LII олимпијада

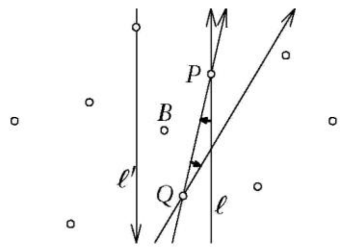
1. За множеството $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ кое е составено од четири различни природни броеви со s_A да го означиме збирот $a_1+a_2+a_3+a_4$. Нека n_A е бројот на паровите $(i,j), 1\le i<j\le 4$ за кои a_i+a_j е делител на s_A. Определи ги сите такви множества A за кои n_A ја достигнува најголемата можна вредност.

Решение. Нека $a_1<a_2<a_3<a_4$. Бидејќи $a_3+a_4 \nmid s_A$ (во спротивно ќе важи $a_3+a_4 \mid a_1+a_2<a_3+a_4$) и слично $a_2+a_4 \nmid s_A$, заклучуваме дека $n_A\le 4$.
Нека претпоставиме дека $n_A=4$. Тогаш $a_1+a_4, a_2+a_3 \mid s_A$, па затоа важи $a_1+a_4 \mid a_2+a_3 \mid a_1+a_4$, од каде што следува $a_1+a_4=a_2+a_3=\frac{s_A}{2}$. Понатаму, $\frac{s_A}{2}>a_1+a_3>\frac{a_2+a_3}{2}=\frac{s_A}{4}$, па мора да е $a_1+a_3=\frac{s_A}{3}$. Сега добиваме $a_3=\frac{s_A}{3}-a_1, a_4=\frac{s_A}{2}-a_1$ и $a_2=\frac{s_A}{6}+a_1$, од каде $\frac{s_A}{6}<a_1+a_2<a_1+a_3=\frac{s_A}{3}$, па затоа $a_1+a_2=\frac{s_A}{6}+2a_1\in\{\frac{s_A}{4},\frac{s_A}{5}\}$.

Ако $a_1+a_2=\frac{s_A}{4}$, добиваме $a_1=\frac{s_A}{24}$ и $a_1:a_2:a_3:a_4=1:5:7:11$, а ако $a_1+a_2=\frac{s_A}{5}$ добиваме $a_1=\frac{s_A}{60}$ и $a_1:a_2:a_3:a_4=1:11:19:29$. Според тоа, максималната вредност $n_A=4$ се достигнува за множества од видовите $\{t,5t,7t,11t\}$ и $\{t,11t,19t,29t\}$, $t\in\mathbb{N}$.

2. Нека $\mathbb{S}$ е конечно множество точки во рамнината кое содржи најмалку две точки. Множеството $\mathbb{S}$ не содржи три колинеарни точки. Ветерница се нарекува следнава постапка. На почетокот се избира права l која содржи точно една точка $P\in\mathbb{S}$. Правата l се ротира во насока на движењето на стрелките на часовникот околу центарот P до моментот во кој по прв пат содржи некоја друга точка Q од $\mathbb{S}$. Од тој момент таа точка Q станува нов центар, а правата продолжува да се ротира околу Q во насока на движењето на стрелките на часовникот до првиот момент во кој повторно содржи некоја друга точка од множеството $\mathbb{S}$. Оваа постапка бесконечно се повторува.
Докажи дека може да се избере некоја точка P од $\mathbb{S}$ и некоја права l која ја содржи P така што во добиената ветерница секоја точка на множеството $\mathbb{S}$ станува центар бесконечно многу пати.

Решение. Правата l во почетната позиција ја ориентираме произволно. Тогаш l во секој момент ја дели рамнината на лева и десна полурамнина. Во текот на работата на ветерницата, при премин на центарот од точката P во точката Q , точката P преминува од l во левата полурамнина, додека Q преминува од левата полурамнина на l . На овој начин броевите n_1 и n_2 на точките соодветно лево и десно од правата l остануваат исти во текот на целиот процес (со исклучок кога l содржи две точки).



Да земеме произволна точка $A \in \mathbf{S}$ и права l низ A таква што $|n_1 - n_2| \leq 1$ и да ја пуштиме ветерницата во погон. Нека претпоставиме дека постои точка B која ќе се најде на l само конечен број пати. Тоа значи дека почнувајќи од некој момент, B никогаш нема да биде на l , т.е. секогаш ќе се наоѓа од иста страна, да кажеме левата страна од правата l . Кога l ќе се заврти за 180° , ќе се најде во положба на некоја права l' паралелна со l , но со спротивна ориентација. Точката B е меѓу правите l и l' , што значи дека лево од l се наоѓаат сите точки кои се десно од l , плус точката B и една точка која во тој момент лежи на l . Затоа $n_1 - n_2 \geq 2$, што е противречност. Од добиената противречност следува дека ветерницата минува низ секоја точка бесконечно многу пати.

3. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е функција за која важи

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x)) \qquad (1)$$

за секои реални броеви x и y . Докажи дека $f(x) = 0$ за секој $x \leq 0$.

Решение. *Прв начин*. Нека претпоставиме дека $f(a) > 0$ за некој a . Бидејќи десната страна на неравенството $f(y+a) \leq yf(a) + f(f(a))$ е линеарна по y , постои b таков што $f(x) < 0$ за секој $x < b$, а исто така постои и c таков што $f(x) < b$ (и $f(f(x)) < 0$) за $x < c$. Меѓутоа, за $x < \min\{a,b,c\}$ важи $f(a) \leq (a-x)f(x) + f(f(x)) < 0$, што е противречност. Според тоа, $f(x) \leq 0$ за секој $x \in \mathbb{R}$.

За $d = f(0)$ имаме $f(y) \leq dy + f(d)$, а оттука

$$f(d) \leq (d-x)f(x) + f(f(x)) \leq (d-x)f(x) + df(x) + f(d),$$

т.е. $0 \leq (2d-x)f(x)$. За $x < 2d$ ова значи $f(x) \geq 0$, односно $f(x) = 0$.

Да избереме e таков што $f(e) = 0$. Од (1), за $(x,y) = (e,0)$ добиваме $0 = f(e) \leq f(f(e)) = f(0)$, па затоа $f(0) = 0$. Сега,

$$0 = f(x-x) \leq -xf(x) + f(f(x)) \text{, т.е. } xf(x) \leq f(f(x)) \leq 0.$$

Од последното неравенство следува дека за $x < 0$ важи, $f(x) \geq 0$, што повлекува $f(x)=0$, со што доказот е завршен.

Втор начин. Ако во (1) замениме $(x,y)=(a, f(b)-a)$, добиваме

$$f(f(b))-f(f(a))\leq f(a)f(b)-af(a).$$

Со собирање на аналогната релација при замена $(x,y)=(b, f(a)-b)$ добиваме:

$$af(a)+bf(b)\leq 2f(a)f(b), \text{ за секои } a,b\in\mathbb{R}.$$

Сега, од последното неравенство за $b=2f(a)$ добиваме $af(a)\leq 0$, па затоа $f(a)\geq 0$ за $a<0$.

Ако $f(c)>0$ за некој c, тогаш $f(y+c)\leq yf(c)+f(f(c))<0$ за $y<\frac{f(f(c))}{f(c)}$, што не е можно. Според тоа, $f(x)\leq 0$ за секој x. Сега, ако земеме предвид дека $f(x)\geq 0$ за $x<0$, добиваме дека $f(x)=0$ за $x<0$. Конечно, од (1) следува дека за $x<y=0$ важи $0=f(x)\leq f(f(x))=f(0)\leq 0$, т.е. $f(0)=0$.

4. Нека n е природен број. Дадена е вага и n тегови со маси $2^0,2^1,...,2^{n-1}$. Сите n тегови се ставаат еден по друг на тасовите на вагата, односно во секој од $n-$те чекори се избира еден од теговите, кој не се наоѓа на тасовите, и се става или на левиот или на десниот тас. Притоа теговите се ставаат така што во ниту еден момент десниот тас не е потежок од левиот. Определи го бројот на начините на кои оваа постапка може да се реализира.

Решение. *Прв начин*. Нека f_n е бројот на начините на поставувањата на теговите со опишаната постапка. Овие поставувања ќе ги наречеме *добри*. На секое вакво поставување му соодветствува изразот $x_1+x_2+...+x_n$ во кој $\{|x_1|,|x_2|,...,|x_n|\}=\{2^0,2^1,...,2^{n-1}\}$ и кој задоволува $x_1+x_2+...+x_k\geq 0$, за $k=1,2,...,n$.

За распоредот на елементите и знакот на собирокот ± 1 има $2n$ можности, при што за $x_1=-1$ нема добри поставувања. Во секој друг случај, вредноста на изразот $x_1+x_2+...+x_i$ е различна од нула за секои i, па затоа со изоставување на собирокот ± 1 и делење со 2 се добива добро поставување за $n-1$ тегови, а такви има f_{n-1}. Според тоа, $f_n=(2n-1)f_{n-1}$, што заедно со почетниот услов $f_1=1$ дава $f_n=(2n-1)!!$.

Втор начин. Бројот на добрите поставувања на теговите да го означиме со a_n. Нека во првиот чекор се поставува тегот 2^i. Теговите полесни од него потоа може да се постават на било кој тас (бидејќи $2^0+...+2^{i-1}<2^i$). Чекорите во кои овие тегови може да се постават може да ги избереме на $\binom{n-1}{i}$

начини, нивниот редослед на $i!$ начини, а тасовите на 2^i начини. Од друга страна, во преостанатите потези потешките тегови може да се поставаат на a_{n-i-1} начини, бидејќи полесните тегови не влијаат на исправноста на нивното поставување. Според тоа,

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i i!\binom{n-1}{i} a_{n-i-1}, \quad a_0 = 1.$$

Ако означиме $b_n = \frac{a_n}{2^n n!}$, рекурентната релација го добива обликот

$$2nb_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_i ,$$

па имаме

$$2nb_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_i = b_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} b_i = b_{n-1} + 2(n-1)b_{n-1} = (2n-1)b_{n-1},$$

т.е. $b_n = \frac{2n-1}{2n} b_{n-1}$, со почетен услов $b_0 = 1$. Според тоа, $b_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, па затоа

$$a_n = 2^n n! b_n = 2^n n! \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 2\cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = (2n)!\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = (2n-1)!!.$$

5. Функцијата $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ е таква што за секои цели броеви m и n разликата $f(m)-f(n)$ е делива со $f(m-n)$. Докажи дека за секои цели броеви m и n такви што $f(m)\le f(n)$, бројот $f(n)$ е делив со бројот $f(m)$.

Решение. Нека $x, y \in \mathbb{Z}$ се такви што $f(x) < f(y)$. Од

$$f(x-y) \mid f(y) - f(x) > 0$$

следува дека $f(x-y) < f(y)$. Од друга страна, $f(y)$ е делител на

$$| f(x) - f(x-y) | < f(y),$$

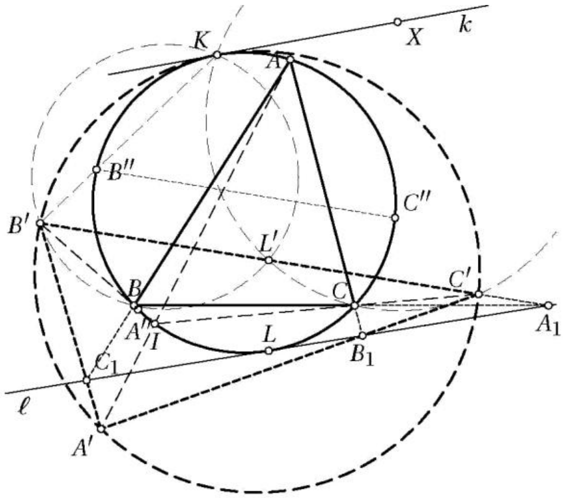
па мора да важи $f(x) = f(x-y)$. Оттука добиваме

$$f(x) = f(x-y) \mid f(y) - f(x),$$

па затоа $f(x) \mid f(y)$.

6. Нека ABC е остроаголен триаголник и Γ е неговата опишана кружница. Нека l е произволна тангента на Γ, а правите l_a, l_b, l_c се симетрични со l во однос на правите BC, CA, AB, соодветно. Докажи дека опишаната кружница околу триаголникот определен со правите l_a, l_b, l_c ја допира кружницата Γ.

Решение. *Прв начин.* Нека $A' = l_b \cap l_c$, $B' = l_a \cap l_c$ и $C' = l_a \cap l_b$ и нека l ја допира Γ во L и ги сече BC, CA, AB во A_1, B_1, C_1 (ако е на пример $l \parallel BC$, ќе сметаме дека A е бесконечна точка). Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека L е на лакот BC кој не ја содржи точката A, тогаш B_1 и C_1 се на отсечките AC и AB.



Бидејќи AB и AC се надворешни симетрали соодветно на $\measuredangle A'C_1B_1$ и $\measuredangle A'B_1C_1$, заклучуваме дека A е центар на припишаната кружница на $\triangle A'B_1C_1$ наспроти A', па затоа $A'A$ е симетрала на $\measuredangle B'A'C'$. Слично, $B'B$ и $C'C$ се симетрали на $\measuredangle A'B'C'$ и $\measuredangle A'C'B'$, па затоа AA', BB' и CC' се сечат во центарот I на впишаната кружница во $\triangle A'B'C'$. Притоа

$$\measuredangle BIC = \measuredangle B'IC' = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\measuredangle B'A'C' \text{ и } \measuredangle CAB = \measuredangle B_1AC_1 = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\measuredangle B_1A'C_1 .$$

Значи, $\measuredangle BIC + \measuredangle CAB = 180^\circ$, т.е. I припаѓа на Γ.

Точката L' симетрична на L во однос на BC лежи на правата $B'C'$. Нека кружниците $B'BL'$ и $C'CL'$ се сечат во точкаsa $K \neq L'$. Бидејќи

$$\measuredangle BKC = \measuredangle BKL' + \measuredangle L'KC = \measuredangle BB'L' + \measuredangle L'C'C = 180^\circ - \measuredangle CIB ,$$

заклучуваме дека точката K е на Γ. Понатаму,

$$\measuredangle B'KC' = \measuredangle B'KL' + \measuredangle L'KC' = \measuredangle IBL' + \measuredangle L'CI = 360^\circ - \measuredangle BL'C - \measuredangle CIB$$
$$= 360^\circ - 2\measuredangle C'IB' = 180^\circ - \measuredangle C'A'B',$$

што значи дека K припаѓа на $\Gamma' \equiv (A'B'C')$.

Да ги разгледаме тангентата k на Γ во точката K и точка X на k од иста страна на правата KC на која е A. Имаме

$$\measuredangle XKC' = \measuredangle XKC - \measuredangle C'KC = \measuredangle KBC - \measuredangle C'L'C = \measuredangle KBL' + \measuredangle L'BC - \measuredangle A_1L'C$$
$$= \measuredangle KB'C' + \measuredangle CBL - \measuredangle CLA_1 = \measuredangle KB'C',$$

што значи дека k ја допира кружницата L', од каде што следува тврдењето на задачата.

Втор начин. Точките A', B', C', L, L', I ги определуваме како погоре и на ист начин добиваме $AA' \cap BB' \cap CC' = I$. Нека A'', B'', C'' се точки на Γ такви што $LA = AA''$, $LB = BB''$, $LC = CC''$. Тогаш (во ориентирани агли)

$$\measuredangle(l, B''C'') = 2\measuredangle(l, BC) = \measuredangle(l, l_a) ,$$

па затоа $B''C''\parallel l_a$. Аналогно се докажува дека $C''A''\parallel l_b$ и $A''B''\parallel l_c$.
Бидејќи $\measuredangle L'BC=\measuredangle CBL=\measuredangle C''BC$, точката L' припаѓа на BC'' и аналогно $L'\in CB''$. Ја разгледуваме точката $K\neq B''$ во која правата $B'B''$ ја сеча Γ. Од Паскаловата теорема применета на шестаголникот $KB''CIBC''$ следува дека точките $KB''\cap IB=B', B''C\cap BC''=L'$ и $CI\cap C''K$ се колинеарни, па затоа следува дека $CI\cap C''K=C'$, т.е. $K\in C'C''$. Аналогно $K\in A'A''$, па K е центар на хомотетија којго пресликува $\triangle A'B'C'$ во $\triangle A''B''C''$ и оттука следува тврдењето на задачата.