

XXVI олимпијада

1. Дадена е кружница со центар на страната AB на тетивниот четириаголник $ABCD$. Останатите три страни ја допираат кружница. Докажи дека

$$\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB}.$$

Решение. I начин. За четириаголник важи

$$\alpha + \gamma = \pi, \quad \beta + \delta = \pi.$$

Центарот O на кружницата е пресек на симетралите на аглите γ и δ . Нека FHG е нормала на симетралите на аглите $\angle FAH = \angle GOH = \alpha$. Значи,

$$\overline{AH} = \overline{AF} \text{ и } \overline{HO} = \overline{GO} \quad (1)$$

Од $\angle OFG = \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} = \angle COE$

и $\overline{OE} = \overline{OF}$ следува $\triangle FGO \cong \triangle OCE$, т.е.

$$\overline{GO} = \overline{CE} \quad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме

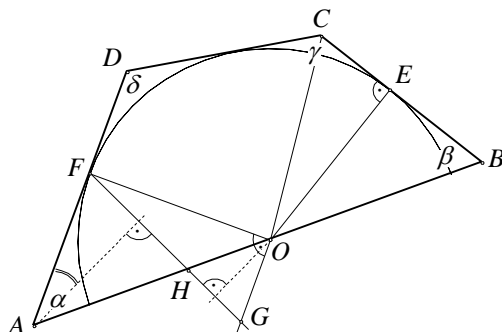
$$\overline{AO} = \overline{AH} + \overline{HO} = \overline{AF} + \overline{CE} \quad (3)$$

Аналогно добиваме

$$\overline{BO} = \overline{BE} + \overline{DF}. \quad (4)$$

Од (3) и (4) добиваме

$$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BC}.$$



Црп. 26.1.

II начин. Нека O е центар на кружницата, r е нејзин радиус, а E и F се точки во кои таа ги допира страните BC и AD . Тогаш

$$\overline{BE} = r \operatorname{ctg} \beta, \quad \overline{EC} = r \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}, \quad \overline{DF} = r \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2},$$

$$\overline{FA} = r \operatorname{ctg} \alpha, \quad \overline{OB} = \frac{r}{\sin \beta}, \quad \overline{OA} = \frac{r}{\sin \alpha}.$$

Равенството $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB}$ е еквивалентно со секое од равенставата

$$r(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}) + r(\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}) = \frac{r}{\sin \alpha} + \frac{r}{\sin \beta},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta}, \text{ т.е. } \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2},$$

при што последното равенство непосредно следува од равенствата $\alpha + \gamma = \pi$, $\beta + \delta = \pi$.

2. Нека $n, k \in \mathbb{N}$, $\text{NZD}(n, k) = 1$, $1 \leq k \leq n-1$ и $M = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$. Секој елемент од M е обоен со една од две бои, бела или сина, при што:
- (i) за секој i од M , броевите i и $n-i$ имаат иста боја;
 - (ii) за секој $i \in M, i \neq k$, броевите i и $|i-k|$ имаат иста боја.

Докажи дека сите елементи од M се обоени во иста боја.

Решение. Сите природни броеви ќе ги обоиме така што за броевите $i \in \{1, \dots, n-1\}$, броевите од облик $i + qn$ имаат иста боја. Нека сите броеви од облик qn се обоени како и k . Ако докажеме дека сите броеви $k, 2k, 3k, \dots, pk, \dots$ се исто обоени, тогаш сме докажале дека и сите броеви $i \in \{1, \dots, n-1\}$ се исто обоени. Имено, бидејќи k и n се заемно прости, за секој број i постои $p \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ таков што $pk \equiv i \pmod{n}$, т.е. $pk = qn + i$. Значи, броевите i и pk се исто обоени, па според тоа и сите броеви од множеството M се исто обоени.

Ќе го докажеме претходното тврдење. Постојат две можности:

$$1^\circ \quad pk < qn < (p+1)k,$$

$$2^\circ \quad qn < pk < (p+1)k.$$

Ознаката " $i \leftrightarrow j$ " означува дека „броевите i и j имаат иста боја“. Во првиот случај

$$\begin{aligned} (p+1)k = qn + i &\leftrightarrow i \text{ (по деф.)} \leftrightarrow k - i \text{ (заради } ii) \leftrightarrow n - k + i \text{ (заради } i) \\ &\leftrightarrow qn - k + i = pk \text{ (по деф.)}. \end{aligned}$$

Во вториот случај

$$\begin{aligned} (p+1)k = qn + j &\leftrightarrow j \text{ (по деф.)} \leftrightarrow k - i \text{ (заради } ii) \\ &\leftrightarrow qn - k + i = pk \text{ (по деф.)}. \end{aligned}$$

3. За полиномот $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ со $w(P)$ го означуваме бројот на непарните коефициенти a_j . Нека за секој ненегативен цел број i е $Q_i = (1+x)^i$. Докажи дека ако $i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{N}_0$ се такви што $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n$, тогаш

$$w(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \dots + Q_{i_n}) \geq w(Q_{i_1}).$$

Решение. За $m = 2^s$ добиваме

$$(1+x)^m = 1 + R(x) + x^m$$

каде R е полином со парни коефициенти. Ако степенот на полиномот P е помал од $m = 2^s$, тогаш

$$w(P \cdot Q_m) = 2w(P). \tag{1}$$

Доказот се добива со индукција по i_n . За $i_n = 0$ или 1 тврдењето е точно. Нека тврдењето е точно за секој

$$i_n < 2^s \quad (s \geq 1).$$

Нека i_1, i_2, \dots, i_n е низа за која

$$2^s \leq i_n < 2^{s+1}.$$

Разгледуваме два случаи:

1° $i_1 \geq 2^s = k$. Тогаш од (1) и индуктивната претпоставка следува

$$\begin{aligned} w(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \dots + Q_{i_n}) &= w(Q_k P) = 2w(P) \\ &\geq 2w(Q_{i_n-k}) = w(Q_{i_n-k} \cdot Q_k) \\ &= w(Q_{i_1}). \end{aligned}$$

2° $i_1 < 2^s = k = 2^s$. Тогаш

$$\begin{aligned} Q_{i_1}(x) + Q_{i_2}(x) + \dots + Q_{i_n}(x) &= P(x) \\ &= a_0 + a_1x + \dots + a_{k-1}x^{k-1} + (1+x)^k (b_0 + b_1x + \dots + b_{k-1}x^{k-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{k-1} b_i x^i + x^k \sum_{i=0}^{k-1} b_i x^i + R(x), \end{aligned}$$

каде R е полином со парни коефициенти. Го пресметуваме бројот на непарни коефициенти на добиениот полином. Вториот и третиот собирок во последниот збир се полиноми кои немаат членови со исти степени. Ако некој од непарните коефициенти a_i биде поништен заради непарноста на соодветниот коефициент b_j , во конечниот збир би се појавил непарен коефициент b_j во собирокот $b_j x^{j+m}$. Конечно, од индуктивната претпоставка следува

$$w(P) \geq w\left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i\right) \geq w(Q_{i_1})$$

со што доказот е завршен.

4. Дадено е множество M од 1985 различни природни броеви, такви што ниту еден од нив нема прост делител поголем од 26. Докажи дека од множеството M може да се изберат четири меѓусебно различни броеви чиј производ е четврти степен на природен број.

Решение. Секој број $x_j \in M$ е од облик

$$x_j = \prod_{i=1}^9 p_i^{a_{ij}}, \quad 0 \leq a_{ij}$$

каде p_1, p_2, \dots, p_9 се сите заемно прости броеви помали од 26 т.е. $p_i \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$. Производот $x_j x_k$ е полн квадрат ако и само ако

$$a_{ij} + a_{ik} \equiv 0 \pmod{2}, \quad i = 1, \dots, 9.$$

Бројот на различни производи $x_j x_k$ по модул 2 е $2^9 = 512$. Секое подмножество од M кое содржи барем 513 елементи содржи два броја чиј производ е полн квадрат. Со елиминација на таквите парови се добиваат $\frac{1985-511}{2} = 737$

парови, такви што производот на членовите на секој пар е полн квадрат. Множеството производи е $\{y_1^2, \dots, y_{737}^2\}$. Ако направиме аналогна постапка како претходната на множеството $\{y_1^2, \dots, y_{737}^2\}$, добиваме дека постои пар y_r, y_s таков што $y_r y_s$ е полн квадрат. Значи $y_r y_s = y^2$, за некој $y \in \mathbb{N}$. Бидејќи

$$y_r^2 = x_j x_k, \quad y_s^2 = x_m x_n,$$

добиваме

$$x_j x_k x_m x_n = y_r^2 y_s^2 = y^4,$$

каде x_j, x_k, x_m, x_n се различни природни броеви од множеството M .

5. Дадени се $\triangle ABC$ и кружница со центар во точка O која минува низ точките A и C и по втор пат ги сече страните AB и BC во различни точки K и N , соодветно. Кружниците опишани околу триаголниците ABC и KBN имаат точно две заеднички точки B и M . Докажи дека $\angle BMO = 90^\circ$.

Решение. Кружницата опишана околу триаголникот ABC има центар S . $\angle BCA$ е периферен агол над тетивата AB , а $\angle BSA$ е централен агол над истата тетива, па според тоа $\angle BSA = 2\gamma$. Четириаголникот $AKNC$ е тетивен, па затоа

$$\angle KNC = \pi - \alpha \Rightarrow \angle BNK = \alpha \text{ и } \angle NKB = \gamma.$$

Значи, $\triangle ABC$ е сличен со $\triangle NBK$. Ако R е центар на кружницата опишана околу триаголникот NBK , тогаш $\angle NRB = 2\gamma$. Од рамнокраките триаголници ABS и BNR добиваме

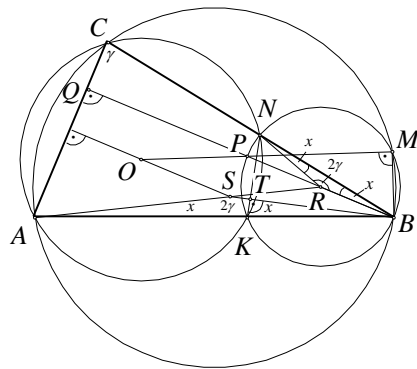
$$x = \angle ABS = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

па според тоа триаголниците BCQ и TBK се правоаголни. Бидејќи $OS \perp AC$, од триаголникот BCQ добиваме

$$BR \parallel OS. \quad (1)$$

Бидејќи $OR \perp NK$ (O и R се наоѓаат на симетралата на отсечката NK) и $SB \perp NK$, од триаголникот BTK , добиваме

$$SB \parallel OR. \quad (2)$$



Црп. 26.2.

Од (1) и (2) следува дека четириаголникот $OSBR$ е паралелограм. Нека точката P е симетрична на точката B во однос на R . Тогаш и четириаголникот $OSRP$ е паралелограм. Бидејќи S и R лежат на симетралата на от-

сечката BM добиваме $SR \perp BM$ и $OP \perp BM$. Сега од Талесовата теорема следува $PM \perp BM$, т.е. $OM \perp BM$, па затоа $\angle BMO$ е прав.

6. За секој реален број x_1 дефинирана е низа $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ со

$$x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n}\right), \text{ за секој } n \geq 1.$$

Докажи дека постои еден и само еден број x_1 за кој

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1, \text{ за секој } n \geq 1.$$

Решение. Дефинираме низа функции со

$$f_1(t) = t, \quad f_{n+1}(t) = f_n(t) \left(f_n(t) + \frac{1}{n}\right), \quad n \geq 1.$$

Доволно е да докажеме дека постои еден и само еден број $a > 0$ таков што

$$0 < f_n(a) < f_{n+1}(a) < 1, \text{ за секој } n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

односно

$$1 - \frac{1}{n} < f_n(a) < 1, \text{ кога } n \geq 1 \quad (2)$$

Секоја од функциите f_n е полином со позитивни коефициенти, па затоа таа монотонно расте на интервалот $(0, +\infty)$.

Дефинираме низи s_n и t_n

$$f_n(s_n) = 1 - \frac{1}{n}, \quad f_n(t_n) = 1 \quad (3)$$

Јасно е дека $t_n \leq 1$ и $s_n \geq 1 - \frac{1}{n}$ (ако $t_n > 1$, тогаш $f_1(t_n) > 1, \dots, f_n(t_n) > 1$).

Ако $s_n < 1 - \frac{1}{n}$, тогаш $f_1(s_n) < 1 - \frac{1}{n}, \dots, f_n(s_n) < 1 - \frac{1}{n}$. Од ова и од (3) следува

$$0 < t_n - s_n < f_n(t_n) - f_n(s_n) = \frac{1}{n} \quad (4)$$

Од

$$f_{n+1}(s_n) = 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1} = f_{n+1}(s_{n+1})$$

и монотоноста на функцијата f_{n+1} добиваме

$$s_n < s_{n+1}, \text{ за секој } n \in \mathbb{N} \quad (5)$$

и аналогно

$$f_{n+1}(t_n) = 1 + \frac{1}{n} > 1 = f_{n+1}(t_{n+1})$$

па според тоа

$$t_{n+1} < t_n, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}.$$

Значи, низата s_n е монотонно растечка и е ограничена од горе, $s_n < t_n < 1$, а низата t_n е монотонно опаѓачка низа и ограничена од долу, $t_n > 0$.

Од (4) следува $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = a$.

Ќе докажеме дека низата $x_n = f_n(a)$ ги има бараните својства. Имаме:

$$1 - \frac{1}{n} = f_n(s_n) < f_n(a) < f_n(t_n) = 1.$$

Останува да докажеме дека постои единствена низа со овие својства. За $t \neq a$ постои $s_n \in (t, a)$ или $t_n \in (a, t)$, па според тоа

$$f_n(t) < f_n(s_n) = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{или} \quad f_n(t) > f_n(t_n) = 1$$

т.е. не е исполнет условот (2).