

БМО 1993

1. Нека a, b, c, d, e и f се реални броеви такви што

$$a + b + c + d + e + f = 10$$

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 + (d-1)^2 + (e-1)^2 + (f-1)^2 = 6.$$

Определи ја најголемата вредност која може да ја прими бројот f .

Решение. Од условот на задачата следува

$$a + b + c + d + e + f = 10 \text{ и } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = 20.$$

Тогаш, од неравенството меѓу аритметичката и кавадратната средина следува

$$10 - f = a + b + c + d + e \leq 5\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2}{5}} = \sqrt{5(20 - f^2)},$$

па затоа $2f(3f - 10) \leq 0$. Според тоа, бараната максимална вредност на f е $f_{\max} = \frac{10}{3}$ и се достигнува кога $a = b = c = d = e = \frac{4}{3}$.

2. За природниот број чиј десетичен запис е

$$a_N 10^N + a_{N-1} 10^{N-1} + \dots + 10a_1 + a_0, \quad a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

ќе велиме дека е *монотон* ако $a_N \leq a_{N-1} \leq \dots \leq a_1 \leq a_0$. Определи го бројот на сите монотони броеви со најмногу 1993 цифри.

Решение. Нека A е множеството од сите монотони броеви со најмногу 1993 цифри. Нека B е множеството од сите низи со должина 1993 од видот

$$\underline{00\dots011\dots122\dots2\dots99\dots9}$$

со барем еден ненулта елемент (не е задолжително сите цифри да се појавуваат). Тогаш меѓу множествата A и B постои биекција, т.е. $|A| = |B|$. Низите во B заедно со низата од 1993 нули можат да бидат преброени на слениот начин: тие се еднакви на бројот на начините на кои можеме да поставиме девет прегради меѓу различните цифри, при што ако две прегради се соседни, тогаш соодветната цифра отсутува. Овој број е еднаков на $\binom{1993+10-1}{10-1}$, што значи дека $|A| = |B| = \binom{2002}{9} - 1$.

3. Кружниците C_1 и C_2 со центри соодветно O_1 и O_2 надворешно се допираат во точката T . Нека C е кружница со центар O таква што C_1 и C_2 се допираат внатрешно со C соодветно во точките A и B . Заедничката тангента на C_1 и C_2 во точката T ја сече C во точките K и L . Ако D е средината на отсечката KL , докажи дека $\angle O_1 O O_2 = \angle ADB$.

Решение. Нека правите AT и BT по вторпат ја сечат кружницата C соодветно во точките M и N . Тогаш од рамнокракиот триаголник ATO_1 добиваме

$$\angle O_1TA = \angle O_1AT,$$

од рамнокракиот триаголник AMO добиваме

$$\angle OMA = \angle OAT,$$

а точките A, O_1 и O лежат на една права.

Значи, $\angle O_1TA = \angle OMA$, па затоа $O_1O_2 \parallel OM$.

Аналогно $O_1O_2 \parallel ON$, т.е. точки O, M и N

лежат на една права. На истата права лежи и

точката D , бидејќи $KL \perp O_1O_2$, па затоа ди-

јаметарот MN е нормален на тетивата KL , а

D е средина на KL . Бидејќи MN е дија-

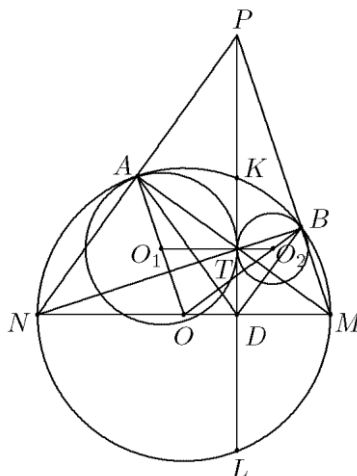
метар, важи $\sphericalangle NBM = \sphericalangle NAM = 90^\circ$, па затоа

темињата на $\triangle ABD$ се подножјата на вис-

ните во $\triangle MNP$, каде P е пресечната точка

на NA и NB . Тогаш $\angle NDA = \angle MDB = \angle MPN$ и затоа

$$\begin{aligned}\angle Q_1OO_2 &= \angle AOB = 180^\circ - \angle AON - \angle BOM \\ &= 180^\circ - (180^\circ - 2\angle ANM) - (180^\circ - 2\angle BMN) \\ &= 2(\angle ANM + \angle BMN) - 180^\circ = 180^\circ - 2\angle MPN \\ &= 180^\circ - \angle NDA - \angle MDB = \angle ADB.\end{aligned}$$



4. Нека p е прост број и $m \geq 2$ е природен број. Докажи дека равенката

$$\frac{x^p + y^p}{2} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^m$$

во множеството природни броеви има решение $(x, y) \neq (1, 1)$ само ако $m = p$.

Решение. Јасно, ако $m = p$, тогаш дадената равенка има бесконечно многу решенија од видот (x, x) , $x \in \mathbb{N}$.

Нека (x, y) е решение на равенката. Ако $x = y$, тогаш $x^p = x^m$, па затоа $m = p$. Затоа во натамошните разгледувања ќе сметаме дека $x \neq y$. Да забележиме дека од

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^m = \frac{x^p+y^p}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^p$$

слідуюа дека $t > p$.

Нека $\text{NZD}(x, y) = d$, $x = du$ и $y = dv$, каде $\text{NZD}(u, v) = 1$. Заменуваме во равенката и добиваме

$$u^p + v^p = 2d^{m-p} \left(\frac{u+v}{2}\right)^m. \quad (1)$$

Ако u и v се со различна парност, тогаш $(u+v)^m$ е делител на $u^p + v^p$, што не е можно, бидејќи $(u+v)^m > (u+v)^p \geq u^p + v^p$. Според тоа, u и v се непарни броеви. Нека $u+v=2^a t$, каде a е природен број и t е непарен број. Да забележиме дека $\text{NZD}(t, u) = \text{NZD}(t, v) = 1$. За $p=2$ имаме $u^2 + v^2 \equiv 2 \pmod{4}$, а кога p е непарен прост број имаме

$$\begin{aligned} u^p + v^p &= (2^a t - v) + v^p \\ &= 2^a t[(2^a t)^{p-1} - \binom{p}{1}(2^a t)^{p-2}v + \dots - 2^a t v^{p-2} \binom{p}{p-2} + p v^{p-1}], \end{aligned}$$

каде $p v^{p-1}$ е непарен број, а сите собирци освен него во средната заграда се парни броеви. Според тоа, ако p е непарен број, тогаш највисокиот степен на 2 кој е делител на $u^p + v^p$ е 2^a , а ако $p=2$, тогаш е 2. Но десната страна на (1) е делива барем со $2^{1+(m-1)a}$. Затоа $1+(m-1)a \leq a$, а тоа е можно само за $a=1$. Добивме $u+v=2t$, каде t е непарен број, при што очигледно $t \geq 3$. Сега равенката (1) го добива видот

$$(2t-v)^p + v^p = 2d^{m-p}t^m.$$

За $p=2$ имаме $t \mid 2v^2$, што не е можно бидејќи $\text{NZD}(t, v) = 1$. Ако p е непарен прост број, добиваме

$$2^p t^{p-1} - \binom{p}{1} 2^{p-1} t^{p-2} v + \dots - \binom{p}{p-2} 4 t v^{p-2} + 2 p v^{p-1} = 2 d^{m-p} t^{m-1},$$

од каде следува дека $t \mid p$, т.е. $t=p$. Но, сега сите членови со исклучок на $2 p v^{p-1}$ се деливи со p^2 , што не е можно.

Според тоа, равенката нема решенија за кои $x \neq y$, со што тврдењето е докажано.