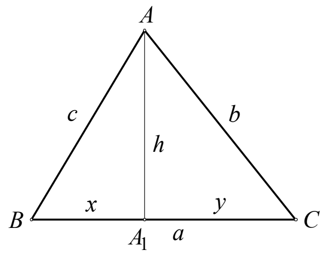
ЕДЕН ЕЛЕМЕНТАРЕН ДОКАЗ НА ХЕРОНОВАТА ФОРМУЛА

Во шесто одделение од основното образование учениците се запознаваат со Хероновата формула за плоштина на триаголник. Секако на оваа возраст формулата се усвојува без доказ, бидејќи учениците немаат предзнаења за да можат истата да ја докажат. Меѓутоа, веќе во VII и VIII одделение од основното образование се изучуваат Питагоровата теорема и формулите за скратено множење, па затоа пожелно е наместо да се презентираат дополнителни докази на Питагоровата теорема, во рамките на оваа тема во VIII одделение учениците да се запознаат со следниот елементарен доказ на Хероновата формула. Јасно, ова не треба да биде единствен случај, односно исклучок, туку би требало да стане пракса на нашиот образоваен систем.

Со $2s$ да го означиме периметарот на триаголникот ABC, со страни a, b и c, (види цртеж). Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека аголот при темето A е најголемиот внатрешен агол. Со h да ја означиме должината на висината AA_1 и нека $\overline{A_1B} = x$ и $\overline{A_1C} = y$. Јасно, $\overline{BC} = x + y$. Од Питагоровата теорема добиваме

$$h^2 = c^2 - x^2 \text{ и } h^2 = b^2 - y^2,$$



од што следува

$$c^2 - x^2 = b^2 - y^2,$$

односно

$$x^2 - y^2 = c^2 - b^2.$$

Бидејќи $x + y = a$, од последната равенка добиваме

$$a(x - y) = c^2 - b^2,$$

т.е. го добиваме системот

$$\begin{cases} x - y = \frac{c^2 - b^2}{a} \\ x + y = a \end{cases}$$

чие решение е $x = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}, y = \frac{a^2-c^2+b^2}{2a}$. Според тоа, за должината на висината AA_1 наоѓаме

$$h^2 = c^2 - x^2 = (c - x)(c + x) = \left(c - \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\left(c + \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right) = \frac{[(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2]}{4a^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{4a^2} = \frac{2s(2s-2c)(2s-2a)(2s-2b)}{4a^2} = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$$

од што следува

$$h=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}. \qquad (1)$$

Ако замениме во формулата за плоштина на триаголник $P=\frac{ah}{2}$, ја добиваме позната Херонова формула за плоштина на триаголник

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \qquad (2)$$

Забелешка. Како што може да се види со формулата (1) може да се пресмета должината на висината на триаголникот ако се дадени должините на страните на триаголникот. Меѓутоа користењето на оваа формула често пати доведува до сложени изрази, па затоа понекогаш поекономично е да се користи претходно опишаната постапка. Така на пример за триаголник чии должини на страни се

$$a=\sqrt{18}-1, b=\sqrt{6}, c=\sqrt{10}-\sqrt{5}$$

добиваме:

$$x+y=\sqrt{18}-1,\quad h^2+x^2=10+5-2\sqrt{50}=15-10\sqrt{2},\quad h^2+y^2=6$$

па затоа $y^2-x^2=6-(15-10\sqrt{2})=10\sqrt{2}-9$ од што следува

$$(y-x)(y+x)=10\sqrt{2}-9$$

и како $x+y=\sqrt{18}-1=3\sqrt{2}-1$ добиваме

$$y-x=\frac{10\sqrt{2}-9}{3\sqrt{2}-1}=\frac{(10\sqrt{2}-9)(3\sqrt{2}+1)}{(3\sqrt{2}-1)(3\sqrt{2}+1)}=\frac{51-17\sqrt{2}}{17}=3-\sqrt{2}.$$

Сега од системот

$$\begin{cases} x+y=3\sqrt{2}-1 \\ y-x=3-\sqrt{2} \end{cases}$$

наоѓаме $x=2\sqrt{2}-2, y=\sqrt{2}+1$, па затоа

$$h^2=6-y^2=6-(\sqrt{2}+1)^2=6-(3+2\sqrt{2})=3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2$$

од што следува

$$h=\sqrt{2}-1.$$

Сега за плоштината на триаголникот добиваме

$$P=\frac{ah}{2}=\frac{(3\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{2}=\frac{5-4\sqrt{2}}{2}.$$

Белешката е направена според книгата

T.S. Bhanu Murthy: *A modern introduction to Ancient Indian Mathematics*, Wiley Eastern Limited, New Delhi 1992

Ристо Малчески, Скопје