик

$$\begin{aligned}x\cos x+y\cos y-x\cos y-y\cos x &= x\cos x-x\cos y+y\cos y-y\cos x\\ &= x(\cos x-\cos y)-y(\cos x-\cos y)\\ &= (x-y)(\cos x-\cos y)\end{aligned}$$

Значи, неравенството можеме да го запишеме во облик

$$(x-y)(\cos x-\cos y)\leq 0 . \qquad (1)$$

Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. Ако $x\leq y$, тогаш од тоа што функцијата $f(t)=\cos t$ на интервалот $(0,\frac{\pi}{2})$ опаѓа, имаме $\cos x\geq\cos y$. Според тоа, во овој случај

$$x-y\leq 0 \text{ и } \cos x-\cos y\geq 0$$

од каде следува дека (1) е точно, а со тоа и почетното неравенство.

Случај 2. Ако $x \geq y$, тогаш од тоа што функцијата $f(t) = \cos t$ на интервалот $(0, \frac{\pi}{2})$ опаѓа, имаме $\cos x \leq \cos y$. Според тоа, во овој случај

$$x - y \geq 0 \text{ и } \cos x \leq \cos y$$

од каде следува дека (1) е точно, а со тоа и почетното неравенство.

13. Докажи дека во секој нетапоаголен триаголник ABC е исполнето неравенството

$$\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} > 2.$$

Решение. Доволно е да се докаже точноста на равенството

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

каде α, β, γ се агли во триаголник. Бидејќи триаголникот не е тапоаголен, имаме $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогаш

$$0 < \sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma \leq 1$$

(можен е случај некој од аглите да е прав). Сега,

$$\sin\alpha \geq \sin^4\alpha$$

$$\sin\beta \geq \sin^4\beta$$

$$\sin\gamma \geq \sin^4\gamma$$

при што најмногу едно од неравенствата може да е равенство.Од последните неравенства добиваме

$$\sqrt{\sin\alpha} \geq \sqrt{\sin^4\alpha} = \sin^2\alpha$$

$$\sqrt{\sin\beta} \geq \sqrt{\sin^4\beta} = \sin^2\beta \quad ,$$

$$\sqrt{\sin\gamma} \geq \sqrt{\sin^4\gamma} = \sin^2\gamma$$

и ако ги собереме добиваме

$$\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt{\sin\beta} + \sqrt{\sin\gamma} > \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \geq 2,$$

Последното неравенство е точно, бидејќи од условот на задачата

$$0 \leq \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma < 1,$$

како агли во нетапоаголен триаголник.

14. Докажи дека $|\sin x| + |\sin y| + |\cos(x+y)| \geq 1$,

за секои $x, y \in \mathbb{R}$.

Решение. Од особините на функцијата $\cos$ имаме

$$|\sin x| \geq |\sin x \cos y| \text{ и } |\sin y| \geq |\cos x \sin y|$$

Сега, од особините на функцијата $|\bullet|$, имаме

$$\begin{aligned} |\sin x| + |\sin y| + |\cos(x+y)| &\geq |\sin x \cos y| + |\sin y \cos x| + |\cos(x+y)| \geq \\ &\geq |\sin x \cos y + \cos x \sin y| + |\cos(x+y)| = \\ &\geq |\sin(x+y)| + |\cos(x+y)| \\ &\geq \sin^2(x+y) + \cos^2(x+y) = 1. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Aczél, J., Dhombres, J.: Functional Equations Containing Several Variables. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1985
2. Aczél, J.: Lectures on Functional Equations and Their Applications, New York, Birkhäuser, 1966
3. Alexanderson, G. L., Klosinski, L. F., Larson, L. C.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1938–1964. Mathematical Association of America,Washington, DC, 1985
4. Alfonsin, J. L. R.: The Diophantine Frobenius Problem, Oxford Lecture Series, 2005
5. Amini, A. R.: Fibonacci Numbers a Long Division Formula, Mathematical Spectrum, Vol. 40, Number 2, 2007/08
6. Anderson, J. A.: Diskretna matematika sa kombinatorikom, CET, Beograd, 2005
7. Andreescu, T., Andrica, D., Feng, Z.: 104 Number Theory Problems: From the Training of the USA IMO Team, Birkhauser, 2007
8. Andreescu, T., Andrica, D.: Complex Numbers from A to ...Z, Birkhauser, 2006
9. Andreescu, T., Andrica, D.: Number Theory – Structures, Examples and Problems, Birkhauser, 2009
10. Andreescu, T., Feng, Z.: USA and International Mathematical Ulympiads 2003, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
11. Andreescu, T., Gelea, R.: Mathematical Olympiad Challenges, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2000
12. Archibald, R. G.: An Introduction to the Theory of Numbers, Merrill, Publishing and Co., Columbia, OH, 1970.
13. Arslanagić, Š., Zejnulahi, F., Govedarica, V.: Zbirka zadataka sa republičkih takmičenja u Bosni i Hercegovini 1981-1991, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004
14. Arslanagić, Š.: Matematička čitanka 9, Grafičar promet, Sarajevo, 2017
15. Arslanagić, Š.: Matematika za nadarene (drugo izdanje), Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
16. Ašić, M. i dr.: Međunarodne matematičke olimpijade, DM Srbije, Beograd, 1986
17. Ašić, M. i dr.: Republička i savezna takmičenja srednjoškolaca (1970-1983), DMS, Beograd, 1984
18. Batchedder P. M.: An Introduction to linear difference equations, Dover Publications, 1967
19. Becheanu, M., Enescu, B.: Inegalitati elementare. Bucurest: Gil., 2002
20. Beklekamp, E. , Rodgers, T.: Math Puzzles, Springer-Verlag, New York, Inc., 1992
21. Benjamin, A. T., Quinn, J. J.: Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof, MAA, 2003
22. Bilinski, S.: Problem parketiranja, Matematičko-fizičko list, 196, Zagreb, 1999
23. Bottema, O. and oth.: Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969
24. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006, GIL Publishing House, Zalău, 2007
25. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2006-2008, GIL Publishing House, Zalău, 2009
26. Burton, D. M.: Elementary Number Theory, Wm. C. Brown, Dubuque, Iowa, 1994
27. Cerone, P.; Dragomir, S. S.: Mathematical Inequalities, CRC Press, London – New York, 2011
28. Cîrtoaje, V.: Algebraic Inequalities, GIL Publishing house, Zalau, 2006
29. Cull P., Elahive M., Robson R.: Difference equations: From rabbits to chaos, Springer, 2005
30. Cvetkovski, Z.: Inequalities, Springer, Heidelberg – Dordrecht – London – New York, 2012
31. Djukić,. D., Janković, V., Matić, I., Petrović, N.: The IMO Compendium, Springer, 2011
32. Đurković, R.: Matematička takmičenja srednjoškolaca u Jugoslaviji 1990, DMS, Beograd, 1991
33. Dye R. H.; Nickakalls R.W. D.: A new algorithm for generating Pythagorean triples, Mathematical Gazette; 1998
34. Engel, A.: Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1997
35. Feng, Z., Zhao, Y.: USA and International Mathematical Ulympiads 2006-2007, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
36. Gleason, A. M.; Greenwood, R. E.; Kelly, L. M.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1965–1984. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1984
37. Govedarica, V.: Matematička takmičenja u Republici Srpskoj, ZUNS, Sarajevo, 2007
38. Graham R.L, Knuth D.E., Patashnik O.: Concrete Mathematics: A foundation for computer science, Second edition, Addison-Wesley Professional, 1994
39. Green D. H., Knuth D.E.: Homogeneous equations, Mathematics for the analysis of algorithms, Birkhäuser, 1982
40. Grozdev, S., Kolev, E., Mushkarov, O., Nikolov, N. Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002

41. Grozdev, S.: For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). Sofia: ADE, 2007
42. Hatch G.: Pythagorean triples and triangular square numbers, Mathematical Gazette; 1995
43. Herman, J.; Kučera, R.; Šimša, J.: Equations and Inequalities, Springer – Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 2000
44. Hung, P. K.: Secrets in Inequalities, GIL Publishing Hause, Zalau, 2007
45. Kadelburg, Z., Mladenović, P.: Savezna takmičenja iz matematike, DMS, Beograd, 1990
46. Kuczma, M. E., Mientka, W. E.: Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition, The Academic Distribution Center, Freeland, Maryland, 1994
47. Kuczma, M., Choczewski, B., Ger, R.: Iterative Functional Equations. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1990
48. Landau, E.: Elementary number theory, Chelsea Publishing Company, New York, 1966
49. Lee, H.: Topics in Inequalities - Theorems and Techniques, 2007
50. Lozansky, E. , Rouseau, C.. Winning solutions, Springer-Verlag, Inc., New York, 1996
51. Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G., Delgado, R. V.: Inequalities, Birkhäuser, Basel – Boston – Berlin, 2000
52. Mićić, V., Kadelburg, Z.: Uvod u teoriji brojeva, DMS, Beograd, 1989
53. Mitrinović, D. S., Barnes, E. S., Marsh, D. C. B., Radok, J. R. M.: Elementary Inequalities, P. Noordhoff, Groningen, 1964
54. Mitrinović, D. S.: Analytic Inequalities, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970
55. Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazarević, N.: Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazija, Krug, Beograd, 1998
56. Mladenović, P.; Ognjanović, S.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike srednjoh škola, DMS, Beograd, 1991
57. Nardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya, G.: Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1951
58. Nathanson, M. B.: Elementary Methods in Number Theory, Springer, 1993
59. Nesbitt, A. M.: Problem 15114, Educational Times, 3, 1903
60. Neville, R. Beginning: Number Theory, 2nd ed. Sudbury, Mass.: Jones and Bartlett, 2006.
61. Niven, I., Zuckerman, H. S.: An introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc., New Yor, 1980
62. Palman, D.: Planimetrija, Element, Zagreb, 1998
63. Pavković, B., Dakić, B., Hajnš, Ž., Mladinić, P.: Male teme iz matematike, Hrvatsko matematičko društvo, Knjiga 2., Element, Zagreb, 1994
64. Pavković, B., Veljan, D.: Elementarna matematika I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
65. Pavković-Veljan, Elementarna Matematika 2, Školska kniga, Zagreb, 1995
66. Pavković-Veljan: Elementarna matematika 1, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
67. Pečarić, J. E.: Nejednakosti, Element, Zagreb, 1996
68. Riordan, J.: Combinatorial Identities, John Willey & Sons, 1968
69. Sierpinski, W.: Elementary theory of numbers, PWN, Warszawa, 1964
70. Small, C. G.: Functional Equations and How to Solve Them, Springer, New York, 2007
71. Specht, E.: Geometria-Scientiae Atlantis, Magdeburg, 2001
72. Stark, H. M.: An introduction to Number Theory, Markh. Publis. Comp., Chicago, 1970
73. Stevanović, D., Milošević, M., Baltić, V. Diskretna matematika, DMS, Beograd, 2004
74. Tripathi, A.: The Coin Exchange Problem for Arithmetic Progressions, American Mathematical Monthly,1994
75. Veljan, D.: An Analogue of the Pythagorean Theorem, El. Math. 51 (1996)
76. Vo Quoc B.: On a class of three-variable Inequalities, 2007
77. Volenc, V.: Analitička geometrija u kompleksnim koordinatima I, II, III, Matematičko-fizički list, 186, 187,188, Zagreb, 1996/97
78. Vrećica, S.: Konveksna analiza, BS Procesor, Matematički fakultet, Beograd, 1993
79. Wells, D.: Prime numbers. The most mysterious figures in Math, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005
80. Wilf, H. S.: A Circle-of-lights Algorithm for the Money-changing Problem , American Mathematical Monthly, 1978
81. Xiong, B., Lee Peng, Y.: Mathematical Olympiad in China – Problems and Solutions, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltgt., Singapore , 2007
82. Алексиев, К., Бангачев, К., Бойваленков, П.: 640 задачи или Теория на числата за олимпиади, УНИМАТ СМБ, София, 2017
83. Аневска, К.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје

84. Арноль, И. В.: Теория чиесл, Учиедгиз, Москва, 1939
85. Арсеновић, М.; Драговић, В.: Функционалне једначине, ДМС, Београд, 1999
86. Арсланагиќ, Ш. За подобрувањето на неравенствата, Сигма, Скопје
87. Арсланагиќ, Ш., Зејнулаху, Ф.: Две условни алгебарски неравенства, Сигма, Скопје
88. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ , А.: Повеќе докази на едно познато геометриско неравенство, Сигма, Скопје
89. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Повеќе решенија на една геометриска задача, Сигма, Скопје
90. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
91. Арсланагиќ, Ш.: Едно неравенство во врска со симетралата на внатрешен агол нма триаголник, Сигма, Скопје
92. Арсланагиќ, Ш.: Неравенства со факториели, Сигма, Скопје
93. Арсланагиќ, Ш.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје
94. Арсланагиќ, Ш.: Несбитовото неравенство и едно негово подобрување, Сигма, Скопје
95. Арсланагиќ, Ш.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
96. Арсланагиќ, Ш.: Подобрување на едно алгебарско неравенство, Сигма, Скопје
97. Арсланагиќ,Ш., Муминагиќ, А.: Едно интересно равенство за триаголник и негови последици, Сигма, Скопје
98. Баралић, Ђ.: 300 припремних задатака за Јуниорске математичке олимпијаде (искуство Србије), Klett, Београд, 2016
99. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Балкански олимпиади по математика 1984-2006, УНИМАТ СМБ, София, 2007
100. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
101. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
102. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
103. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2009, УНИМАТ СМБ, София, 2010
104. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2010, УНИМАТ СМБ, София, 2011
105. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
106. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2012, УНИМАТ СМБ, София, 2013
107. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2013, УНИМАТ СМБ, София, 2014
108. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2014, УНИМАТ СМБ, София, 2015
109. Бойваленков, П., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
110. Брсаковска, С., Малчески, С.: Некои последици на Питагоровата теорема, Нумерус, Скопје, 2019
111. Василевска, В.: Степен на точка во однос на кружница, Сигма, Скопје
112. Велинов, Д. Полиномни равенки, Сигма, Скопје
113. Велинов, Д.: Некои методи за решавање на Диофантови равенки, Сигма, Скопје, 2018
114. Велинов, Д.: Рекурентни релации, Сигма, Скопје
115. Виноградов, И. М.: Основы теории чисел, Наука, Москва, 1972
116. Гаврилов, М, Давидов, Л.: Делимост на числата, Народна просвета, София, 1976
117. Гарднер, М.: Математически развлечения. Том 2. София, Наука и изкуство, 1977
118. Главче, М.: Повеќе начини за решавање на иста задача, Сигма, Скопје
119. Гроздев, С., Лесов, Х.: Квадратни параметарски неравенки, Сигма, Скопје
120. Гроздев, С., Ненков, В.: Магични квадрати, Сигма, Скопје
121. Гроздев, С., Стефанова, Д., Иванов, И.: Планиметрични задачи за триъгълник с тригонометрични функции, Светлина, София, 2016
122. Гроздев, С.: Минимален прост делител, Сигма, Скопје
123. Гроздев, С.: Примена на едно обопштување на теоремата на Птоломеј, Сигма, Скопје
124. Гуревич, Е.: Тайна древнего талисмана. Москва, Наука, 1969
125. Давидов, Љ.: Генераторни функции, Сигма, Скопје

126. Давидов, Љ.: Принципот на Дирихле и некои комбинаторни проблеми, Сигма, Скопје
127. Давидов, Љ.: Функционални уравнения, Народна Просвета, София, 1977
128. Давыдов, У. С.: Задачи и упражниния по теоретической арифметике целых чисел, ГУНИМИ БССР, Минска, 1963
129. Димитров, С., Личев, Л., Чобанов, С.: 555 задачи по геометрия (решения по Геометрия в картинки на А. В. Акопян), УНИМАТ СМБ, 2015
130. Димовски, Д., Малчески, Р., Тренчевски, К., Шуниќ, З.: Натпревари по математика '94, СММ, Скопје, 1995
131. Димовски, Д., Тренчевски, К., Малчески, Р., Јосифовски, Б.: Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје, 1993
132. Димовски, И.: Врска меѓу биномните коефициенти и пермутациите со повторување, Сигма, Скопје
133. Димовски, И.: Неограниученост на низата совршени и низата прости броеви, Сигма, Скопје
134. Димовски, И.: Теорема на Дезарг, Сигма, Скопје
135. Дирихле, П. Г. Л.: Лекции по теория на числата, Наука и изкуство, София, 1980
136. Докоска, М.: Некои карактеристични неравенства во врска со триаголник, Сигма, Скопје
137. Дуденков, С., Чакърян, К.: Задачи по теория на числата, Регалия 6, София, 1999
138. Ђукић, Д.: Задаци о скуповима, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
139. Ђукић, Д.: Задаци са распоредима бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
140. Ђукић, Д.: Инваријанте, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
141. Ђукић, Д.: Инверзија, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
142. Ђукић, Д.: Комбинаторна геометрија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
143. Ђукић, Д.: Комбинаторна теорија бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
144. Ђукић, Д.: Математичке игре погађања, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
145. Ђукић, Д.: Микелова тачка и Симсонова права, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
146. Ђукић, Д.: Партиције природног броја, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
147. Ђукић, Д.: Паскалова теорема, пол и полара, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
148. Ђукић, Д.: Полиноми по једној променљивој, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
149. Ђукић, Д.: Полиномске једначине, Београд, 2006 (www.imo.org.yu/sc)
150. Ђукић, Д.: Потенција тачке, Београд, 2012 (www.imo.org.yu/sc)
151. Ђукић, Д.: Холова теорема, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
152. Ђукић, Д.: Хомотетија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
153. Ерусалимский, Я. М.: Дискретная математика, Везувская книга, Москва, 2004
154. Избраные задачи из журнала American Mathematical monthly, Мир, Москва, 1977
155. Јанев, И.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
156. Јанев, И.: Варијации на иста тема, Сигма, Скопје
157. Јанев, И.: Метод на неодредени коефициенти, Сигма, Скопје
158. Јанковић, З., Каделбург, З., Младеновић, П. Међународне и балканске математичке олимпијаде 1984-1995, ДМС, Београд, 1995
159. Јегоров, А.: Логаритамски равенки, Сигма, Скопје
160. Каделбург, З.; Ђукић, Д.; Лукић, М.; Матић, И.: Неједнакости, ДМС, Београд, 2003
161. Карамата, Ј.: Комплексан број, са применом на елементарну геометрију, Научна књига, Београд, 1950
162. Карамата, Ј.: Комплексан број, са применом на елементарну геометрију, Научна књига, Београд, 1950
163. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Адициони теореми, Сигма, Скопје
164. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Паскаловиот триаголник и бројот е, Сигма, Скопје
165. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Геометриски решенија на некои задачи поврзани со аркустангенсите, Сигма, Скопје
166. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Геометрски докази на некои тригонометриски равенства, Сигма, Скопје
167. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Суперзлатен четириаголник, Сигма, Скопје
168. Карстенсен, Ј., Муминагиуђ, А.: Фибоначиеви броеви и полиноми со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје
169. Кендеров, П., Табов, Й.: Български олимпиади по математика, Народна просвета, София, 1990
170. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011 године, ДМ Србије, 2012
171. Кудреватов, Г. А.: Сборник задач по теории чисел, Просвещение, Москва, 1970

172. Кючуков, М.; Недевски, П.: Функционални и диференциални уравнения, Проф. Марин Дринов, София, 1995
173. Лидский В. Б. и др.: Задачи по элементарной математике, Москва, 1962
174. Лихтарников, Л. М.: Элементарное введение в функциональные уравнения, Лань, Санкт-Петербург, 1997
175. Лукић, М.: Инверзија, Београд, 2005 (www.imo.org.yu/sc)
176. Мадески, Ж.; Самарџиски, А.; Целакоски, Н.: Збирка задачи по геометрија, Просветно дело, Скопје, 1981
177. Макарова, Н.: Волшебный мир магических квадратов. Саратов, 2009
178. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни I, Сигма, Скопје
179. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни II, Сигма, Скопје
180. Малчески, А. Манова-Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсаковска. С.: Сигмина ризница (конкурсни здачи 1-192), СММ, Скопје, 2012
181. Малчески, А.: Регресивна индукција, Сигма, Скопје
182. Малчески, А., Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика во средното образование во учебната 1998/99 година, СММ, Скопје, 2000
183. Малчески, А., Малчески, Р.: Разбивање на броеви, Математика$^+$, Софија, 1997
184. Малчески, А., Малчески, Р.: Теорема на Чева, Сигма, Скопје, 2018
185. Малчески, А., Малчески, С.: Теорема на Птоломеј, Сигма, Скопје
186. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсакоска, С.: Сигмина ризница (рубрика подготвителни задачи), СММ, Скопје, 2012
187. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 506-1005), СММ, Скопје, 2011
188. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1006-1200), СММ, Скопје, 2012
189. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 1, Сигма, Скопје
190. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 2, Сигма, Скопје
191. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 3, Сигма, Скопје
192. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 4, Сигма, Скопје
193. Малчески, Р., Аневска, К.: Теорема на Стјуарт, Сигма, Скопје, 2018
194. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Атанасов, Р., Манова – Ераковиќ, В., Јанев, И.: Меѓународни математички олимпијади, СММ, Скопје, 2000
195. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '96, СММ, Скопје, 1997
196. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '95, СММ, Скопје, 1996
197. Малчески, Р., Докоска, М.: Математика 2, Просветно дело, Скопје, 2002
198. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 1 – алгебарски структури (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
199. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 2 – векторска и линеарна алгебра (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
200. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 3 – калкулус 1 (трето изадние), ФОН универзитет, Скопје, 2011
201. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 4 – калкулус 2 (трето издание), ФОН универзитет, Скопје, 2011
202. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 5 – дискретна математика (второ издание), ФОН универзитет , Скопје, 2011
203. Малчески, Р., Малчески, А. Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1994
204. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Вовед во елементарна теорија на броеви, СММ, Скопје, 2015
205. Малчески, Р., Малчески, А.: Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1993
206. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви I, Сигма, Скопје, 2000
207. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви II, Сигма, Скопје, 2000
208. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви III, Сигма, Скопје, 2001
209. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви IV, Сигма, Скопје, 2001

210. Малчески, Р., Малчески, А.: Теорема на Helly за конвексните множества, Математика, Софија, 1997
211. Малчески, Р., Малчески, А.: Функции и функционални равенки, СММ, Скопје, 2016
212. Малчески, Р., Малчески, А.: Хeронови триаголници, Сигма, Скопје, 1994
213. Малчески, Р., Малчески, С.: Белешка за распределбата на простите броеви, Сигма, Скопје, 2018
214. Малчески, Р., Малчески, С.:. Ред на број по модул и примитивни корени, Сигма, Скопје, 2018
215. Малчески, Р., Манова – Ераковиќ, В., Марковски, Ѓ., Малчески, А.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1-505), СММ, Скопје, 2008
216. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 1, Сигма, Скопје, 2005
217. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 2, Сигма, Скопје, 2005
218. Малчески, Р.. Паркетирания и приложения, Математика +, София, 2001
219. Малчески, Р.: Метод на инваријанти, Сигма, Скопје, 2014
220. Малчески, Р.: Аневска, К.: Хомотетија, Сигма, Скопје, 2014
221. Малчески, Р.: Ах тие питагорови тројки, Сигма, Скопје, 1995
222. Малчески, Р.: Две важни неравенства и бројот e, Сигма, Скопје, 1996
223. Малчески, Р.: Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2002
224. Малчески, Р.: Елементарни алгебарски и аналитички неравенства, СММ, Скопје, 2016
225. Малчески, Р.: Елементарно испитување на текот и скицирање на графикот на кубната функција, Сигма, Скопје, 1993
226. Малчески, Р.: Енгелов принцип на минимум, Сигма, Скопје, 2016
227. Малчески, Р.: За рационалните корени на полином од *n*-ти степен со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје, 1992
228. Малчески, Р.: Мултипликативни функции и теорема на Ојлер, Сигма, Скопје, 2004
229. Малчески, Р.: Неколку елементарни алгебарски методи за определување екстремни вредности, Сигма, Скопје, 2004
230. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София, 2003
231. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините, Сигма, Скопје, 2011
232. Малчески, Р.: Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц, Сигма, Скопје, 2011
233. Малчески, Р.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје, 2011
234. Малчески, Р.: Проблем на бои, Сигма, Скопје, 2000
235. Малчески, Р.: Пчелиното саќе – генијална творба во природата, Сигма, Скопје, 2013
236. Малчески, Р.: Семејно решавање на една „едноставна“ задача, Сигма, Скопје
237. Малчески, Р.: Теорема на Менелај, Сигма, Скопје, 1999
238. Малчески, Р.: Триаголни броеви, Сигма, Скопје, 1995
239. Малчески, Р.: Фибоначиеви броеви, Сигма, Скопје, 2009
240. Малчески, Р.: Функциите [x] и {x}, Сигма, 2015
241. Малчески, Р.: Хармониска прогресија, Сигма, Скопје, 1999
242. Малчески, Р.:. Една задача повеќе начини на решавање, Сигма, Скопје, 2001
243. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни-тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
244. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Геометриско пресметување на тригонометриски функции од некои агли, Сигма, Скопје
245. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 1, Сигма, Скопје
246. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 2, Сигма, Скопје
247. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни четириаголници, Сигма, Скопје
248. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
249. Маркоска, Ј.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
250. Маркоски, Ѓ. Девет карактеристични точки за триаголник 1, Сигма, Скопје
251. Маркоски, Ѓ. Девет карактеристични точки за триаголник 2, Сигма, Скопје
252. Маркоски, Ѓ. Девет карактеристични точки за триаголник 3, Сигма, Скопје
253. Маркоски, Ѓ. Девет карактеристични точки за триаголник 4, Сигма, Скопје
254. Матић, И.: Инверзија, Београд (www.imo.org.yu/sc)
255. Миличић, П.: Идентични трансформации (збирка нестандардни решени задачи), СММ, Скопје, 2013

256. Миовска, В.: Една задача и дванаесет начини за решавање, Сигма, Скопје
257. Миовска, В.: Теорема на Симпсон, Сигма, Скопје
258. Михелович, Ш. Х.: Теория чисел, Высшая школа, Москва, 1967
259. Младеновић, П.: Комбинаторика (четврто издање), ДМС, 2013
260. Моденов, П. Ц.: Задачи по геометрии, Наука, Москва, 1979
261. Морозова, Е. А., Петраков, А. С., Скворцов, В. А.: Международные математические олимпиады, Просвещение, Москва, 1976
262. Муминагић, А., Карстенсен, Ј.: Една задача, повеќе начини за нејзино решавање, Сигма, Скопје
263. Муминагић, А., Карстенсен, Ј.: Познати задачи со не така познати решенија, Сигма, Скопје
264. Муминагић, А.: Бабилиерова теорема, Сигма, Скопје
265. Муминагић, Никобинг: За една интересна математичка задача со корени, Сигма, Скопје
266. Мушкаров, О., Грозед, С.: Едно математично чудовиште, Сигма, Скопје
267. Нагел, Т.: Увод в теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
268. Начевска-Настоска, Б., Настоски, Љ.: Системи од точки или принцип на Дирихле, Сигма, Скопје
269. Пиперевски, Б., Малчески, Р., Малчески, А., Стојковска, И.: Избрани содржини од елементарна математика II (второ издание), СММ, Скопје, 2014
270. Плотников, А. Д.: Дискретная математика, Новое знание, Москва, 2005
271. Поја, Г.: Математическое открìитие, Москва 1976
272. Поповиќ-Грибовска, Л.: Инверзија, Сигма, Скопје
273. Поповска – Грибовска, Л.: За Виетовата теорема, Сигма, Скопје
274. Самарџиски, А.: Хомотетија, инверзија и задачите на Аполониј, ПМФ, Скопје, 1988
275. Серпинский, В.: 250 задач по елементарной теории чисел, Просвещение, Москва, 1976
276. Серпинский, В.: Что мы знаем и чего мы не знаем о Простиых числа, Физматгиз, Москва, 1963
277. Сивашинский, И. Х.: Неравенства в задачах, Наука, Москва, 1967
278. Стојменовска, И.: Обопштена равенка на Ојлер, Сигма, Скопје
279. Страшевич, С., Боровкин, Е.: Польские математические олимпиады, Мир, Москва, 1978
280. Тонов, И. К.; Сидеров, П. Н.: Приложение на комплексните числа в геометрията, Наука, София, 1981
281. Тренчевски, Г., Малчески, Р., Тренчевски, К.: Математика 3, (авторизиран ракопис), 2003
282. Тренчевски, К., Урумов, В.: Меѓународни олимпијади по математика, Природно – математички факултет, Скопје, 2000
283. Филеп, Л., Березнай, Г.: История на цифрите. София, Техника, 1988
284. Филиповски, С.: 200 –тероија на броеви (подготвителни задачи), Скопје, 2013
285. Филиповски, С.: Една задача, повеќе начини за ршавање, Сигма, Скопје
286. Хинчин, А. Я.: Три бисера од теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
287. Хинчин, А. Я.: Цепные дроби, Физматгиз, Москва, 1961
288. Хинчин, А. Я.: Элементи теории чиесл, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1951
289. Цветковски, З., Малчески, Р.: Алгоритам за генерирање на Питагорини тројки, Сигма, Скопје, 2006
290. Цветковски, З., Малчески, Р.: Докажување на симетрични неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
291. Цветковски, З., Малчески, Р.: Еден метод за докажување неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
292. Цветковски, З., Малчески, Р.: Неравенства на Schur и Muirhead, Сигма, Скопје, 2007
293. Цофман, Ј.: Примена на паркетот при решавање на задачи, Сигма, Скопје, 2000
294. Шаригин, И.: Задачи по геометрија, Наука, Москва, 1986 (на руски)
295. Школярски, Д. О.; Ченцов, Н. Н.; Яаглом, И. М.: Избраные задачи и теоремы по елементарной математике, Наука, Москва, 1976
296. Шнилерман, Л. Г.: Простиы числа, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1940
297. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 1, Сигма, Скопје
298. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 2, Сигма, Скопје
299. Штерјов, З.: Конвексност на функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ на интервалот $(0,\infty)$ и една примена, Сигма, Скопје
300. Штерјов, З.: Методи за докажување неравенства, Пробиштип, 2008
301. Штерјов, З.: Триаголници чии страни формираат аритметичка прогресија, Сигма, Скопје
302. Штерјов, З.: Функционални равенки во множеството реални броеви, НУ Гоце Делчев, Штип, 2011