Самоил Малчески
Скопје

ЕДНО СВОЈСТВО НА НЕОСТРОАГОЛНИТЕ ТРИАГОЛНИЦИ

Во редовната настава се запозна со Питагоровата теорема и некои нејкзини елементарни примени. Меѓутоа, значењето на Питагоровата теорема, т.е. нејзината примена е многу поголема. Во нашите следни разгледувања со помош на оваа теорема ќе докажеме едно својство на неостроаголните триаголници.

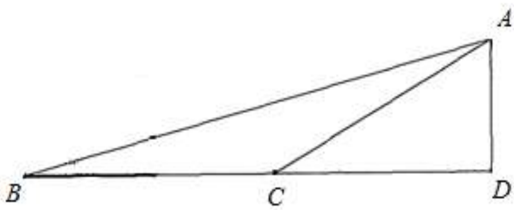
Тврдење. Нека $\triangle ABC$ што $\measuredangle BCA \geq 90^\circ$. Тогаш точно е неравенството

$$\overline{AB}^2 \geq \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2. \qquad (1)$$

Доказ. Ако $\measuredangle BCA = 90^\circ$, тогаш $\triangle ABC$ е правоаголен, па од Питагоровата теорема следува

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2,$$

т.е. точно е неравенството (1). Нека $\measuredangle BCA > 90^\circ$. Ја продолжуваме страната BC преку темето C и нека D е подножјето на нормалата повлечена од темето A кон правата BC. Тогаш триаголниците ABD и ACD се правоаголни, со прав агол при темето D, па од Питагоровата теорема следува



$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \text{ и } \overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2.$$

Но, $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD}$, па од претходните две равенства следува

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + (\overline{BC} + \overline{CD})^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{BC}\cdot\overline{CD} + \overline{CD}^2 \\ &= \overline{BC}^2 + (\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2) + 2\overline{BC}\cdot\overline{CD} = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2\overline{BC}\cdot\overline{CD} \\ &> \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2,\end{aligned}$$

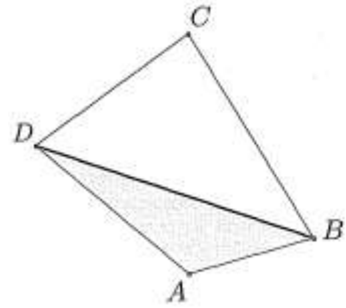
т.е. во (1) важи знак за стриги неравенство. ■

Во следната задача ќе разгледаме една примена на претходно докажаното својство.

Задача. Четири точки во рамнината определуваат шест отсечки со должини $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq a_6$. Докажи дека $a_1\sqrt{2} \leq a_6$.

Решение. Ќе го користиме претходно докажаното својство за неостроаголен триаголник. Ќе разгледаме неколку случаи.

Прв случај. Четирите точки, да ги означиме со A, B, C, D, се темиња на конвексен четириаголник $ABCD$ (цртеж десно). Тогаш еден од аглите на четириаголникот е поголем или еднаков на 90°. Без ограничување наопштоста можеме да претпоставиме дека тоа е аголот во темето A. Тогаш за $\triangle DAB$ важи



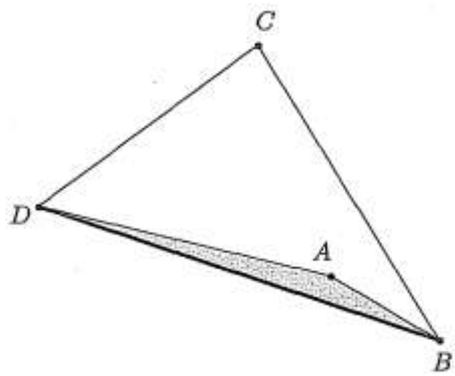
$$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 \le \overline{BD}^2 . \qquad (2)$$

Бидејќи $\overline{BD} \le a_6$ и $a_1 \le \overline{AB}$, $a_1 \le \overline{AD}$ од (2) следува

$$2a_1^2 = a_1^2 + a_1^2 \le \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 \le \overline{BD}^2 \le a_6^2 ,$$

па затоа $2a_1^2 \le a_6^2$, т.е. $a_1\sqrt{2} \le a_6$

Втор случај. Три од дадените точки се во темиња на триаголник во кој се наоѓа четвртата точка. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека точката A се наоѓа во внатрешноста на $\triangle BCD$ (цртеж десно). Јасно, најмалку еден од $\measuredangle BAD, \measuredangle BAC, \measuredangle CAD$ е тап и без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа е BAD. Тогаш повторно важи (2) и како во првиот случај се докажува дека $a_1\sqrt{2} \le a_6$.



Трет случај. Четирите точки се колинеарни. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека точките A, B, C и D се распоредени како на цртежот десно. Тогаш $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ и како

$$\overline{AD} = a_6 \text{, а } \overline{AB} \ge a_1, \overline{BC} \ge a_1, \overline{CD} \ge a_1$$

добиваме

$$\overline{AD} = a_6 = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} \ge 3a_1 > a_1\sqrt{2} .$$