XXXIII олимпијада

1. Најди ги сите природни броеви a, b, c такви што

$$1 < a < b < c \text{ и } (a-1)(b-1)(c-1) \mid (abc-1).$$

Решение. Нека $R(a,b,c) = \frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$, $1 < a < b < c$, каде a, b и c се цели броеви. Горниот израз може да се запише во обликот

$$R(a,b,c) = 1 + \frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{(a-1)(b-1)} + \frac{1}{(b-1)(c-1)} + \frac{1}{(c-1)(a-1)}.$$

Од овде се гледа дека $R(a,b,c) > 1$ и ако $a \ge a' > 1, b \ge b' > 1, c \ge c' > 1$, тогаш $R(a,b,c) \le R(a',b',c')$.

Понатаму, да забележиме дека ако a, b и c се непарни, $abc-1$ е парен , а ако a, b и c се парни, $(a-1)(b-1)(c-1)$ е непарен. Како $R(a,b,c)$ прима целобројни вредности, тоа значи дека сите a, b, c се или парни или непарни.

Ако $a \ge 4$, тогаш $1 < R(a,b,c) \le R(4,6,8) = \frac{4\cdot 6\cdot 8-1}{3\cdot 5\cdot 7} = \frac{191}{105} < 2$, па во овој случај $R(a,b,c)$ не може да биде цел број, т.е. во овој случај задачата нема решение.

За $a = 3$, имаме $1 < R(3,b,c) \le R(3,5,7) = \frac{3\cdot 5\cdot 7-1}{2\cdot 4\cdot 6} = \frac{104}{48} < 3$. Сега

$$R(3,b,c) = \frac{3bc-1}{2(b-1)(c-1)} = 2,$$

па се добива дека $(b-4)(c-4) = 11$ и $b = 5, c = 15$.

За $a = 2$, имаме $1 < R(2,b,c) \le R(2,4,6) = \frac{2\cdot 4\cdot 6-1}{1\cdot 3\cdot 5} = \frac{47}{15} < 4$, па се добива дека $R(2,b,c) = 2$ или $R(2,b,c) = 3$. Во првиот случај $2bc-1 = 2(b-1)(c-1)$, што не е можно бидејќи на левата страна е непарен, ана десната парен број. Во вториот случај $2bc-1 = 3(b-1)(c-1)$, т.е. $(b-3)(c-3) = 5$ и тогаш $b = 4, c = 8$, бидејќи 5 е прост број и $4 \le b < c$.
Значи, постојат две решенија и тие се (3,5,15) и (2,4,8).

2. Најди ги сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2, \text{ за секои } x, y \in \mathbb{R}.$$

Решение. Нека

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2, \text{ за секои } x, y \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Нека $s = f(0)$. Од (1) за $x = 0$ добиваме

$$f(f(y)) = y + s^2, \text{ за секој } y \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

Во (1) ставаме $y = 0$ и добиваме

$$f(x^2 + s) = (f(x))^2, \text{ за секој } x \in \mathbb{R} \qquad (3)$$

Ако во (3) ставиме $x = 0$ добиваме

$$f(s)=s^2, \quad (4)$$

и сега од (3) и (4) следува

$$s^2+f(x^2+s)=(f(x))^2+f(s).$$

Од (1), (2) и (4) со примена на функцијата f на двете страни добиваме

$$x^2+s+s^4=s+(x+s^2)^2,$$

од каде што следува дека

$$s=0 \quad (5)$$

Користејќи го (5), од (2) и (3) следува

$$f(f(y))=y, \text{ за секој } y\in\mathbb{R} \quad (6)$$

$$f(x^2)=(f(x))^2, \text{ за секој } x\in\mathbb{R} \quad (7)$$

Од (7) следува

$$f(x)\geq 0, \quad x\geq 0 \quad (8)$$

Ако $f(x)=0$ за некој x, тогаш

$$0=(f(x))^2=f(x^2)=f(x^2+f(x))=x+(f(x))^2=x,$$

па затоа

$$f(x)>0, \quad x>0 \quad (9)$$

Ако во (1) замениме y со $f\left(y\right)$, користејќи (6) добиваме

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \quad x\geq 0, y\in\mathbb{R} \quad (10)$$

За $x>y$, од (10) имаме

$$f\left(x\right)=f\left(\left(x-y\right)+y\right)=f\left(x-y\right)+f\left(y\right)>f\left(y\right) \quad (11)$$

бидејќи според (9) имаме $f(x-y)>0$.

Ако $f(x)>x$ тогаш $x=f(f(x))>f(x)$, заради (11) и (6). Понатаму, ако $f(x)<x$ на истиот начин се заклучува дека $f(x)>x$.

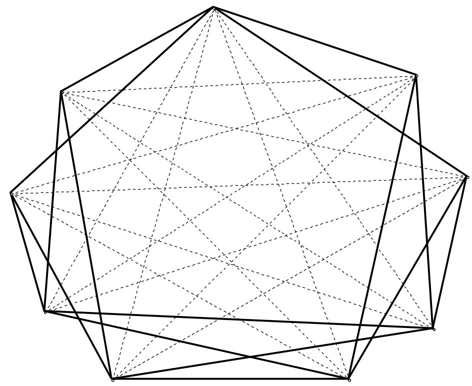
Конечно, $f(x)=x$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

3. Во просторот се дадени девет точки, такви што било кои четири не лежат во иста рамнина. Секои две точки се поврзани со отсечка и секоја од нив е обоена со сина или со црвена боја или не е обоена. Да се најде најмалиот број n таков што при било какво боење на избраните n отсечки, меѓу нив постојат три еднакво обоени кои се страни на триаголник.

Решение. Ако $n=32$, тогаш може да се изберат и обојат отсечките така да не постои ниеден триаголник, обоен со иста боја, како што е покажано на долниот цртеж.

Меѓу деветте точки има $\frac{9\cdot 8}{2}=36$ отсечки. Да претпоставиме дека сме избрале 33 обоени отсечки. Тогаш, само три отсечки се необоени.

Сека можеме да отстраниме 3 темиња така да преостанатите 6 бидат поврзани со сите обоени отсечки. Да земеме некое теме, на пример A_1. Тоа е поврзано со останатите 5 точки со обоени отсечки, па затоа постојат три исто обоени отсечки, на пример плави должини $\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}$. Ако ниту еден од триаголниците $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$ и $A_1A_3A_4$ не е обоен во плава боја, тогаш триаголникот $A_2A_3A_4$ е обоен во црвена боја.



Црт. 33.1.

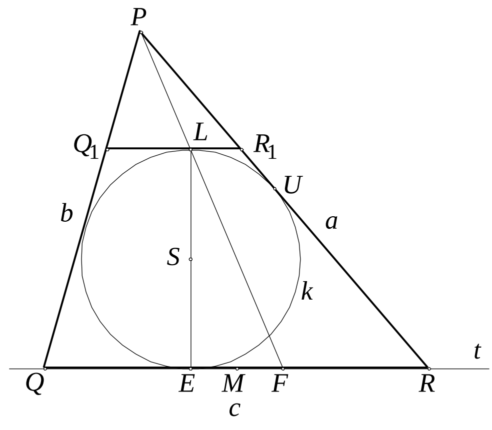
4. Нека t е тангента на кружницата k и точката M припаѓа на t. Најди го геометриското место на точки P за кои, постојат точки Q и R на t такви што M е средина на отсечката QR, а кружницата k е впишана во триаголникот PQR

Решение. Нека E е допирната точка на тангентата t со кружницата k, чијшто центар е S, а EL е дијаметарот на кружницата.

Земаме точка P и соодветно точки Q и R на тангентите, така да кружницата биде впишана во триаголникот PQR. Триаголниците PFR и PLR_1 се хомотетични со коефициент на хомотетија

$$k = \frac{v_c}{v_c - 2r} = \frac{\frac{2P}{c}}{\frac{2P}{c} - \frac{2P}{s}} = \frac{s}{s-c},$$

(P е плоштината на триаголникот PQR $s = \frac{a+b+c}{2}$, r е радиусот на кружницата впишана во триаголникот PQR) и $\overline{QE} = s - a$.



Црт. 33.2.

Правата PL ја сече тангентата во точка F, па имаме

$$\overline{FR} = k\overline{LR_1} = k\overline{R_1U} = k(\overline{PR} - \overline{PR_1} - \overline{UR}) = k\overline{PR} - \overline{PR} - k(s-b)$$
$$= (k-1)\overline{PR} - k(s-b) = \frac{c}{s-c}a - \frac{s}{s-c}(s-b) = s - a = \overline{QE}$$

Значи, важи $\overline{QE}=\overline{FR}$. Точката P припаѓа на бараното множество ако и само ако M е средина на отсечкта EF, т.е. ако и само ако точката F е симетрична со точката E во однос на точката M. Бараното множество точки е полуправата LP.

5. Нека O_{xyz} е правоаголен координатен систем во просторот, S е конечно множество точки во него, а S_x, S_y и S_z се множествата ортогонални проекции на точките од S на O_{yz}, O_{zx}, O_{xy}, соодветно. Докажи дека

$$|S|^2 \le |S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|.$$

Решение. Нека $|S_x|=a, |S_y|=b, |S_z|=c$. Доказот ќе го дадеме со индукција по $|S|$.

1^0 За едноелементно множество S тврдењето важи.

2^0 Да претпоставиме дека тврдењето важи за секое S, такво да $|S|<n$.

Да го разгледаме множеството S за кое $|S|=n$. Постои рамнина паралелна со некоја координатна рамнина која не содржи ниедна точка од S и која го дели тоа множество на две непразни подмножества S_1 и S_2, така да $n=|S_1|+|S_2|, |S_1|<n, |S_2|<n$. Од индуктивната претпоставка следува

$$|S_1|^2 \le a_1b_1c_1, \quad |S_2|^2 \le a_2b_2c_2.$$

Можеме да претпоставиме дека таа рамнина е паралелна со xy-рамнината. Тогаш

$$a_1+a_2=a, \quad b_1+b_2=b, \quad c_1\le c, \quad c_2 \le c.$$

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува дека

$$\begin{aligned}|S|^2 &= (|S_1|+|S_2|)^2 \le (\sqrt{a_1b_1c_1}+\sqrt{a_2b_2c_2})^2 \le (\sqrt{a_1b_1}\cdot\sqrt{c}+\sqrt{a_2b_2}\cdot\sqrt{c})^2\\ &= c(\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2})^2 \le c(a_1+a_2)(b_1+b_2)=abc\end{aligned}$$

со што е докажана точноста на даденото неравенство.

6. За секој природен број n со $S(n)$ да го означиме најголемиот природен број со својството: за секој природен број $k<S(n)$, бројот n^2 може да се запише како збир од k квадрати на природни броеви.

(a) Докажи дека $S(n)\le n^2-14$, за секој $n>14$.

(b) Најди природен број n за кој $S(n)=n^2-14$.

(c) Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $S(n)=n^2-14$.

Решение. (a) Бројот n^2 можеме да го запишеме како $n^2 = 1^2 + 1^2 + ... + 1^2$. Ако групираме четири единици добиваме 2^2 и со тоа бројот на квадратите се намалува за 3. Со групирање на 9 единици добиваме 3^2 и бројот на квадратите се намалува за 8. Ако k пати групираме по 4 единици и l пати по 9 единици, тогаш бројот на квадратите се намалува за $3k + 8l$. На опишаниот начин бројот на квадратите може да се намали за 3,6,8,9,11,12, но не и за 13. Тоа е затоа што Диофантовата равенка $3k + 8l = 13$ нема позитивни решенија. (општото решение е $k = -1 + 8m, l = 2 - 3m, m \in \mathbb{Z}$). Затоа $S(n) = n^2 - 14$.

(b) Ако $S(n) = n^2 - 14, n \geq 4$, тогаш $S(n) \geq 2$. Бројот n^2 мора да биде еднаков на збирот на два квадрати. Може да биде $n = 5, 10, 13, \dots$. За $n = 5$ и $n = 10$, $S(n) = 2$. Најмалиот можен број n за кој $S(n) = n^2 - 14$ е $n = 13$. Треба да докажеме дека бројот $169 = 13^2$ е еднаков на збирот од k квадрати за секој $k \leq 13^2 - 14 = 155$.

Ако n^2 е збир од k квадрати од кои еден е парен, на пример $(2r)^2$, кој можеме да го запишеме како $r^2 + r^2 + r^2 + r^2$, добиваме дека n^2 е збир од $k + 3$ квадрати. Од $169 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + 3^2$, следува дека бројот 169 може да се запише како збир од $2 + 3t$ квадрати за $1 \leq t \leq 53$. Ако 3^2 го запишеме како $2^2 + 2^2 + 1^2$, бројот 169 може да се прикаже како збир од $1 + 3t$ квадрати за $1 \leq t \leq 54$ (за $t = 1, 169 = 10^2 + 8^2 + 2^2 + 1^2$). За $k = 153, 169 = 3^2 + 3^2 + 151 \cdot 1^2$. Групирајќи 4 единици во 2^2, четири 2^2 во 4^2 и четири 4^2 во 8^2 се добива запис на 169 со помош на $k = 153 - 3t$ квадрати, за $1 \leq t \leq 48$. За $t = 49$, имаме $169 = 6^2 + 6^2 + 6^2 + 6^2 + 4^2 + 3^2$, а за $t = 50$, $169 = 12^2 + 4^2 + 3^2$.

Со тоа го добивме прикажувањето на бројот $13^2 = 169$ како збир од k квадрати за секој $k \leq 155$.

(c) Доволно е да докажеме дека за секој $n = 2^k \cdot 13,$ важи $S(n) = (2^k \cdot 13)^2 - 14.$ Тоа може да се направи со разгледување на

$$(2^k \cdot 13)^2 = (2^k \cdot 8)^2 + (2^k \cdot 8)^2 + (2^k \cdot 4)^2 + (2^k \cdot 4)^2 + (2^k \cdot 3)^2 \quad \text{и}$$

$$(2^k \cdot 13)^2 = 3^2 + 3^2 + [(2^k \cdot 13)^2 - 18] \cdot 1^2$$

и групирање така да се добиваат збирови на квадрати.