Драгољуб Милошевиќ, Србија

ЕДЕН ПРОБЛЕМ ВО ВРСКА СО РАСЕКУВАЊЕ НА КОЦКА

Нека е дадена коцка со раб $n\,cm$, $n \in \mathbf{N}$. Коцката ја обојуваме и ја расекуваме на n^3 единечни коцки. Јасно, ако $n=1$, тогаш немаме расекување и сите шест страни на коцката се обоени. Нека $n \geq 2$. Во врска со расекувањето ќе дадеме одговор на прашањето: “Колку единечни коцки имаат обоено три, две, една или ниедна страна?”

Секое теме на коцката е заедничко за три нејзини страни, па затоа бројот на единечните коцки кои имаат три обоени страни е 8.

Понатаму, на секој раб на коцката имаме n единечни коцки кај кои се обоени најмалку две страни. Но, кај две од нив, оние кои се во темињата на големата коцка, се обоени три страни, па затоа на секој раб има $n-2$ единечни коцки кај кои се обоени точно две страни. Коцката има 12 рабови, што значи дека има $12(n-2)$ единечни коцки кај кои се обоени точно две страни.

На секоја страна од коцката има n^2 единечни коцки и тие имаат најмалку една обоена страна. Но, на страната има 4 единечни коцки кај кои се обоени точно три страни и $4(n-2)$ единечни коцки со две обоени страни. Значи, секоја страна содржи

$$n^2-4-4(n-2)=n^2-4n+4=(n-2)^2$$

единечни коцки кај кои е обоена точно една страна. Коцката има 6 страни, па затоа таа има $6(n-2)^2$ единечни коцки кај кои е обоена точно една страна.

Конечно, бројот на единечни коцки кои немаат обоена страна е

$$\begin{aligned} n^3-8-12(n-2)-6(n-2)^2 &= n^3-8-12n+24-6n^2+24n-24 \\ &= n^3-6n^2+12n-8=(n-2)^3. \end{aligned}$$

Во врска со оваа задача ќе разгледаме неколку дополнителни задачи.

Задача 1. Докажи дека, ако при расекувањето нема единечни коцки со необоена страна, тогаш сите единечни коцки имаат по три обоени страни.

Решение. Докажавме дека при расекувањето на коцка со должина на раб $n\,cm$ се добиваат $(n-2)^3$ единечни коцки кај кои ниедна страна не е обоена. Според тоа, ако при расекувањето нема единечни коцки со необоена страна, тогаш $(n-2)^3=0$ од што следува $n-2=0$ т.е. $n=2$. Значи, коцката се расекува на $2^3=8$ единечни коцки и како при расекувањето имаме 8 единечни коцки со три обоени страни, заклучуваме дека сите единечни коцки имаат по три обоени страни. ♦

Задача 2. Ако $n>2$, тогаш бројот на единечните коцки кои немаат обоена страна е различен од бројот на единечните коцки кои имаат точно две обоени страни. Докажи!

Решение. Нека го претпоставиме спротивното. Тогаш, од нашите разгледувања на почетокот на оваа статија следува дека $(n-2)^3=12(n-2)$ и како $n>2$ добиваме дека $(n-2)^2=12$, што не е можно бидејќи бројот 12 не е точен квадрат на ниту еден природен број. Значи, нашата претпоставка не е добра, па затоа бројот на единечните коцки кои немаат обоена страна е различен од бројот на единечните коцки кои имаат точно две обоени страни. ♦

Задача 3. Нека $n>2$. Ако бројот на единечните коцки кои немаат обоена страна е k пати помал од бројот на единечните коцки кои имаат точно две обоени страни, тогаш $k=3$ или $k=12$. Докажи!

Решение. Од условот на задачата следува $k(n-2)^3=12(n-2)$ и како $n>2$ добиваме $(n-2)^2=\frac{12}{k}$. Според тоа, бројот $\frac{12}{k}, k\in\mathbf{N}$ треба да е квадрат на природен број, а тоа е можно само ако $\frac{12}{k}\in\{1,4,9\}$ од што следува дека $k\in\{12,3,\frac{4}{3}\}$. Но, $k\in\mathbf{N}$, па затоа $k=3$ или $k=12$, што и требаше да се докаже. ♦

Задача 4. Нека $n>2$. Ако бројот на единечните коцки кои имаат точно една обоена страна е s пати поголем од бројот на единечните коцки кои немаат обоена страна, тогаш $s\,|\,6$. Докажи!

Решение. Од условот на задачата следува

$$6(n-2)^2=s(n-2)^3$$

и како $n>2$ добиваме $n-2=\frac{6}{s}$. Но, $n,s\in\mathbf{N}$, па затоа $s\,|\,6$, што и требаше да се докаже. ♦

На крајот од оваа статија ви предлагаме самостојно да ги решите следните задачи.

1. Нека бројот на единечните коцки кои имаат точно една обоена страна е еднаков на единечните коцки кои имаат точно две обоени страни. Колкав е бројот на единечните кои немаат обоена страна?

2. Докажи дека бројот на единечните коцки кои имаат обоено точно една (две) страни не може да биде 8.

3. Нека бројот на единечните коцки кои немаат обоена страна е p пати поголем од бројот на единечните кај кои се обоени точно две страни.
   a) Определи го обликот на бројот p.
   b) За најмалата вредност на p пресметај го бројот на единечните коцки кои имаат обоено точно по една страна.

4. Ако бројот на единечните коцки кои имаат обоено точно една страна е p пати помал од оние што имаат обоено точно две страни, тогаш $p=1$ или $p=2$. Докажи?