Низата на Фибоначи и Питагорини тројки

Jens Carstensen , Alija Muminagić, Danska

Да се потсетиме: низата броеви $(F_n)_{n\geq 1}$ за која што $F_1 = F_2 = 1$ и точна е рекурзијата

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n , \tag{1}$$

за секој природен број $n \geq 1$, ја нарекуваме Фибоначиева низа, а F_n го нарекуваме n-ти член на Фибоначиевата низа (низата е наречена по италијанскиот математичар Leonardu de PISA (1170-1250) попознат по псевдонимот Fibonacci).

За $F_1 = F_2 = 1$, согласно рекурзијата (1) ја добиваме низата

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots .$$

Да забележиме дека рекурзијата (1) може да се разгледува и на следниот начин:

$$F_1 = F_2 = 1 , \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} , \; n > 2 \tag{*}$$

$$F_1 = F_2 = 1 , \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} , \; n \geq 1 \tag{**}$$

Оваа низа има многу интересни својства. Во наредниот дел ќе разгледаме едно такво нејзино својство. Ќе разгледаме четири последователни членови на оваа низа, на пример $2,3,5,8$. Ќе ги формираме, производот на надворешните членови, т.е. $2 \cdot 8 = 16$, и двојниот производ на внатрешните членови,т.е. $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Ако добиените производи ги квадрираме и собереме, добиваме

$$16^2 + 30^2 = 256 + 900 = 1156 = 34^2 . \tag{2}$$

Да забележиме дека добивме питагорина тројка $(16,30,34)$.

Ако па избереме други четири последователни членови на оваа низа, на пример $5, 8, 13, 21$, на ист начин како во претходниот пример, добиваме

$$105^2 + 208^2 = 11025 + 43264 = 54289 = 233^2 . \tag{3}$$

На тој начин добивме нова Питагорина тројка $(105, 208, 233)$. Но, сега (2) и (3) можеме да ги запишеме во облик

$$(F_3 \cdot F_6)^2 + (2 \cdot F_4 \cdot F_5)^2 = F_9^2$$

$$(F_5 \cdot F_8)^2 + (2 \cdot F_6 \cdot F_7)^2 = F_{13}^2 .$$

Претходните два примери не наведуваат да се запрашаме дали важи равенството

$$(F_{n-1} \cdot F_{n+2})^2 + (2 \cdot F_n \cdot F_{n+1})^2 = F_{2n+1}^2 . \tag{4}$$

Ќе докажеме дека равенството (4) е точно, односно дека (4) важи за секој природен број $n \in \mathbb{N}$.

Од (**) добиваме

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n .$$

Според тоа,

$$[F_{n-1}(F_{n+1}+F_n)]^2+[2\cdot F_n(F_n+F_{n-1})]^2=$$
$$=[F_{n-1}(F_n+F_{n-1}+F_n)]^2+(2\cdot F_n^2+F_nF_{n-1})^2=$$
$$=(2F_{n-1}F_n+F_{n-1}^2)^2+(2\cdot F_n^2+F_nF_{n-1})^2=$$
$$=4F_n^2F_{n-1}^2+4F\ F_{n-1}^3+F_{n-1}^4+4F_n^4+8F_n^3F_{n-1}+4F_n^2F_{n-1}^2=$$
$$=(F_{n-1}^2+2F_nF_{n-1}+2F_n^2)^2=(F_{n+1}^2+F_n^2)^2=F_{2n+1}^2 .$$

Равенството $F_{n+1}^2+F_n^2=F_{2n+1}$ може да се докаже на различни начини. Например, со помош на Binet-овата формула

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

(JACQUES PHILIPE MARIE BINET (1786-1856)-француски математичар и астроном).

Меѓутоа, ние предлагаме да најпрво докажете дека е исполнето равенството

$$F_{n+m}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1} . \qquad (7)$$

Доказот го препуштаме на читателите (а предлагаме равеснтвото да го докажете прво со индукција по n за фиксно m, а потоа пробајте да најдете комбинаторен доказ).

Ако сега во (7) ставиме $m=n+1$ добиваме

$$F_{2n+1}=F_{n-1}F_{n+1}+F_nF_{n+2}=F_{n-1}F_{n+1}+F_n(F_{n+1}+F_n)=$$
$$=F_{n-1}F_{n+1}+F_nF_{n+1}+F_nF_n=F_{n+1}(F_{n-1}+F_n)+F_n^2=$$
$$=F_{n+1}F_{n+1}+F_n^2=F_{n+1}^2+F_n^2 ,$$

што требаше и да се докаже.

АНЕГДОТИ ЗА ТАЛЕС

Во една прилика еден ученик го запрашал Талес:

- Што според ваше мислење, е најтрајно во човековиот живот?

Талес со насмевка одговорил:

- Надежта, таа е со тебе до смртниот час.

* * *

Во една прилика еден од неговите ученици го прашал Талес како награда сака да добие за своите откритија во астрономијата. Мудрецот му одговорил:

- За мене ќе биде доволно ако кажувајќи им на другите за моите откритија попатно спомените дека тие ми припаѓаат мене, а не вам.