

МЕТОД НА ПОМОШНИ ФИГУРИ

При решавање на геометриски задачи често пати е потребно да се дополни цртежот. Но како да се направи тоа? Која права да се повлече. До која фигура да се дополни цртежот? Која идеја да се користи?

Тоа се прашања кои себе си ги поставувате при решавање на некоја задача. Не е лесно да се одговори на ова прашање, но ако на еден единствен пример можеме да воочиме десетина различни патишта за негово решавање, тогаш истиот го заслужува нашето внимание. Ваков бисер е и следната задача која е дадена на сојузниот натпревар во СРЈугославија.

Задача. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ земена е точка P таква што

$$\angle PAB = \angle ABP = 15^\circ.$$

Докажете дека $\triangle PCD$ е рамнострани.

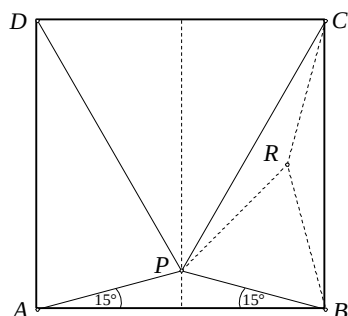
I. Дополнување со рамностран триаголник.

Во внатрешноста на $\triangle PBC$ наоѓаме точка R така што $\triangle PBR$ е рамностран. Тогаш $\triangle ABP \cong \triangle BCP$, според CAC , па затоа $\overline{BR} = \overline{RC}$. Понатаму, $\triangle CRB \cong \triangle CRP$, повторно според CAC , па затоа $\overline{PC} = \overline{BC}$.

Сега, од $\overline{PC} = \overline{BC} = \overline{DC}$ и

$$\begin{aligned}\angle DCP &= 90^\circ - \angle PCB = 90^\circ - (\angle PCR + \angle RCB) \\ &= 90^\circ - (15^\circ + 15^\circ) = 60^\circ\end{aligned}$$

слеува дека $\triangle PCD$ е рамностран.

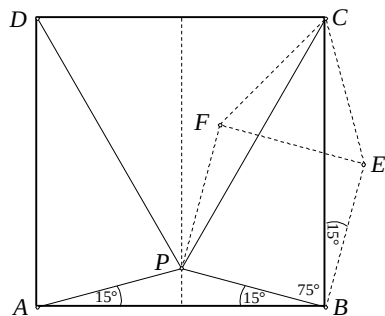


Црп. 1

II. Дополнување до полн квадрат. Над отсечката PB конструираме квадрат $PBEF$. Од складноста на триаголниците ABP и BEC слеува дека $\angle BEC = 150^\circ$, па затоа $\angle FEC = 60^\circ$. Сега $\triangle FEC$ е рамнокрак со $\overline{FE} = \overline{EC}$, па затоа тој е рамностран. Бидејќи $\angle CFP = 150^\circ$, добиваме дека $\triangle BEC \cong \triangle PFC$

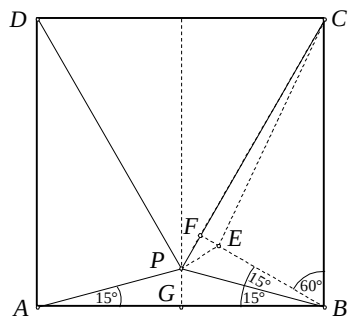
и бидејќи, $\angle PCB = 75^\circ$ добиваме $\angle BCP = 30^\circ$.

Според тоа, за $\triangle DPC$ важи $\overline{DC} = \overline{BC} = \overline{PC}$ и $\angle DCP = 90^\circ - \angle PCB = 60^\circ$, т.е. тој е рамностран.



Црп. 2

III. Дополнување до половина рамностран триаголник. Повлекуваме отсечка BE таква што $\angle PBE = 15^\circ$, цртеж 3, и нека $CF \perp BE$. $\triangle FBC$ е половина од рамностран триаголник, па затоа $2\overline{FB} = \overline{BC}$. Бидејќи $\overline{BC} = 2\overline{BG}$, добиваме дека

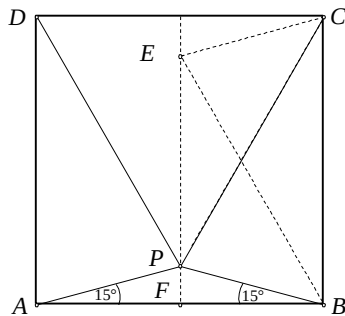


Црп. 3

$\triangle PGB \cong \triangle FPB$, па затоа $\angle BFP = 90^\circ$. Значи, точките P, E и C се колинеарни, од што следува $E \equiv F$. Значи, $\angle BCE = 30^\circ$, $\triangle PBC$ е рамнокрак и $\overline{PC} = \overline{BC}$, од што следува дека $\triangle PCD$ е рамностран.

IV. Дополнување до рамнокрак трапез.

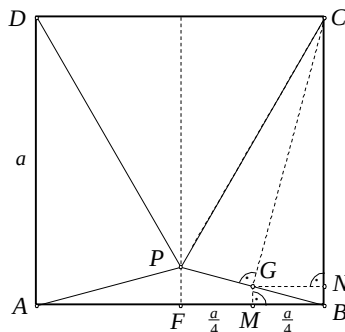
Повлекуваме права BE таква што $\angle PBE = 45^\circ$, цртеж 4. $\triangle EBF$ е половина од рамностран триаголник, па затоа $\overline{BE} = 2\overline{BF}$. Бидејќи $\overline{BC} = 2\overline{BF}$ добиваме дека $\triangle PBC$ е рамнокрак со агли $75^\circ, 75^\circ, 30^\circ$. Понатаму, четириаголникот $PBCE$ е рамнокрак трапез со агли $75^\circ, 75^\circ, 105^\circ, 105^\circ$, (зошто?), па затоа $\overline{PC} = \overline{BE}$. Според тоа, $\overline{PC} = \overline{BC}$, па сега доказот е како и во претходните разгледувања.



Црп. 4

V. Дополнување до правоаголен триаголник. Нека $CG \perp PB$, $GN \perp BC$ и $GM \perp AB$, цртеж 5. Сега $\triangle BGC$ е правоаголен со еден агол 75° , па затоа $\overline{BC} = 4\overline{GN}$, (докажете!).

Бидејќи $\overline{GN} = \overline{BM} = \frac{a}{4}$ добиваме дека GM е средна линија за $\triangle PFB$. Значи, точката G е средина за отсечката PB , што значи $\triangle PGC \cong \triangle BGC$, т.е. $\overline{PC} = \overline{BC}$, па сега доказот е како и во претходните случаи.



Црп. 5

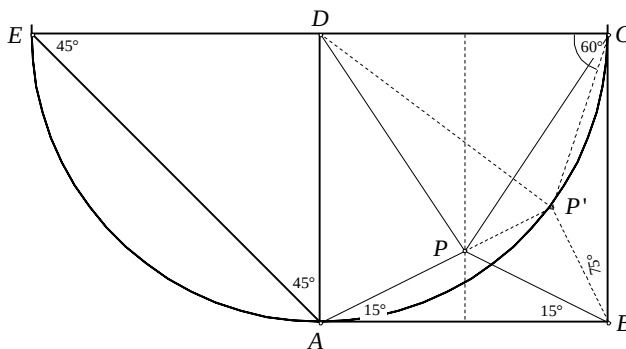
IV. Дополнување до тетивен четириаголник. Да земеме точка D на правата CD таква што D е средина на отсечката CE . Нека D е центар на кружницата опишана околу $\triangle EAC$. Ако P лежи на кружницата, тогаш задачата е решена, т.е. $\triangle PCD$ е рамностран, (зошто?).

Претпоставуваме дека точката P лежи во внатрешноста на кружницата (цртеж 6). Нека правата AP по вторпат ја сече кружницата во точка P' . Четириаголникот $EAP'C$ е тетивен, па

$$\angle EAP + \angle P'CE = 180^\circ,$$

односно, $\angle P'CE = 60^\circ$.

Бидејќи $\triangle P'CD$ е рамностран, ($\overline{DC} = \overline{P'D}$ и $\angle DCP' = 60^\circ$), добиваме дека $\triangle P'BC$ е рамнокрак со агли $30^\circ, 75^\circ, 75^\circ$. Понатаму, $\angle ABC = \angle ABP + \angle PBP' + \angle P'BC = 90^\circ$



Црп. 6

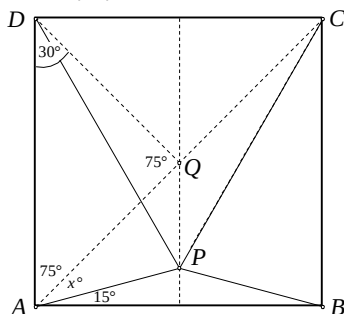
од што следува $\angle PBP' = 0^\circ$, т.е. $P \equiv P'$, што значи точката P лежи на кружницата. Противречност.

Ако точката P' лежи надвор од кружницата, заклучуваме на ист начин.

VII. Метод на лажна претпоставка. Нека претпоставиме дека ΔDQC е рамностран (црт. 7).

Тогаш $\triangle QDA$ е рамнокрак со агли $30^\circ, 75^\circ, 75^\circ$.

Бидејќи $\angle DAB = 75^\circ + x + 15^\circ = 90^\circ$, добиваме $x = 0^\circ$.
Значи, $P \equiv Q$ и $\triangle PCD$ е рамностран.



Црѣм. 7

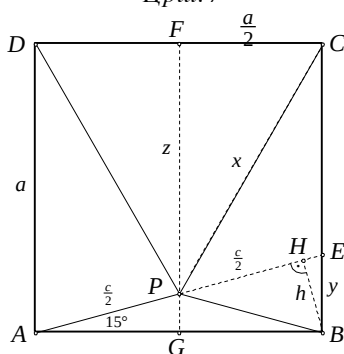
VIII. Метод на плоштини.

Нека $AD \cap BC = \{E\}$, H е подножјето на висината спуштена од B во $\triangle ABE$ и нека FG е оската на симетрија на квадратот. Да ги воведеме ознаките $\overline{AB} = a$, $\overline{AE} = c$, $\overline{BE} = y$, $\overline{BH} = h$, $\overline{PF} = z$, $\overline{PC} = x$, (цртеж 8). Да забележиме дека $c = 4h$ (зошто?).

Плоштината на $\triangle ABE$ е $P = \frac{ay}{2}$, но и $P = \frac{ch}{2}$, па значи $ay = ch$, т.е. $ay = 4h^2$. Од друга страна $a^2 + y^2 = c^2 = 16h^2$. Оттука $y^2 - 4ay + a^2 = 0$, па е $y = a(2 - \sqrt{3})$. Сега лесно се добива дека

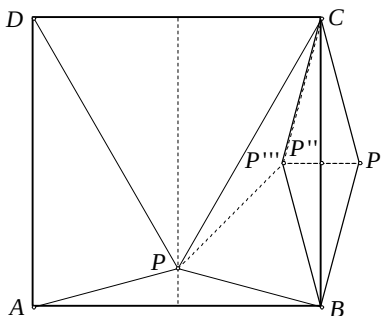
$$z = a - \frac{y}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

па е $x = a$. Значи, ΔPCD е рамностран.



Цр̄ӣ. 8

IX. Примена на ротација. Нека $\triangle BCP'$ е добиен со ротација на $\triangle ABP$ околу точката B за 90° и нека е $\triangle BCP''$ оносиметричната слика на $\triangle BCP'$ во однос на правата BC . Понатаму $BC \cap P'P'' = \{P\}$. Бидејќи $\angle PBP'' = 60^\circ$, добиваме дека $\triangle BPP''$ е рамнострани. Понатаму $\angle P'PC' = 15^\circ$, што значи $\triangle BCP'' \cong \triangle PCP''$, од што следува $\overline{PC} = \overline{BC}$, т.е. $\triangle PCD$ е рамнострани.

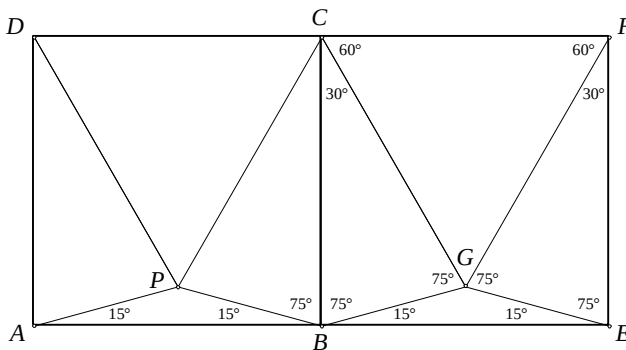


Цр̄м̄. 9

Х. Сведүвање на поедноставна задача.

Конструираме квадрат $BEFC$ над страната BC ,

а потоа конструираме рамностран $\triangle CFG$ така што точката G е во внатрешноста на квадратот $BEFG$. Триголниците BEG, GEF и BCG се рамнокраки, а соодветните агли се означени на цртеж 10. Затоа $\triangle ABE \cong \triangle BEG$, како и



Црп̄у. 10

$\triangle PBC \cong \triangle GEF$. Од ова следува дека $\overline{PC} = \overline{BC}$, т.е. $\triangle PCD$ е рамностран.