Ристо Малчески
Скопје

ТЕОРЕМА НА МЕНЕЛАЈ

Ако $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се колинеарни вектори, тогаш постои реален број λ таков, што $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$. Во натамошните разгледувања за реалниот број формално ќе ја прифатиме ознаката $\lambda = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$.

Бидејќи равенството $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$ е еквивалентно на равенството $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AB}$ имаме $\frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{\lambda}$.

Дефиниција. Нека страната AB на ΔABC лежи на правата (p). Точката P ја нарекуваме точка на Менелај за страната AB ако $P \in (p)$ и $P \not\equiv A, B$. Аналогно се дефинираат точките на Менелај за страните BC и CA на ΔABC.

Теорема (Менелај). Нека D, E и F се точки на Менелај за страните BC, CA и AB на произволен ΔABC, соодветно. Точките D, E и F се колинеарни ако и само ако $\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} = -1$.

Доказ. Нека D, E и F се точки на Менелај за страните BC, CA и AB, чии афикси се p, q и r, соодветно. Ако $\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} = \lambda, \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} = \mu, \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} = \nu$, тогаш од

$$\overrightarrow{BD} = p - b, \quad \overrightarrow{DC} = c - p, \quad \overrightarrow{CE} = q - c, \quad \overrightarrow{EA} = a - q, \quad \overrightarrow{AF} = r - a, \quad \overrightarrow{FB} = b - r$$

за афиксите p, q и r на точките D, E и F добиваме

$$p = \frac{b+\lambda c}{1+\lambda}, \quad q = \frac{c+\mu a}{1+\mu}, \quad r = \frac{a+\nu b}{1+\nu}. \tag{1}$$

Точките D, E и F се колинеарни ако и само ако $\frac{p-q}{\overline{p}-\overline{q}} = \frac{r-q}{\overline{r}-\overline{q}}$. Ако во последното равенство од (1) ги замениме вредностите за p, q и r и добиеното равенство го помножиме со $(1+\lambda)(1+\mu)(1+\nu)$, после средувањето добиваме

$$(1+\lambda\mu\nu)(a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a} - b\overline{a} - c\overline{b} - a\overline{c}) = 0. \tag{2}$$

Значи, точките D, E и F се колинеарни ако и само ако е исполнето равенството (2). Конечно, точките D, E и F се колинеарни ако и само ако $1+\lambda\mu\nu = 0$ (зошто?), односно ако и само ако $\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} = -1$.

Пример. Даден е ΔABC и точки D и E на страните BC и CA, соодветно, такви, што $\overline{BD}=\overline{CE}=\overline{AB}$. Низ точката D повлекуваме права (l) паралелна на AB. Ако $M=(l)\cap BE$ и $F=CM\cap AB$, тогаш

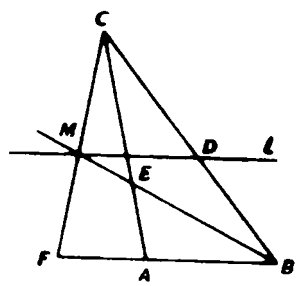
$$\overline{AB}^3=\overline{AE}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{CD}.$$

Решение. Да го разгледаме ΔACF (црт. 1). Точките E, M и B се точки на Менелај за страните AC, CF и AF, соодветно и по услов се колинеарни. Од теоремата на Менелај имаме

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BF}}\cdot\frac{\overrightarrow{FM}}{\overrightarrow{MC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}=-1,$$

од што следува

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}\cdot\frac{\overline{FM}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1.$$

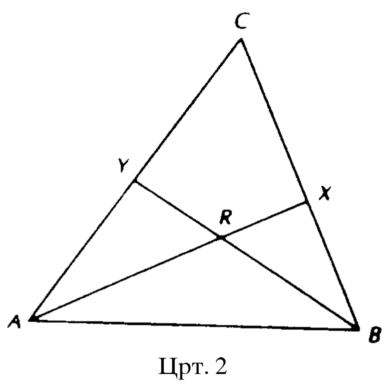


Црт. 1

Бидејќи $DM \,||\, BF$ добиваме $\frac{\overline{FM}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$. Ако замениме во претходното равенство добиваме $\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}\cdot\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$ и како $\overline{BD}=\overline{CE}=\overline{AB}$ добиваме $\overline{AB}^3=\overline{AE}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{CD}$. ♦

Пример. Даден е ΔABC и точки X и Y на страните BC и CA, соодветно. Нека $R=AX\cap BY$ и $\frac{\overrightarrow{AY}}{\overrightarrow{YP}}=p,\ \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RX}}=q$, каде $0<p<q$.

Пресметајте го односот $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}}$.



Црт. 2

Решение. Да го разгледаме ΔAXC. Точките B, R и Y се точки на Менелеј за страните CX, AX и AC, соодветно и по услов се колинеарни (црт. 2). Според теоремата на Менелај имаме $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RX}}\cdot\frac{\overrightarrow{XB}}{\overrightarrow{BC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}}=-1$. Значи,

$$\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{XB}}=\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RX}}\cdot\frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}}=-\frac{q}{p}$$

и како $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{XC}$ и $\overrightarrow{XB}=-\overrightarrow{BX}$ со замена во последното равенство добиваме $\frac{\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{XC}}{\overrightarrow{BX}}=\frac{q}{p}$ односно $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}}=\frac{p}{q-p}$. ♦

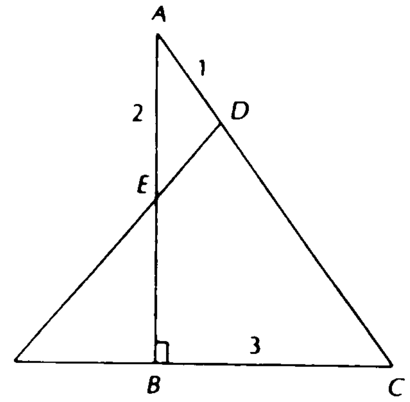
Пример. Даден е правоаголен ΔABC со прав агол во темето B и страни $\overline{AB}=4, \overline{BC}=3$. Точката E е средина на страната AB, а точката D лежи на страната AC и $\overline{DA}=1$. Нека $F=DE\cap BC$. Најдете ја должината на отсечката BF.

Решение. Да го разгледаме ΔABC (црт. 3). Точките D, E и F се точки на Менелај за страните CA, AB и BC, соодветно и по услов се колинеарни. Од теоремата на Менелај имаме

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = 1. \qquad (3)$$

Од условот на задачата наоѓаме $\overline{FC} = \overline{FB} + \overline{CB} = \overline{FB} + 3$, $\overline{DA} = 1$ и $\overline{AE} = \overline{EB} = 2$. Понатаму, од Питагоровата теорема следува

$$\overline{CA} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2} = 5.$$



Црт. 3

Според тоа, $\overline{CD} = \overline{CA} - \overline{DA} = 4$ и ако замениме во (3) после средувањето наоѓаме $\overline{FB} = 1$. ♦

ДВЕ ВАЖНИ ПОСЛЕДИЦИ НА ТЕОРЕМА НА МЕНЕЛАЈ

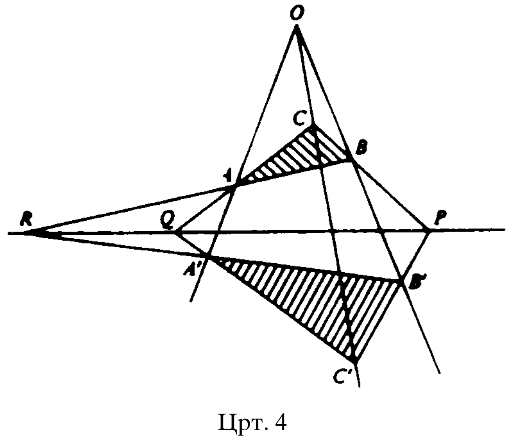
Во овој дел, користејќи ја теоремата на Менелај, ќе ја докажеме теоремата на Дезарг која претставува фундаментален резултат во проективната геометрија. Исто така, ќе ја докажеме и теоремата на Паскал за шестаголник впишан во кружница.

Дефиниција. Триаголниците ABC и $A'B'C'$ ги нарекуваме **кополарни** ако правите AA', BB' и CC' се сечат во една точка.

Триаголниците ABC и $A'B'C'$ ги нарекуваме **коосни** ако пресечните точки на правите BC и $B'C'$, CA и $C'A'$, AB и $A'B'$ лежат на една права.

Теорема (Дезарг). Триаголниците ABC и $A'B'C'$ се кополарни ако и само ако се коосни.

Доказ. Нека триаголниците ABC и $A'B'C'$ се кополарни и нека правите AA', BB' и CC' се сечат во точката O. Со P, Q, R да ги означиме пресеците на правите BC и $B'C'$, CA и $C'A'$, AB и $A'B'$ соодветно (црт. 4). Од теоремата на Менелај, применета на триаголниците BCO, CAO и



Црт. 4

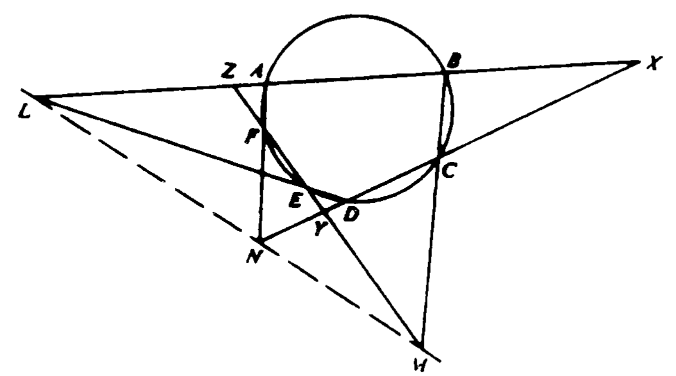
AOB следува

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{C'O}}\cdot\frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{B'B}}=-1$$
$$\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{A'O}}\cdot\frac{\overrightarrow{OC'}}{\overrightarrow{C'C}}=-1$$
$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{B'O}}\cdot\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{A'A}}=-1$$

Ако ги помножиме горните равенства добиваме $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=-1$ и од што заради теоремата на Менелај заклучуваме дека точките P,Q и R се колинеарни. Значи, триаголниците ABC и $A'B'C'$ се коосни.

Обратно, нека претпоставиме дека P,Q и R се колинеарни и нека правите AA' и BB' се сечат во точката O. Сега триаголниците AQA' и BPB' се кополарни, па затоа се коосни. Според тоа, точките O,C и C' се колинеарни, што значи коосните триаголници се кополарни. ♦

Теорема (Паскал). Нека шестаголникот $ABCDEF$, чии спротивни страни не се колинеарни е впишан во кружница. Со L,M,N да ги означиме пресечните точки на трите парови спротивни страни AB и ED, BC и EF, FA и CD,



Црт. 5

соодветно. Тогаш, точките L,M,N се колинеарни.

Доказ. Нека X,Y,Z се пресечните точки на AB и CD, CD и EF, EF и AB, соодветно (црт. 5). Точките D,E,L; F,A,N; B,C,M се точките на Менелај за ΔXYZ, па од теоремата на Менелај добиваме

$$\frac{\overrightarrow{XL}}{\overrightarrow{LZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZE}}{\overrightarrow{EY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YD}}{\overrightarrow{DX}}=-1,\qquad \frac{\overrightarrow{XA}}{\overrightarrow{AZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZF}}{\overrightarrow{FY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YN}}{\overrightarrow{NX}}=-1,\qquad \frac{\overrightarrow{XB}}{\overrightarrow{BZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZM}}{\overrightarrow{MY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YC}}{\overrightarrow{CX}}=-1.$$

Ако ги помножиме горните равенства добиваме

$$\left(\frac{\overrightarrow{XL}}{\overrightarrow{LZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZM}}{\overrightarrow{MY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YN}}{\overrightarrow{NX}}\right)\cdot\frac{\overrightarrow{ZE}}{\overrightarrow{EY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YD}}{\overrightarrow{DX}}\cdot\frac{\overrightarrow{XA}}{\overrightarrow{AZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZF}}{\overrightarrow{FY}}\cdot\frac{\overrightarrow{XB}}{\overrightarrow{BZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{YC}}{\overrightarrow{CX}}=-1. \tag{1}$$

Понатаму, ако се искористи степенот на точките X, Y, Z во однос на кружницата, тогаш лено од геометриската интерпретација на комплексните броеви следува

$$\overrightarrow{ZE}\cdot\overrightarrow{ZY}=\overrightarrow{AZ}\cdot\overrightarrow{BZ}, \quad \overrightarrow{EY}\cdot\overrightarrow{FY}=\overrightarrow{YD}\cdot\overrightarrow{YC}, \quad \overrightarrow{CX}\cdot\overrightarrow{DX}=\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XB}.$$

Ако замениме во (1) добиваме $\frac{\overrightarrow{XL}}{\overrightarrow{LZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZM}}{\overrightarrow{MY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YN}}{\overrightarrow{NX}}=-1$, што според теоремана на Менелај значи дека точките L, M и N се колинеарни. ♦