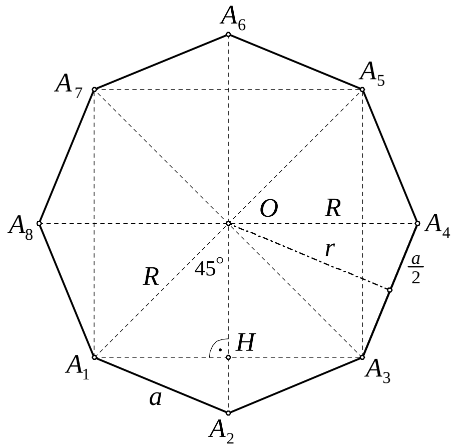
Ѓорѓи Цветков, Кратово

ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ПЛОШТИНА И ПЕРИМЕТАР НА ПРАВИЛЕН ОСУМАГОЛНИК И ПРАВИЛЕН ДВАНАЕСЕТАГОЛНИК ВПИШАН ВО КРУЖНИЦА СО РАДИУС R

Во оваа статија ќе ги изведеме формулите за пресметување на плоштината и периметарот на правилен осумаголник и правилен дванаесетаголник впишани во кружница со радиус R. Исто така, ќе ги најдеме врските меѓу страната и радиусите на впишаната и опишаната кружница за секој од овие правилни многуаголници.

a) Да го разгледаме правилниот осумаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, впишан во кружница со радиус R. Четириаголникот $A_1A_3A_5A_7$ е квадрат (зошто?). Нека $H = A_1A_3 \cap OA_2$. Јасно $OH \perp A_1A_3$, од што следува дека $\angle A_1OH = \angle HA_1O = 45^\circ$, т.е. ΔOA_1H е рамнокрак правоаголен, со прав агол во темето H, цртеж 1.



Црт. 1

Со примена на питагоровата теорема за ΔOA_1H добиваме

$$2\overline{A_1H}^2 = \overline{A_1H}^2 + \overline{OH}^2 = \overline{OA_1}^2 = R^2$$

т.е. $\overline{A_1H} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

За плоштината на триаголникот A_1A_2O добиваме $P_{\Delta A_1A_2O} = \frac{1}{2}\overline{A_1H}\cdot\overline{OA_2} = \frac{R^2\sqrt{2}}{4}$, што значи дека плоштината на осумаголникот е

$$P = 8P_{\Delta A_1A_2O} = 8\frac{R^2\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2}R^2.$$

Понатаму, со примена на на питагоровата теорема за ΔA_1HA_2 наоѓаме

$$a^2 = \overline{A_1A_2}^2 = \overline{A_1H}^2 + \overline{HA_2}^2 = \frac{2R^2}{4} + \left(R - \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4}[2 + (2-\sqrt{2})^2] = R^2(2-\sqrt{2}),$$

што значи

$$a = R\sqrt{2-\sqrt{2}}\ .$$

Според тоа, периметарот на осумаголникот е

$$L = 8a = 8R\sqrt{2-\sqrt{2}}\ .$$

Останува уште да го определиме радиусот на впишаната кружница во осумаголникот $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$. Повторно, користејќи ја питагоровата теорема добиваме

$$r^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{R^2(2-\sqrt{2})}{4} = \frac{R^2(2+\sqrt{2})}{4}$$

$$\text{т.е.}\quad r = \frac{R\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Да забележиме дека r може да се пресмета и од релацијата

$$\frac{ar}{2} = P_{\Delta A_1A_2O} = \frac{R^2\sqrt{2}}{4}$$

од каде наоѓаме

$$r = \frac{R^2\sqrt{2}}{2a} = \frac{R^2\sqrt{2}}{2R\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{R^2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2R\sqrt{2^2-2}} = \frac{R\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

	преку R	*преку* a	*преку* r
R			
a	$R\sqrt{2-\sqrt{2}}$		
r	$\frac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{2}}$		
P	$2R^2\sqrt{2}$		
L	$8R\sqrt{2-\sqrt{2}}$		

На крајот на овој дел ви предлагаме да ја пополните дадената таблица, а потоа да ги пресметате радиусот на опишаната, радиусот на впишаната кружница, плоштината и периметарот на правилен осумаголник со страна $a = 3\,cm$.

b) Да го разгледаме правилниот дванаесетаголник $A_1A_2...A_{12}$, со страна a (цртеж 2). Над страните A_2A_3, A_4A_5, A_6A_7, A_8A_9, $A_{10}A_{11}$ и $A_{12}A_1$ во внатрешноста на дванаесетаголникот конструираме рамнострани триаголници. Внатрешниот агол на дванаесетаголникот е $150^\circ = 60^\circ + 90^\circ$, па затоа новоповлечените страни се нормални на страните на дванаесетаголникот, што значи дека четириаголниците $A_1A_2B_1B_2$, $A_3A_4B_3B_2$, $A_5A_6B_4B_3$, $A_7A_8B_5B_6$, $A_9A_{10}B_6B_5$ и $A_{11}A_{12}B_1B_6$ се квадрати. Според тоа, шестаголникот $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ е правилен, (зошто ?).

Значи, правилниот дванаесетаголник со страна a го поделивме на 6 рамнострани триаголници, шест квадрати и еден правилен шестаголник, сите со страна a. Затоа за неговата плоштина ја имаме формулата

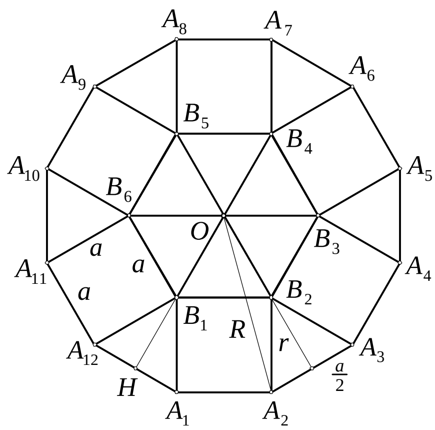
$$P = 6a^2 + 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 3a^2(2+\sqrt{3}).$$

Бидејќи $\overline{OB_1} = a$ и $\overline{B_1H} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, како висина на рамностран триаголник, за радиусот r на впишаната кружница во дванаесетаголникот добиваме

$$r = \overline{OB_1} + \overline{B_1H} = a + \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a(2+\sqrt{3})}{2}.$$

Ако ја искористиме питагоровата теорема, тогаш за радиусот на опишаната кружница околу дванаесетаголникот добиваме

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a(2+\sqrt{3})}{2}\right)^2} = a\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$



Црт. 2

Забелешка. Формулите за r и R на правилниот дванаесетаголник можеме да ги добиеме и на друг начин. Имено, од $P = 3a^2(2+\sqrt{3})$ и $P = \frac{12ar}{2} = 6ar$ добиваме

$$6ar = 3a^2(2+\sqrt{3})$$

т.е. $r = \frac{a(2+\sqrt{3})}{2}$. Слично, од $P = 3a^2(2+\sqrt{3})$ и $P = 6\frac{R\cdot R}{2}$, (зошто?) наоѓаме

$3a^2(2+\sqrt{3}) = 3R^2$

т.е. $R = a\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

На крајот од овој дел ви предлагаме да ја пополните дадената таблица, а потоа да ги пресметате страната, радиусот на впишаната кружница, плоштината и периметарот на правилен дванаесетаголник впишан во кружница со радиус $R = 3\,cm$.

	преку R	*преку a*	*преку r*
R		$a\sqrt{2+\sqrt{3}}$	
a			
r		$\frac{1}{2}a(2+\sqrt{3})$	
P		$3a^2(2+\sqrt{3})$	
L		$12a$	

c) На крајот од оваа статија ви предлагаме самостојно да ги решите следните задачи.

1. Ако хипотенузата на правоаголниот триаголник е c, а еден негов внатрешен агол е еднаков на $22^\circ 30'$, тогаш плоштината на овој триаголник е $\frac{c^2\sqrt{2}}{8}$. Докажете!

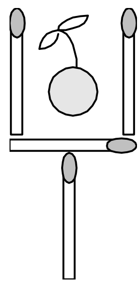
2. Ако во правоаголниот триаголник еден негов внатрешен агол е еднаков на 15°, тогаш радиусот на опишаната кружница на овој триаголник е еднаков на геоемтриската средина на катетите.

3. Ако хипотенузата на правоаголниот триаголник е c, а еден негов внатрешен агол е еднаков на 15°, тогаш плоштината на овој триаголник е $\frac{c^2}{8}$. Докажете!

4. Ако остриат агол на ромбот е 30°, тогаш неговата страна е геометриска средина на дијагоналите на ромбот. Докажи!

5. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е дадена точка M, но таква што $\overline{AM} = \overline{BM}$ и $\angle AMB = 150^\circ$. Докажете дека ΔCDM е рамностран.

ИСПРАЗНИ ЈА ЧАШАТА



На цртежот е прикажана една стара и доста позната загатка. Четири кибритчиња формираат чаша во која се наоѓа вишна. Со поместување на само две кибритчиња, потребно е да се испразни чашата (вишната да биде надвор од неа). Чашата може да се превртува со врвот надолу, да се спушти и крева, така што да не го смени обликот.

ПРОБЛЕМ НА ОСУМ ДАМИ

На шаховска табла да се постават осум дами така што една со друга да не се напаѓаат.