Диференцијални равенки со раздвоиви променливи

1. Најди го општото решение на диференцијалната равенка

$$(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0 .$$

Решение. Равенката ќе ја запишеме во облик

$x(y^2+1)dx = y(x^2-1)dy$, т.е. $\dfrac{xdx}{x^2-1}=\dfrac{y}{y^2+1}dy$.

Ако интегрираме, добиваме

$\displaystyle\int\frac{xdx}{x^2-1}=\int\frac{y}{y^2+1}dy$, т.е. $\dfrac{1}{2}\ln(x^2-1)=\dfrac{1}{2}\ln[(y^2+1)C]$.

Значи, општото решение на диференцијалната равенка е $x^2-1=C(y^2+1)$.

2. Најди го општото решение на диференцијалната равенка:

$$yy'=\frac{1-2x}{y} .$$

Решение. Диференцијалната равенка ќе ја запишеме во облик:

$y^2\dfrac{dy}{dx}=1-2x \quad\Rightarrow\quad y^2dy=(1-2x)dx$.

Ако интегрираме, добиваме:

$\displaystyle\int y^2dy=\int(1-2x)dx$, т.е. $\dfrac{1}{3}y^3=x-x^2+C$.

Значи, општото решение на диференцијалната равенка е

$y=\sqrt[3]{3x-3x^2+3C}$

3. Најди го општото решение на диференцијалната равенка:

$$xyy'=1-x^2 .$$

Решение. Ќе направиме трансформација на обликот на равенката:

$xy\dfrac{dy}{dx}=1-x^2 \quad\Rightarrow\quad ydy=\dfrac{1-x^2}{x}dx$.

Ако интегрираме добиваме:

$\displaystyle\int ydy=\int\frac{1-x^2}{x}dx$, т.е. $\displaystyle\frac{1}{2}y^2=\int\left(\frac{1}{x}-x\right)dx=\ln x-\frac{1}{2}x^2+\ln C$

Значи, општо решение на диференцијалната равенка е

$x^2+y^2=\ln(Cx)^2$

4. За диференцијалната равенка

$$y'tgx-y=a ,$$

определи го општото решение.

Решение./

Резултат: $y=C\sin x-a$

5. Најди го општото решение, $\varphi(u,v,C)=0$ на диференцијалната равенка

$$e^{-u}\left(1+\frac{du}{dv}\right)=1 .$$

Решение. Ќе направиме трансформација на диференцијалната равенка. При тоа

$1+\dfrac{du}{dv}=e^u$, т.е. $\dfrac{du}{dv}=e^u-1$.

Значи, $\dfrac{du}{e^u-1}=dv$ и ако интегрираме добиваме:

$\displaystyle\int\frac{du}{e^u-1}=\int dv$, т.е. $\displaystyle\int\frac{e^udu}{e^u(e^u-1)}=v+C$

Бидејќи

$\displaystyle\int\frac{e^udu}{e^u(e^u-1)}=[t=e^u\Rightarrow dt=e^udu]=\int\frac{dt}{t(t-1)}=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt=\ln\frac{t-1}{t}+C$,

општото решение на диференцијалната равенка е

$\ln\dfrac{e^u-1}{e^u}=v+C$.

6. Определи го она решение на диференцијалната равенка

$$y'\sin x=y\ln y ,$$

кое го задоволува условот $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e$.

Решение. Равенката ќе ја запишеме во облик $\dfrac{dy}{dx}\sin x=y\ln y$, т.е. $\dfrac{dy}{y\ln y}=\dfrac{dx}{\sin x}$. Според тоа, ако интегрираме добиваме:

$$\int\frac{dy}{y\ln y}=\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=[\tfrac{x}{2}=t, dx=2dt]=\int\frac{dt}{\sin t\cos t}=\int\frac{1}{\text{tg}t}\frac{dt}{\cos^2 t}=\ln\text{tg}t+\ln C=\ln\left|C tg\frac{x}{2}\right|.$$

Значи, општо решение на диференцијалната равенка е $\ln y=\ln\left|C\text{tg}\frac{x}{2}\right|$, т.е. $y=C\text{tg}\frac{x}{2}$.

Ако во општото решение замениме $y=e$ и $x=\frac{\pi}{2}$ добиваме:

$e=C\text{tg}\frac{\pi}{4}$, т.е. $C=e$.

Бараното партикуларно решение е $y=e\,\text{tg}\frac{x}{2}$.

7. Определи го решението на диференцијалната равенка

$$y-xy'=b(1+x^2y'),$$

кое ги задоволува почетните услови $y(1)=1$.

Решение./

Резултат: $y=\dfrac{b+x}{1+bx}$

8. За диференцијалната равенка

$$(\sqrt{xy}-\sqrt{x})dy+ydx=0,$$

определи го она решение кое ги исполнува почетните услови $y=1$ за $x=1$.

Решение. Ќе направиме трансформација на обликот на диференцијалната равенка:

$\sqrt{x}(\sqrt{y}-1)dy=-ydx$, т.е. $\dfrac{\sqrt{y}-1}{y}dy=-\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$.

Ако интегрираме, добиваме:

$\int\left(\dfrac{1}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{y}\right)dy=-\int\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$, т.е. $2\sqrt{y}-\ln y=-2\sqrt{x}+\ln C$.

Значи, општото решение на диференцијалната равенка е

$$2\sqrt{y}+2\sqrt{x}=\ln(Cy).$$

Ако во општото решение замениме $x=1$ и $y=1$ добиваме $4=\ln C$, т.е. $C=e^4$.

Бараното партикуларно решение е

$$2\sqrt{y}+2\sqrt{x}-4=\ln y.$$

9. Определи го решението на диференцијалната равенка

$$(1+x^2)y'+y\sqrt{1+x^2}=xy$$

кое ги исполнува почетните услови $y=1$ **за** $x=0$**.**

Решение./

10. Определи го решението на равенката $(1+y^2)dx-xydy=0$ кое го задоволува условот $y=1$ за $x=2$.

Решение./

11. Најди ги кривите кај кои субтангентата е еднаква на двојната апсциса.

Решение./

12. Определи ја равенката на кривите кај кои субнормалата има константна големина p.

Решение./

13. Определи ја равенката на кривата која минува низ точката $(-1,1)$, ако коефициентот на правецот во која и да е нејзина точка е еднаков на квадратот на ординатата на допирната точка.

Решение./

14. Најди го општото решение на диференцијалната равенка

$$(x-1)(y^2-y+1)dx-(y+1)(x^2+x+1)dy=0.$$

Решение./

15. Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$$(x^2+a^2)(y^2+b^2)dx+(x^2-a^2)(y^2-b^2)dy=0.$$

Решение./

16. Најди го општото решение на диференцијалната равенка:

$$(x-4)^2y'=x(y-1)$$

Решение./

17.Најди го општото решение на диференцијалната равенка

$y'=y+1$.

Решение.Диференцијалната равенка е со раздвоиви променливи $\frac{dy}{y+1}=dx$. Ако интегрираме, добиваме:

$\int\frac{dy}{y+1}=\int dx$, т.е. $\ln(y+1)=\ln x+\ln C$.

Значи, општото решение на диференцијалната равенка е

$y+1=Cx$

18.Определи го она решение на диференцијалната равенка

$y'=\frac{1}{x(y+1)}$.

Решение./

Резултат: $(1+y)^2=\ln x^2+C$

19.Најди го решението на диференцијалната равенка

$y'(y^2+y)=2-x$

кое минува низ точката $(2,1)$.

Решение./

Резултат: $2y^3+3y^2+3(2-x)^2=5$

20.**а)**Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$y'=(y-x)^{\frac{2}{3}}+1$.

б)Дали дадената равенка има решенија кои не можат да се добијат од општото решение.

Решение./

Резултат: а) $y=\left(\frac{x}{3}+C\right)^3+x$, б) $y(x)=x$

21. Со елиминација на параметарот C определи ја диференцијалната равенка на фамилијата криви $y=-x-1+Ce^x$.

Решение.Бидејќи $y'=-1+Ce^x$, од системот $\begin{cases} y=-x-1+Ce^x \\ y'=-1+Ce^x \end{cases}$. Ако од втората равенка ја одземеме првата равенка, добиваме:

$y'-y=x$

Значи, диференцијална равенка на фамилијата криви е $y'-y=x$, која секако може да се сведе на диференцијална равенка кај која променливите се раздвојуваат.

22.Определи го решението на диференцијалната равенка

$(1+e^x)\,y\,y'=e^y$

за кое $y=0$ кога $x=0$.

Решение./

Резултат: $(1+y)e^{-y}=\ln\frac{1+e^x}{2}+1-x$

23.Најди го општото решение на диференцијалната равенка

$y'=\frac{y+1}{x}$.

Решение./

Резултат: $y=Cx-1$

24.Реши ја диференцијалната равенка

$y'=\frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$.

Решение./

Резултат: $(1+x^2)(1+y^2)=Cx^2$

25.Реши ја диференцијалната равенка

$xy'+1=e^y$.

Решение./

Резултат: $(1+Cx)e^y=1$.

26.Определи ги кривите кај кои отсечката од тангентата што се наоѓа меѓу координатните оски се дели на половина со допирната точка. Потоа определи ја онаа крива кој минува низ точката $A(2,3)$.

Решение.Ако $(x_\circ, y_\circ)$ е допираната точка и $y - y_\circ = y'_\circ(x - x_\circ)$ е равенката на тангентата, тогаш пресечните точки на тангентата со координатните оски се $\left(x_\circ - \frac{y_\circ}{y'_\circ}, 0\right)$ и $(0, y_\circ - y'_\circ x_\circ)$. Од условот на задачата имаме

$$\sqrt{\left(x_\circ - x_\circ + \frac{y_\circ}{y'_\circ}\right)^2 + (y_\circ - 0)^2} = \sqrt{x_\circ^2 + (y_\circ - y_\circ + y'_\circ x_\circ)^2}\ .$$

Последното равенство може да се трансформира во облик $y'_\circ = \frac{y_\circ}{x_\circ}$. Значи, бараната равенка е

$$y' = \pm\frac{y}{x}\ .$$

а)За равенката $y' = \frac{y}{x}$, добиваме дека $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. Ако интегрираме добиваме:

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x}, \text{ т.е. } \ln y = \ln x + \ln C\ .$$

Бараните решенија се $y = Cx$.

б)За равенката $y' = -\frac{y}{x}$, имаме $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$. Ако интегрираме добиваме

$$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x}, \text{ т.е. } \ln y = -\ln x + \ln C\ .$$

Во овој случај бараните решенија се $xy = C$.

Резултат: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, $xy = C$, $xy = 6$.

27.Определи ги кривите кај кои аголот θ од поларната оска до радиус векторот на допирната точка е еднаков на аголот ω од продолжението на радиус векторот на допирната точка до тангентата.

Решение./

Резултат: $\frac{dr}{d\theta} = r\mathrm{ctg}\theta$, $r = C\sin\theta$.

28.Определи ја фамилијата криви за кои отсечката од тангентата од допирната точка до апсцисната оска се полови со точката на пресек на тангентата со ординатната оска.

Решение./

Резултат:Фамилија параболи $y^2 = Cx$

29.Определи ги сите криви за кои отсечката од нормалата од точката на кривата до апсцисната оска има константна должина a.

Решение./

Резултат: $(x - C)^2 + y^2 = a^2$.

30. Најди ги сите криви за кои субтангентата е пропорционална на апсцисата на допирната точка(коефициент на пропорционалност е k).

Решение.Бидејќи должината на субтангентата е $d = \frac{y_\circ}{y'_\circ}$, од условот на задачата добиваме:

$$\frac{y_\circ}{y'_\circ} : x_\circ = k\ .$$

Овој услов е диференцијалната равенка $y' = \frac{y}{kx}$. Таа е со раздвоиви променливи, т.е. $k\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. Ако интегрираме, добиваме:

$$k\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x}, \text{ т.е. } k\ln y = \ln x + \ln C\ .$$

Значи, бараната фамилија криви е $y^k = Cx$.

Резултат: $y^k = Cx$.

Хомогена диференцијална равенка

1. Најди општо решение на диференцијалната равенка

$$y'=\frac{y^2}{x^2}-2 .$$

Решение./Диференцијалната равенка е од облик $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$, каде $f(t)=t^2-2$, т.е. таа е хомогена. Воведуваме смена $\frac{y}{x}=u$, т.е. $y=ux$, каде што $u=u(x)$ е нова непозната функција која ќе ја определиме. При тоа, $y'=u'x+u$ и

$$u'x+u=u^2-2 .$$

Последната диференцијалнат равенка $x\frac{du}{dx}=u^2-u-2$ ќе ја запишеме во облик

$$\frac{du}{u^2-u-2}=\frac{dx}{x} .$$

Ако интегрираме добиваме

$$\int\frac{du}{u^2-u-2}=\int\frac{dx}{x}\text{ , т.е. }\int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u+1}\right)du=\ln x+\ln C .$$

Според тоа $\frac{1}{3}\ln\frac{u-2}{u+1}=\ln Cx$. Значи, општото решение е $\sqrt[3]{\frac{\frac{y}{x}-2}{\frac{y}{x}+1}}=Cx$, т.е. $\sqrt[3]{\frac{y-2x}{y+x}}=Cx$.

Резултат: $\sqrt[3]{\frac{y-2x}{y+x}}=Cx$.

2. Најди општо решение на диференцијалната равенка

$$y'=\frac{x+y}{x-y} .$$

Решение. Диференцијалната равенка е од облик $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ каде $f(t)=\frac{t+1}{t-1}$, т.е. таа е хомогена. Воведуваме смена $\frac{y}{x}=u$, т.е. $y=ux$, $y'=u'x+u$ каде $u=u(x)$ е нова непозната функција која ќе ја определиме. При тоа

$$u'x+u=\frac{u+1}{u-1}\text{ , т.е. }x\frac{du}{dx}=\frac{u+1}{u-1}-u=\frac{-u^2+2u+1}{u-1} .$$

Равенката ќе ја запишеме во облик

$$-\frac{u-1}{u^2-2u-1}du=\frac{dx}{x} .$$

Ако интегрираме добиваме:

$$-\int\frac{u-1}{u^2-2u-1}du=\int\frac{dx}{x}\text{ , т.е. }-\frac{1}{2}\ln(u^2-2u-1)=\ln Cx .$$

Бараното општо решение е $y^2-2yx-x^2=\frac{1}{C^2}$

3. Најди го општото решение на диференцијалната равенка:

$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2} .$$

Решение. Равенката ќе ја запишеме во облик $y'=\frac{2\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$, па според тоа таа е хомогена, т.е. од облик $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$, каде $f(t)=\frac{2t}{1-t^2}$. Заради тоа воведуваме смена $\frac{y}{x}=u$, т.е. $y=ux$, $y'=u'x+u$, каде што $u=u(x)$ е нова непозната функција која ќе ја определиме. Диференцијалната равенка го добива обликот

$$u'x+u=\frac{2u}{1-u^2}\text{ , т.е. }x\frac{du}{dx}=\frac{u+u^3}{1-u^2} .$$

Добивме диференцијална равенка кај која променливите се раздвојуваат. При тоа

$$\frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du=\frac{dx}{x} .$$

Ако интегрираме добиваме:

$$\int\frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du=\int\frac{dx}{x} .$$

Бидејќи

$$\int\frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du=\frac{1}{2}\int\frac{1-u^2}{u^2(1+u^2)}2udu=[u^2=t,2udu=dt]=\frac{1}{2}\int\frac{1-t}{t(1+t)}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t+1}\right)dt=\frac{1}{2}\ln t-\ln(t+1)=\ln\frac{u}{u^2+1} ,$$

од каде добиваме $\ln\frac{u}{u^2+1}=\ln Cx$,т.е. $\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y^2}{x^2}+1}=Cx$.

Значи, општо решение на диференцијалната равенка е $\frac{y}{y^2+x^2}=C$.

Резултат: $\frac{y}{y^2+x^2}=C$.

4. За диференцијалната равенка

$$y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x},$$

определи го општото решение.

Решение. Диференцијалната равенка ќе ја запишеме во облик $y'=\frac{1}{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$, од каде гледаме дека таа е од облик $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$, каде $f(t)=\frac{1}{t}+t$.

Воведуваме смена $\frac{y}{x}=u$, $y=ux$, $y'=u'x+u$, каде $u=u(x)$ е нова непозната функција која ќе ја определиме. При тоа, равенката го добива обликот

$$u'x+u=\frac{1}{u}+u \text{ , т.е. } x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u} .$$

Добивме диференцијална равенка кај која променливите се раздвојуваат:

$$udu=\frac{dx}{x} .$$

Ако интегрираме добиваме $\int udu=\int\frac{dx}{x}$, т.е. $\frac{1}{2}u^2=\ln Cx$.

Значи, општото решение на диференцијалната равенка е $y^2=x^2\ln(Cx)^2$.

Резултат: $y^2=x^2\ln(Cx)^2$

5. Нјади го општото решение на диференцијалната равенка

$$xy'-y=\sqrt{x^2+y^2} .$$

Решение./

Резултат: $x^2=C^2+2Cy$ **.**

6. Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$$y'=\frac{x^2+y^2}{xy} .$$

Решение./

Резултат: $y=x\sqrt{\ln Cx^2}$

7. Најди го општото решение на диференцијалната равенка

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{y}{y'}-x .$$

Решение./

Резултат: $y^2=2Cx+C^2$

8. Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$$y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x} .$$

Решение. Воведуваме смена $\frac{y}{x}=u$, $y=ux$, $y'=u'x+u$. Ако замениме во равенката добиваме

$$u'x+u=e^u+u \text{ , т.е. } x\frac{du}{dx}=e^u .$$

Добиената диференцијална равенка е со раздвоиви променливи $e^{-u}du=\frac{dx}{x}$. Ако интегрираме $\int e^{-u}du=\int\frac{dx}{x}$ добиваме $-e^{-u}=\ln Cx$. Значи, општото решение на диференцијалната равенка е

$$-e^{-\frac{y}{x}}=\ln Cx$$

Резултат: $-e^{-\frac{y}{x}}=\ln Cx$.

9. Најди го општото решение на диференцијалната равенка:

$$xy'=y(\ln y-\ln x) .$$

Решение.Диференцијалната равенка ќе ја трансформираме во равенката $y'=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$. Очигледно таа е од облик $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$, каде $f(t)=t\ln t$.

Воведуваме смена $\frac{y}{x}=u$, $y=ux$, $y'=u'x+u$, каде $u=u(x)$ е нова непозната функција која ќе ја определиме. При тоа

$u'x+u=u\ln u$, т.е. $x\frac{du}{dx}=u\ln u-u$.

Добиената диференцијална равенка е со раздвоиви променливи,

$$\frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x}.$$

Ако интегрираме, добиваме

$\int\frac{du}{u(\ln u-1)}=\int\frac{dx}{x}$, т.е. $\ln(\ln u-1)=\ln Cx$.

Значи, општото решение на равенката е $y=xe^{Cx+1}$

10. За диференцијалната равенка

$$(xy'-y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=x,$$

определи го решението за кое $y=0$ кога $x=1$.

Решение./

Резултат: $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.

11. Определи ја фамилијата криви кои под прав агол ја сечат фамилијата кругови

$$(x-C)^2+y^2=C^2.$$

Решение./

Резултат:

12. Определи ја фамилијата криви при кои квадратот од отсечката што ја отсекува тангентата од ординатната оска е еднаков на производот од апсцисата и ординатата на допирната точка.

Решение./

Резултат: $xe^{\pm 2\sqrt{\frac{y}{x}}}=C$.

13. Најди го општото решение на диференцијалната равенка

$$y'=\frac{y^2-x}{2y(x+1)}.$$

Решение./

Резултат: $y^2=x+(x+1)\ln\frac{C}{x+1}$

14. Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$$(x+y+1)dx=(2x+2y-1)dy.$$

Решение./

Резултат: $x-2y+\ln|x+y|=C$

15. Реши ја равенката

$$y'=\left(\frac{x-y-1}{2x-2y+1}\right)^2.$$

Решение./Равенката можеме да ја претставиме во облик

$$y'=\left(\frac{x-y-1}{2(x-y)+1}\right)^2.$$

Заради тоа воведуваме смена $x-y=u$, од каде $y'=1-u'$, $u=u(x)$ е нова непозната функција, па според тоа

$$1-u'=\left(\frac{u-1}{2u+1}\right)^2.$$

Последната равенка можеме да ја запишеме во облик

$$\frac{4u^2+4u+1}{3u^2+6u}du=dx.$$

Ако интегрираме добиваме

$$\int dx=\int\frac{4u^2+4u+1}{3u^2+6u}du=\int\frac{4u^2+8u-4u+1}{3u^2+6u}du=\frac{4}{3}\int\frac{u^2+2u}{u^2+2u}du+\frac{1}{3}\int\frac{-4u+1}{u^2+2u}du=\frac{4}{3}u+\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{2}\frac{1}{u}-\frac{9}{2}\frac{1}{u+2}\right)du=\frac{4}{3}u+\frac{1}{6}\ln u-\frac{9}{6}\ln(u+2)$$

Значи, $x=\frac{4}{3}(x-y)+\frac{1}{6}\ln(x-y)-\frac{9}{6}\ln(x-y+2)+C$ е општото решение на диференцијалната равенка.

Резултат: $8y-2x-\ln(x-y)+9\ln(x-y+2)=C$.

16. Најди го општото решение на диференцијалната равенка

$$y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2 .$$

Решение./

Резултат: $e^{-2\mathrm{arctg}\frac{y+2}{x-3}} = C(y+2)$.

17. Реши ја равенката

$$(2y-3x+1)^2 y' - (3y-2x-4)^2 = 0 .$$

Решение./

Резултат: $(y-4x+6)^5(4y-x-9)^5 = C(5y-5x-3)$

18. Определи го општото решение на диференцијалната нравенка

$$xy' = y + x\frac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}{\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)} .$$

Решение./

Резултат: $Cx = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$**.**

19. Решението на равенката

$$y' = \frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

претстави го во интегрален облик. Определи ја функцијата φ така да $y = \frac{x}{\ln|Cx|}$ е решение на дадената равенка.

Решение./

Резултат: $\ln|x| = \int \frac{du}{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}$ **,** $\varphi\left(\frac{1}{u}\right) = -u^2$ или $\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{y^2}{x^2}$.

20. За диференцијалната равенка

$$(y^2 - 3x^2)dy + xydx = 0 ,$$

определи го решението кое ги задоволува условите $y = 1$, за $x = 0$.

Решение./

Резултат:

21. Најди го општото решение на диференцијалната равенка

$$y^2 + x^2 y' = xyy' .$$

Решение./

Резултат: $e^{\frac{y}{x}} = Cy$.

22. Определи го општото решение на диферецијалната равенка

$$y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} .$$

Решение./

Резултат: $x = Ce^{\mathrm{arctg}\frac{y}{x}}$ **.**

23. Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$$\frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy} .$$

Решение./

Резултат: $y(y-2x)^3 = C(y-x)^2$

24. Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$$\frac{xy' - y}{x} = tg\frac{y}{x} .$$

Решение./

Резултат: $\sin\frac{y}{x} = Cx$

25. За диференцијалната равенка

$$y' = \frac{2y - x - 5}{2x - y + 4}$$

определи го општото решение.

Решение./

Резултат: $(x+y-1)^3 = C(x-y+3)$.

26. Најди го општото решение на диференцијалната равенка

$$y'=\frac{2x-y+1}{x-2y+1}.$$

Решение. Воведуваме смени $x=X+\alpha$, $y=Y+\beta$, каде α и β се коефициенти кои ќе ги определиме. При тоа $dx=dX$ и $dy=dY$ па според тоа, равенката $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y+1}{x-2y+1}$, го добива обликот $\frac{dY}{dX}=\frac{2X-Y+2\alpha-\beta+1}{X-2Y+\alpha-2\beta+1}$. Непознатите коефициенти α и β ќе ги определиме од системот $\begin{cases}2\alpha-\beta+1=0\\ \alpha-2\beta+1=0\end{cases}$. Негово решение е $\alpha=-\frac{1}{3}$, $\beta=\frac{1}{3}$. Равенката го доби обликот $\frac{dY}{dX}=\frac{2X-Y}{X-2Y}$, т.е. $\frac{dY}{dX}=\frac{2-\frac{Y}{X}}{1-2\frac{Y}{X}}$. Воведуваме смена $\frac{Y}{X}=U$, т.е. $Y=UX$, $Y'=U'X+U$, каде $U=U(X)$ е непозната функција која ќе ја определиме. Според тоа

$$U'X+U=\frac{2-U}{1-2U},\ \text{т.е. } X\frac{dU}{dX}=2\frac{1-U+U^2}{1-2U}.$$

Добиената диференцијална равенка е со раздвоиви променливи , т.е. $-\frac{2U-1}{U^2-U+1}dU=2dX$ Ако интегрираме добиваме:

$$-\int\frac{2U-1}{U^2-U+1}dU=2\int dX,\ \text{т.е. } 2X=-\int\frac{2U-1}{U^2-U+1}dU=[\,t=U^2-U+1,\ dt=(2U-1)dU\,]=-\int\frac{dt}{t}=-\ln t+C=C-\ln(U^2-U+1).$$

Значи, општото решение на диференцијалната равенка е

$$2X+\ln\frac{Y^2-XY+X^2}{X^2}=C,\ \text{каде } X=x+\frac{1}{3},\ Y=y-\frac{1}{3}.$$

27. Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$$yy'+x=\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)^2. \tag{1}$$

Решение. Воведуваме смена $z=x^2+y^2$, каде $z=z(x)$ е нова непозната функција. Ако во (1) замениме $x+yy'=\frac{1}{2}z'$ и $z=x^2+y^2$ добиваме

$$\frac{1}{2}z'=\left(\frac{z}{x}\right)^2. \tag{2}$$

Равенката (2) е хомогена диференцијална равенка. Воведуваме смена $\frac{z}{x}=p$, $z=px$, каде $p=p(x)$ е нова непозната функција која ќе ја определиме. Ако во (2) замениме, добиваме

$$p+p'x=2p^2.$$

Последната равенка е со раздвоиви променливи $\frac{dp}{2p^2-p}=\frac{dx}{x}$. Ако интегрираме $\int\frac{dp}{2p^2-p}=\int\frac{dx}{x}$, добиваме:

$$\ln(2p-1)-\ln p=\ln Cx,\ \text{т.е. } \frac{2p-1}{p}=Cx.$$

Бидејќи $p=\frac{x^2+y^2}{x}$, општото решение на равенката е $\frac{2x^2+2y^2-x}{x^2+y^2}=Cx$.

Резултат: $\frac{2x^2+2y^2-x}{x^2+y^2}=Cx$

28. Определи ги кривите кај кои должината на субтангентата во произволна точка а аритметичка средина на координатите на допирната точка.

Решение./Субтангента е должината на проекцијата на отсечката од тангентата $y-y_\circ=y'_\circ(x-x_\circ)$ од допирната точка $(x_\circ,y_\circ)$ од бараната крива $y=y(x)$ до пресекот со Ox-оската, врз Ox оската. Бидејќи пресечна точка на тангентата со Ox оската е $\left(x_\circ-\frac{y_\circ}{y'_\circ},0\right)$, должината на субтангентата е $l=x_\circ-\left(x_\circ-\frac{y_\circ}{y'_\circ}\right)=\frac{y_\circ}{y'_\circ}$. Според условите од задачата бараната диференцијална равенка е

$$\frac{y_\circ}{y'_\circ}=\frac{x_\circ+y_\circ}{2},\ \text{т.е. } \frac{y}{y'}=\frac{x+y}{2}.$$

Истата можеме да ја запишеме во облик $y'=\frac{2y}{x+y}$, т.е. $y'=\frac{y}{x}\frac{2}{1+\frac{y}{x}}$. Значи, таа е од облик $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$,каде $f(t)=\frac{2t}{1+t}$, т.е. хомогена.

Воведуваме смена $\frac{y}{x}=u$, $y=ux$, $y'=u'x+u$ каде $u=u(x)$ е нова непозната функција која ќе ја определиме. При тоа

$$u'x+u=\frac{2u}{1+u},\ \text{т.е. } x\frac{du}{dx}=\frac{u-u^2}{1+u}.$$

Последната равенка е диференцијална равенка кај која променливите се раздвојуваат,

$$\frac{1+u}{u-u^2}du=\frac{dx}{x}.$$

Ако интегрираме, добиваме $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1+u}{u-u^2} du = \int \left(\frac{2}{1-u} + \frac{1}{u} \right) du = \ln u - 2\ln(1-u) = \ln \frac{u}{(1-u)^2}$, односно $Cx = \frac{u}{(1-u)^2}$. Непосредно се добива дека фамилијата криви е $(x-y)^2 - Cy = 0$.

Резултат: $\frac{y}{y'} = \frac{x+y}{2}$, $(x-y)^2 - Cy = 0$

29. Определи ги кривите кај кои количникот на должината на отсечката од Oy-оската што го отсекува тангентата и должината на отсечката од Ox оската што го отсекува нормалата на кривата во една иста точка е константа k.

Решение./

Резултат: $\frac{y - xy'}{yy' + x} = k$, $\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\frac{1}{k} arctg \frac{y}{x}}$ или $r = Ce^{-\frac{\theta}{k}}$.

30. Определи ја равенката на кривите кај кои должината на субтангентата е еднаква на збирот од апсцисата и ординатата на допирната точка.

Решение./

Резултат: $y = Ce^{\frac{x}{y}}$.

Линеарна диференцијална равенка од прв ред

1. Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$$y'+2xy = xe^{-x^2} .$$

Решение. Диференцијалната равенка е од облик $y'+f(x)y = g(x)$, т.е. линеарна диференцијална равенка од прв ред, каде $f(x)=2x$, $g(x) = xe^{-x^2}$. Воведуваме смена $y = uv$, каде $u = u(x)$ и $v = v(x)$ се нови непознати функции кои ќе ги определиме. Бидејќи $y' = u'v + v'u$ добиваме:

$$u'v + v'u + 2xuv = xe^{-x^2} \text{, т.е. } u'v + u(v'+2xv) = xe^{-x^2} .$$

Непознатата функција $v = v(x)$ ќе ја определиме од равенката $v'+2xv = 0$, т.е. $\frac{dv}{v} = -2xdx$ која е диференцијална равенка со раздвоиви променливи. При тоа, ако интегрираме добиваме:

$$\int \frac{dv}{v} = -\int 2xdx \text{, т.е. } \ln v = -x^2 .$$

Значи, непознатата функција $v = v(x)$ е $v = e^{-x^2}$. Според тоа $u'e^{-x^2} + u \cdot 0 = xe^{-x^2}$, т.е. $u' = x$. Јасно е дека $u = \frac{1}{2}x^2 + C$, и решението на диференцијалната равенка е

$$y = uv = \left(\frac{1}{2}x^2 + C \right)e^{-x^2} .$$

2. Најди го општото решение на диференцијалната равенка

$$xy'+y - e^x = 0 .$$

Потоа определи го она решение кое минува низ точката (a,b).

Решение. Равенката ќе ја запишеме во облик $y'+\frac{1}{x}y = \frac{e^x}{x}$, па според тоа таа е линеарна диференцијална равенка од прв ред. Нејзиното решение ќе го определиме во облик $y = uv$, каде $u = u(x)$ и $v = v(x)$ се непознати функции кои ќе ги определиме. Бидејќи $y' = u'v + v'u$, добиваме:

$$u'v + v'u + uv\frac{1}{x} = \frac{1}{x}e^x \text{, т.е. } u'v + u\left(v'+\frac{1}{x}v \right) = \frac{1}{x}e^x .$$

Непознатата функција $v = v(x)$ ќе ја определиме од диференцијалната равенка $v'+\frac{1}{x}v = 0$, која може да се запише во облик $\frac{dv}{dx} = -v\frac{1}{x}$ и тоа е диференцијална равенка кај која променливите се раздвојуваат. Ако интегрираме, добиваме:

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \text{, т.е. } \ln v = -\ln x .$$

Значи, непознатата функција $v = v(x)$ е $v = \frac{1}{x}$. Според тоа, $u'\frac{1}{x} = \frac{1}{x}e^x$, т.е. $u' = e^x$. Очигледно $u = e^x + C$ и решението на диференцијалната равенка е

$$y = uv = \frac{1}{x}(e^x + C) .$$

Ако во општото решение на равенката замениме $x = a$ и $y = b$ добиваме:

$$b = \frac{1}{a}(e^a + C) .$$

Бараната вредност на C е $C = ab - e^a$. Конечно, бараното партикуларно решение е

$$y = \frac{1}{x}(e^x + ab - e^a) .$$

3. Реши ја диференцијалната равенка

$$(x+1)y'-ny = e^x(x+1)^{n+1} .$$

Решение./

Резултат: $y = [C + e^x](1+x)^n$

4. Определи го она решение на диференцијалната равенка

$$xy'-\frac{y}{x+1} = x ,$$

кое минува низ точката $(1,0)$.

Решение. Во равенката

$$y'-\frac{y}{x(x+1)} = 1 \tag{1}$$

воведуваме смена $y = uv$ каде што $u = u(x)$ и $v = v(x)$ се нови непознати функции. Ако во (1) замениме $y = uv$ и $y' = u'v + v'u$ добиваме:

$$u'v + \left(v'-\frac{1}{x(x+1)}v \right) = 1 . \tag{2}$$

Функцијата v ќе ја определиме од равенката $v' - \frac{1}{x(x+1)}v = 0$ која е со раздвоиви променливи $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x(x+1)}$. Ако интегрираме $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x(x+1)}$, добиваме $\ln v = \ln \frac{x}{x+1}$, т.е. $v = \frac{x}{x+1}$. Ако замениме во (1) добиваме:

$$u' \frac{x}{x+1} = 1, \text{ т.е. } u' = \frac{x+1}{x},\ u = x + \ln x + C.$$

Општото решение на равенката е

$$y = \frac{x}{x+1}[\, x + \ln x + C \,].$$

Ако во општото решение замениме $x = 1$ и $y = 0$, добиваме $y = \frac{x}{x+1}[x - 1 + \ln|x|]$.

Резултат: $y = \frac{x}{x+1}[x - 1 + \ln|x|]$

5. Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$$y' + y\Phi'(x) - \Phi(x)\Phi'(x) = 0.$$

Решение. Диференцијалната равенка е линеарна диференцијална равенка од прв ред со $f(x) = \Phi'(x)$ и $g(x) = \Phi(x)\Phi'(x)$. Воведуваме смена, т.е. нејзиното решение ќе го определиме во облик $y = uv$, каде $u = u(x)$ и $v = v(x)$ се непознати функции кои ќе ги определиме. При тоа $y' = u'v + v'u$ од каде добиваме:

$$u'v + v'u + uv\Phi'(x) = \Phi(x)\Phi'(x), \text{ т.е. } u'v + u(v' + v\Phi'(x)) = \Phi(x)\Phi'(x).$$

Непознатата функција $v = v(x)$ ќе ја определиме од диференцијалната равенка $v' + v\Phi'(x) = 0$, т.е. $\frac{dv}{dx} = -v\Phi'(x)$ која е диференцијална равенка со раздвоиви променливи. Ако нејзе ја интегрираме добиваме

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \Phi'(x)dx, \text{ т.е. } \ln v = -\Phi(x).$$

Значи, непознатата функција $v = v(x)$ е $v = e^{-\Phi(x)}$. Според тоа, непозната функција $u = u(x)$ ќе ја определиме од равенката

$$u' e^{-\Phi(x)} = \Phi(x)\Phi'(x), \text{ т.е. } u' = \Phi(x)\Phi'(x)e^{\Phi(x)}.$$

Ако интегрираме добиваме:

$$u = \int \Phi(x)\Phi'(x)e^{\Phi(x)}dx = [t = \Phi(x), dt = \Phi'(x)dx] = \int te^t dt = te^t - e^t + C = \Phi(x)e^{\Phi(x)} - e^{\Phi(x)} + C.$$

Значи, општото решение на диференцијалната равенка е

$$y = \left(\Phi(x)e^{\Phi(x)} - e^{\Phi(x)} + C\right)e^{-\Phi(x)}.$$

6. Реши ја равенката

$$y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1.$$

Решение./

Резултат: $y = Cx^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$

7. Најди го општото решение на равенката

$$y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x}.$$

Решение. Ќе направиме трансформација на обликот на диференцијалната равенка. При тоа, од $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2y\ln y + y - x}$, добиваме $\frac{dx}{dy} = \frac{2y\ln y + y - x}{y}$, т.е. $x' + \frac{1}{y}x = 2\ln y + 1$. Последната диференцијална равенка е линеарна диференцијална равенка од прв ред, со $f(y) = \frac{1}{y}$ и $g(y) = 2\ln y + 1$, каде $x = x(y)$ е непозната функција која ќе ја определиме. Воведуваме смена, т.е. решението на равенката ќе го побараме во облик $x = uv$, каде што $u = u(y)$, $v = v(y)$ се непознати функции кои ќе ги определиме. При тоа $x' = u'v + v'u$ и

$$u'v + v'u + \frac{1}{y}uv = 2\ln y + 1, \text{ т.е. } u'v + u\left(v' + \frac{1}{y}v\right) = 2\ln y + 1. \quad (1)$$

Новата непозната функција $v = v(y)$ ќе ја определиме од диференцијалната равенка $v' + \frac{1}{y}v = 0$, т.е. $\frac{dv}{dy} = -\frac{1}{y}v$ која е со раздвоиви променливи $\frac{dv}{v} = -\frac{1}{y}dy$. Ако интегрираме, добиваме

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{1}{y}dy, \text{ т.е. } \ln v = -\ln y.$$

Според тоа, $v = \frac{1}{y}$. Ако замениме во (1) добиваме $u'\frac{1}{y} = 2\ln y + 1$, т.е. $u' = 2y\ln y + y$. Ако интегрираме добиваме:

$$u = \int (2y\ln y + y)dy = y^2 \ln y - \int ydy + \frac{1}{2}y^2 = y^2 \ln y + C.$$

Според тоа, решение на диференцијалната равенка е $x = \frac{y^2 \ln y + C}{y}$.

8. Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$y'+ay=e^{mx}$.

Решение./

Резултат: Ако $m\neq -a$, $y=Ce^{-ax}+\dfrac{e^{mx}}{m+a}$;

Ако $m=-a$, $y=(C+x)e^{mx}$.

9. Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$y'=e^{2x}-e^{x}y$.

Решение./

Резултат: $y=Ce^{-e^{x}}+e^{x}-1$

10. Определи го решението на диференцијалната равенка

$$y'-\frac{y}{1-x^2}=1+x$$

кое минува низ точката $(0,1)$.

Решение. Бидејќи равенката е линеарна диференцијална равенка од прв ред со $f(x)=-\dfrac{1}{1-x^2}$ и $g(x)=1+x$, решението ќе го бараме во облик $y=uv$ каде што $u=u(x)$ и $v=v(x)$ се функции кои ќе ги определиме. При тоа $y'=u'v+v'u$ и

$$u'v+v'u-\frac{1}{1-x^2}uv=1+x\text{ , т.е. } u'v+\left(v'-\frac{1}{1-x^2}v\right)u=1+x\ . \qquad (1)$$

Новата непозната функција $v=v(x)$ ќе ја определиме од равенката $v'-\dfrac{1}{1-x^2}v=0$, т.е. $\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{1}{1-x^2}v$ која е со раздвоиви променливи

$$\frac{dv}{v}=\frac{1}{1-x^2}dx\ .$$

Ако интегрираме добиваме $\displaystyle\int\frac{dv}{v}=\int\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, т.е. $\ln v=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. Ако замениме во (1) имаме

$$u'\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=1+x\text{ , т.е. } u'=\sqrt{1-x^2}\ .$$

Од последната равенка ќе ја определиме непознатата функција $u=u(x)$. Ако ја интегрираме, добиваме:

$$u=\int\sqrt{1-x^2}\,dx=[\,x=\sin t\,,dx=\cos t dt\,]=\int\cos^2 t dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+C=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C\ .$$

Значи, општото решение на диференцијалната равенка е

$$y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C\right).$$

11. Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$x^2y'+y=ax^2e^{\frac{1}{x}}$.

Решение./

Резултат: $y=e^{\frac{1}{x}}(ax+C)$

12. Најди го општото решение на диференцијалната равенка

$y'-(\mathrm{tg}x)y=\mathrm{ctg}x$.

Решение./

Резултат: $y=1+\dfrac{\ln C\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\cos x}$

13. Реши ја диференцијалната равенка

$y'+ay=\cos nx$.

Решение./

Резултат: $y=Ce^{-ax}+\dfrac{a\cos(nx)+n\sin(nx)}{a^2+n^2}$

14. Определи го општото решение на диференцијалната равенка:

$y'+(\mathrm{tg}x)y=\sin 2x$.

Решение./

Резултат: $y=C\cos x-2\cos^2 x$

15. Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$$y'+\frac{x}{1+x^2}y=\frac{1}{x(1+x^2)}\ .$$

Решение./

Резултат: $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(C-\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}\right)$

16. Реши ја диференцијалната равенка
$y'+(\cos x)y=\sin x\cos x$.
Решение./

Резултат: $y=Ce^{-\sin x}+\sin x-1$

17. Најди го општото решение на диференцијалната равенка
$xy'-y-x^3=0$.
Решение./

Резултат: $y=Cx+\frac{x^3}{2}$

18. Определи го општото решение на диференцијалната равенка
$y'+\frac{4x}{x^2+1}y=\frac{1}{1+x^2}$.
Решение./

Резултат: $y=\frac{x^3+3x+3C}{3(x^2+1)^2}$

19. Реши ја диференцијалната равенка
$dy+xy\,dx=(x-1)e^{-x}dx$.
Потоа определи го она решение кое што минува низ точката $(0,0)$.

Решение. Равенката ќе ја запишеме во облик $y'+xy=(x-1)e^{-x}$ и таа е линеарна со $f(x)=x$ и $g(x)=(x-1)e^{-x}$. Решението ќе го бараме во облик $y=uv$, каде $u=u(x)$ и $v=v(x)$ се нови непознати функции кои треба да ги определиме. При тоа $y'=u'v+v'u$ и

$u'v+v'u+xuv=(x-1)e^{-x}$, т.е. $u'v+u(v'+xv)=(x-1)e^{-x}$. (1)

Непознатата функција $v=v(x)$ ќе ја определиме од диференцијалната равенка $v'+xv=0$, т.е. $\frac{dv}{dx}=-xv$, која е со раздвоиви променливи:

$$\frac{dv}{v}=-xdx$$

Ако интегрираме $\int\frac{dv}{v}=-\int xdx$, добиваме $\ln v=-\frac{1}{2}x^2$, т.е. $v=e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Ако замениме во (1), добиваме:

$$u'e^{-\frac{1}{2}x^2}=(x-1)e^{-x}\text{, т.е. } u'=(x-1)e^{\frac{1}{2}x^2-x}.$$

Ако интегрираме добиваме

$$u=\int(x-1)e^{\frac{1}{2}x^2-x}dx=\left[\frac{1}{2}x^2-x=t\text{ , }(x-1)dx=dt\right]=\int e^t dt=e^t+C=e^{\frac{1}{2}x^2-x}+C .$$

Значи, општото решение е

$$y=e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(e^{\frac{1}{2}x^2-x}+C\right).$$

Ако во последната равенка замениме $x=0$ и $y=0$ добиваме $C+1=0$, т.е. $C=-1$. Значи, бараното партикуларно решение е

$$y=e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(e^{\frac{1}{2}x^2-x}-1\right).$$

20. Нека $y_1(x)$ и $y_2(x)$ се две решенија на диференцијалната равенка
$y'+P(x)y=Q(x)$.

а) Докажи дека функцијата $y=y_1(x)+C(y_2(x)-y_1(x))$ е општо решение на диференцијалната равенка.

б) Определи ја врската меѓу константите α и β за да линеарната комбинација $\alpha\, y_1(x)+\beta\, y_2(x)$ е решение на диференцијалната равенка.

в) Докажи дека ако функцијата $y_3(x)$ е трето решение на равенката, тогаш количникот $\frac{y_2(x)-y_1(x)}{y_3(x)-y_1(x)}$ е константа.

Решение. б)Нека $y_1=y_1(x)$ и $y_2=y_2(x)$ се две решенија на диференцијалната рав енка $y'+P(x)y=Q(x)$, т.е.

$y_1'+P(x)y_1\equiv Q(x)$ и $y_2'+P(x)y_2\equiv Q(x)$.

Ако α и β се реални мконстанти за кои $y=\alpha\, y_1(x)+\beta\, y_2(x)$ е решение на диференцијалната равенка, тогаш

$$\alpha\, y'_1(x)+\beta\, y'_2(x)+P(x)(\alpha\, y_1(x)+\beta\, y_2(x))=Q(x)\ \Rightarrow\ \alpha(y'_1(x)+P(x)y_1(x))+\beta(y'_2(x)+P(x)y_2(x))=Q(x)\ \Rightarrow$$
$$\alpha Q(x)+\beta Q(x)=Q(x)\ \Rightarrow\ \alpha+\beta=1 .$$

Точно е и обратното, т.е. ако $\alpha+\beta=1$, тогаш $y=\alpha\, y_1(x)+\beta\, y_2(x)$ е решение на равенката $y'+P(x)y=Q(x)$.

21. Да се најдат кривите за кои површината на триаголникот ограничен со апсцисната оска, тангентата на кривата и радиусот на допирната точка е постојана големина a^2 .

Решение./

22. Најди ги сите криви за кои должината на отсечката што ја отсекува тангентата од ординатната оска е за две единици помала од апсцисата на допирната точка на тангентата.

Решение./

Резултат: $y = Cx - x\ln|x| - 2$.

23. Определи ги кривите кај кои тангентата во произволна нејзина точка од Oy -оската отсекува отсечка еднаква на n -ти дел од збирот на координатите на допирната точка.

Решение. Одсечката што ја отсекува тангентата од Oy -оската има должина $d = y_\circ - x_\circ y'_\circ$. Од условот на задачата ја добиваме равенката

$y_\circ - x_\circ y'_\circ = \dfrac{x_\circ + y_\circ}{n}$, т.е. $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n}\dfrac{y}{x}$.

Добиената равенка е хомогена, па затоа воведуваме смена $\dfrac{y}{x} = u$, $y = ux$, $y' = u'x + u$ и добиваме:

$u'x + u = u - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n}u$, т.е. $x\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{1}{n}(1+u)$.

Последната равенка е со раздвоиви променливи, $\dfrac{du}{1+u} = -\dfrac{1}{n}\dfrac{dx}{x}$, и ако интегрираме добиваме

$\displaystyle\int\frac{du}{1+u} = -\frac{1}{n}\int\frac{dx}{x}$, т.е. $\ln(1+u) = -\dfrac{1}{n}\ln x + \ln C$

Значи, општото решение на диференцијалната равенка е $y = Cx^{\frac{n-1}{n}} - x$.

Резултат: $y - xy' = \dfrac{x+y}{n}$, $y = Cx^{\frac{n-1}{n}} - x$.

24. Определи ги кривите кај кои аголот што го зафаќа тангентата во било која нејзина точка со Ox -оската е два пати поголем од аголот што го зафаќа радиус векторот на допирната точка со истата оска.

Решение./

Резултат: $x^2 + (y - C)^2 = C^2$

25. Определи ги кривите кај кои површината на триаголникот чии страни се апсцисата на било која точка M од кривата и одсечката што ја отсекува тангентата кон кривата во точката M од y оската има константна вредност.

Решение./

Резултат: $y = Cx \pm \dfrac{a^2}{2x}$

26. Диференцијалната равенка

$y' + P(x) = Q(x)e^{my}$, $m \neq 0$

воведувајќи соодветна смена, сведи ја на линеарна равенка.

Решение./

Резултат: Воведи смена $e^{-my} = z$.

27. Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$y' + \dfrac{3}{x}y = \dfrac{2}{x^3}$.

Потоа определи го она решение за кое $y_\circ = 1$ кога $x_\circ = 1$.

Решение. Дадената равенка е линеарна диференцијална равенка од прв ред со $f(x) = \dfrac{3}{x}$ и $g(x) = \dfrac{2}{x^3}$

Резултат: $y = -\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{2}{x^2}$.

28. Определи го она решение на диференцијалната равенка

$y' - 2xy = 1$,

за кое $y_\circ = 0$, кога $x_\circ = 0$.

Решение./

Резултат: $y = e^{x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-x^2}dx$

29. Определи го општото решение на диферецнијалната равенка:

$y' + \mathrm{tg}y = \dfrac{x}{\cos y}$.

Решение./

Резултат: $\sin y = Ce^{-x} + x - 1$.

30. Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$x(y' - y) = (1 + x^2)e^x$.

Решение./

Резултат: $y = e^x\left(\ln|x| + \frac{x^2}{2}\right) + Ce^x$

Бернулиева диференцијална равенка

1. Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$y'-2xy=2x^3y^3$.

Решение. Равенката е Бернулиева со $f(x)=-2x$, $g(x)=2x^3$ и $n=3$. Равенката ќе ја запишеме во облик

$\frac{y'}{y^3}-2x\frac{1}{y^2}=2x^3$.

Воведуваме смена $z=\frac{1}{y^2}$, каде $z=z(x)$ е нова непозната функција. При тоа $\frac{y'}{y^2}=-z'$ и добиваме

$-z'-2xz=2x^3$, т.е. $z'+2xz=-2x^3$.

Непознатата функција $z=z(x)$ ќе ја определиме во облик $z=uv$ каде $u=u(x)$ и $v=v(x)$ се нови непознати функции кои ќе ги определиме. Бидејќи $z'=u'v+v'u$, добиваме:

$u'v+v'u+2xuv=-2x^3$, т.е. $u'v+u(v'+2xv)=-2x^3$. (1)

Непознатата функција $v=v(x)$ ќе ја определиме од диференцијалната равенка $v'+2xv=0$, т.е. $\frac{dv}{dx}=-2xv$, која е со раздвоиви променливи $\frac{dv}{v}=-2xdx$. Ако интегрираме, добиваме

$\int\frac{dv}{v}=-2\int xdx$, т.е. $\ln v=-x^2$.

Значи, $v=e^{-x^2}$ и ако замениме во (1), добиваме $u'e^{-x^2}=-2x^3$, т.е. $u'=-x^2e^{x^2}2x$. Ако интегрираме, добиваме:

$u=-\int x^2e^{x^2}2xdx=[x^2=t, dt=2xdx]=-\int te^tdt=-(te^t-e^t)+C=C-x^2e^{x^2}+e^{x^2}$.

Според тоа $z=(C-x^2e^{x^2}+e^{x^2})e^{-x^2}$. Конечно, општото решение на диференцијалната равенка е

$\frac{1}{y^2}=Ce^{-x^2}-x^2+1$.

Резултат: $\frac{1}{y^2}=Ce^{-x^2}-x^2+1$

2. Најди го решението на диференцијалната равенка

$xy'+y=y^2\ln x$.

Решение. Равенката ќе ја запишеме во облик $y'+\frac{1}{x}y=y^2\frac{\ln x}{x}$. Очигледно е дека таа е Бернулиева со $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{\ln x}{x}$ и $n=2$.

Воведуваме смена $z=\frac{1}{y}, -z'=\frac{y'}{y^2}$, каде $z=z(x)$ е нова непозната функција, и ако замениме во

$\frac{y'}{y^2}+\frac{1}{x}\frac{1}{y}=\frac{\ln x}{x}$,

добиваме

$-z'+\frac{1}{x}z=\frac{\ln x}{x}$, т.е. $z'-\frac{1}{x}z=-\frac{\ln x}{x}$.

Добиената равенка е линеарна и нејзиното решение ќе го определиме во облик $z=uv$, $z'=u'v+v'u$ каде $u=u(x)$ и $v=v(x)$ се нови непознати функции кои ќе ги определиме. При тоа

$u'v+v'u-\frac{1}{x}uv=-\frac{\ln x}{x}$, т.е. $u'v+\left(v'-\frac{1}{x}v\right)u=-\frac{\ln x}{x}$. (1)

Непознатата функција $v=v(x)$ ќе ја определиме од равенката $v'-\frac{1}{x}v=0$, $\frac{dv}{dx}=\frac{1}{x}v$, која е со раздвоиви променливи $\frac{dv}{v}=\frac{1}{x}dx$. Ако интегрираме, добиваме

$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{1}{x}dx$, т.е. $\ln v=\ln x$.

Значи, $v=x$ и ако замениме во (1) добиваме

$u'x=-\frac{\ln x}{x}$, т.е. $u'=-\frac{\ln x}{x^2}$.

Ако интегрираме, добиваме

$u=-\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{\ln x}{x}-\int\frac{1}{x^2}dx=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+C$.

Значи, $z=x\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+C\right)$ и општото решение на диференцијалната равенка е

$\frac{1}{y}=\ln x+1+Cx$.

Резултат: $\dfrac{1}{y}=\ln x+1+Cx$

3.Реши ја равенката

$$y'=\frac{y\varphi'(x)-y^2}{\varphi(x)},$$

каде φ е дадена функција.

Решение./

Резултат: $y=\dfrac{\varphi(x)}{x+C}$

4.Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$$y'+\frac{y}{x+1}+y^2=0\ .$$

Решение.Очигледно зададената равенка е Бернулиева со $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $g(x)=-1$ и $n=2$. Ако равенката ја запишеме во облик

$$\frac{y'}{y^2}+\frac{1}{x+1}\frac{1}{y}=-1,$$

и воведеме смена $z=\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{y'}{y^2}=-z'$, каде $z=z(x)$ е нова непозната функција, добиваме

$$-z'+\frac{1}{x+1}z=-1,\ \text{т.е.}\ z'-\frac{1}{x+1}z=1\ . \qquad (1)$$

Последната равенка е линеарна диференцијална равенка од прв ред. За да го најдеме општото решение на (1) воведуваме смена $z=uv$, $z'=u'v+v'u$ каде $u=u(x)$ и $v=v(x)$ се нови непознати функции. Ако замениме во (1) добиваме

$$u'v+v'u-\frac{1}{x+1}uv=1,\ \text{т.е.}\ u'v+\left(v'-\frac{1}{x+1}v\right)u=1 \qquad (2)$$

Непознатата функција $v=v(x)$ ќе ја определиме од равенката $v'-\dfrac{1}{x+1}v=0$, т.е. $\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{1}{x+1}v$ која е со раздвоиви променливи $\dfrac{dv}{v}=\dfrac{1}{x+1}dx$. Ако интегрираме добиваме

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{1}{x+1}dx,\ \text{т.е.}\ \ln v=\ln(x+1)\ .$$

Значи, $v=x+1$ и ако замениме во (2) добиваме:

$$u'(x+1)=1,\ \text{т.е.}\ u'=\frac{1}{x+1}\ .$$

Ако интегрираме

$$u=\int\frac{1}{x+1}dx=\ln(x+1)+C\ .$$

Конечно, $z=(x+1)(\ln(x+1)+C)$ и општото решение на равенката е

$$\frac{1}{y}=(\ln(x+1)+C)(x+1)\ .$$

Резултат: $\dfrac{1}{y}=(\ln(x+1)+C)(x+1)$

5.Определи го општото решение:

$$y'+\frac{2y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}\ .$$

Решение.Равенката ќе ја запишеме во облик $\dfrac{y'}{\sqrt{y}}+\dfrac{2}{x}\sqrt{y}=\dfrac{2}{\cos^2 x}$. Воведуваме смена $z=\sqrt{y}$ каде што $z=z(x)$ е нова непозната функција. Бидејќи $2z'=\dfrac{y'}{\sqrt{y}}$, добиваме:

$$2z'+\frac{2}{x}z=\frac{2}{\cos^2 x},\ \text{т.е.}\ z'+\frac{1}{x}z=\frac{1}{\cos^2 x}\ . \qquad (1)$$

Добиената диференцијална равенка е линеарна диференцијална равенка од прв ред. Нејзиното решение ќе го определиме во облик $z=uv$ каде $u=u(x)$ и $v=v(x)$ се нови непознати функции. Ако во равенката (1) замениме $z=uv$ и $z'=u'v+v'u$ добиваме:

$$u'v+v'u+\frac{1}{x}uv=\frac{1}{\cos^2 x},\ \text{т.е.}\ u'v+\left(v'+\frac{1}{x}v\right)u=\frac{1}{\cos^2 x}\ . \qquad (2)$$

Непознатата функција $v=v(x)$ ќе ја определиме од равенката $v'+\dfrac{1}{x}v=0$, т.е. $\dfrac{dv}{dx}=-\dfrac{1}{x}v$, која е со раздвоиви променливи $\dfrac{dv}{v}=-\dfrac{1}{x}dx$. Ако интегрираме добиваме

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{1}{x}dx,\ \ln v=-\ln x\ .$$

Значи, $v=\frac{1}{x}$ и ако замениме во (2) добиваме

$u'\frac{1}{x}=\frac{1}{\cos^2 x}$, т.е. $u'=\frac{x}{\cos^2 x}$.

Ако интегрирме, добиваме

$u=\int\frac{x}{\cos^2 x}dx=x\text{tg}x+\ln|\cos x|+C$.

Конечно $z=\frac{1}{x}(x\text{tg}x+\ln|\cos x|+C)$, и општото решение на диференцијалната равенка е $y=\frac{1}{x^2}(x\text{tg}x+\ln|\cos x|+C)^2$

Резултат: $y=\frac{1}{x^2}(x\text{tg}x+\ln|\cos x|+C)^2$

6. Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$xy'-4y-x^2\sqrt{y}=0$.

Решение./

Резултат: $y=\frac{x^4}{4}\ln^2|Cx|$

7. Определи го општото решение на диференцијалната равенка:

$y'-y+y^2\cos x=0$.

Решение./

Резултат: $y=\frac{2e^x}{C+e^x(\cos x+\sin x)}$ **.**

8. Најди го општото решение на диференмцијалната равенка

$y'-y+\sqrt{y}\cos x=0$.

Решение./

Резултат:

9. Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$y'-ytgx+y^2\cos x=0$.

Решение. Во равенката

$$\frac{y'}{y^2}-\frac{1}{y}\text{tg}x=-\cos x \qquad (1)$$

воведуваме смена $z=\frac{1}{y}$ каде $z=z(x)$ е нова непозната функција. Ако во (1) замениме $z=\frac{1}{y}$ и $\frac{y'}{y^2}=-z'$ добиваме:

$$z'+z\text{tg}x=\cos x \qquad (2)$$

Воведуваме смена $z=uv$ каде $u=u(x)$ и $v=v(x)$ се нови непознати функции. Ако во (2) замениме $z=uv$ и $z'=u'v+v'u$ добиваме:

$$u'v+u(v'+vtgx)=\cos x. \qquad (3)$$

Непознатата функција $v=v(x)$ ќе ја определиме од равенката $v'+vtgx=0$, која е со раздвоиви променливи $\frac{dv}{v}=-\text{tg}xdx$. Ако интегрираме $\int\frac{dv}{v}=-\int\text{tg}xdx$, добиваме $v=\cos x$.Ако замениме во (3) добиваме

$u'\cos x=\cos x$, т.е. $u'=1, u=x+C$

Конечно, $z=uv=(x+C)\cos x$. Значи, општо решение на диференцијалната равенка е

$\frac{1}{y}=(x+C)\cos x$.

Резултат: $\frac{1}{y}=(x+C)\cos x$

10. Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$xy'-y+x^4y^4=0$.

Решение./

Резултат: $y=\frac{x}{\sqrt[3]{\frac{3}{7}x^7+C}}$ **.**

11. Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$(1+x^2)y'-xy=x^2y^2$.

Решение./

Резултат: $\frac{C}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{2}+\frac{\ln(\sqrt{1+x^2}-x)}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{y}$.

12. Реши ја диференцијалната равенка

$$y'-\frac{x}{2(1-x^2)}y=xy^2 .$$

Решение./

Резултат: $2(1-x^2)+3C\sqrt[4]{1-x^2}=\frac{3}{y}$

13. Најди го општото решение на диференцијалната равенка

$$y'+xy=xy^3 .$$

Решение./

Резултат: $1+Ce^{x^2}=\frac{1}{y^2}$ **.**

14. Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$$xy'+y=xy^2\ln x .$$

Решение./

Резултат: $x\left(C-\frac{\ln^2 x}{2}\right)=\frac{1}{y}$.

15. Определи го решението на равенката

$$(1-x^2)y'-xy=xy^2 ,$$

за кое $y=\frac{1}{2}$, кога $x=0$.

Решение./

Резултат: $3\sqrt{1-x^2}-1=\frac{1}{y}$

16. Најди го општото решение на диференцијалната равенка

$$(x^2y^3+xy)y'=1 .$$

Решение. Равенката ќе ја запишеме во облик $x^2y^3+xy=x'$. Значи, тоа е Бернулиева диференцијална равенка со $p(y)=-y$ и $q(y)=y^3$. Во трансформираната равенка

$$\frac{x'}{x^2}-y\frac{1}{x}=y^3 , \qquad (1)$$

воведуваме смена $\frac{1}{x}=z$. Ако во (1) замениме $\frac{1}{x}=z$ и $\frac{x'}{x^2}=-z'$, добиваме

$$z'+zy=-y^3 . \qquad (2)$$

Добиената диференцијална равенка е линеарна диференцијална равенка од прв ред. Непознатата функција $z=z(y)$ ќе ја определиме во облик $z=uv$ каде $u=u(y)$ и $v=v(y)$ се нови непознати функции кои ќе ги определиме. Ако во (2) замениме $z=uv$ и $z'=u'v+v'u$ добиваме

$$u'v+(v'+yv)=-y^3 . \qquad (3)$$

Непознатата функција $v=v(y)$ ќе ја определиме од диференцијалната равенка $v'+vy=0$ која е со раздвоиви променливи $\frac{dv}{v}=-ydy$. Ако интегрирме добиваме

$$\int\frac{dv}{v}=-\int ydy \text{, т.е. } \ln v=-\frac{1}{2}y^2 .$$

Ако во (3) замениме $v=e^{-\frac{1}{2}y^2}$ добиваме $u'=-y^3e^{\frac{1}{2}y^2}$. Ако последната равенка ја интегрирмае добиваме:

$$u=-2\int\frac{1}{2}y^2e^{\frac{1}{2}y^2}ydy=\left[\frac{1}{2}y^2=z\ ,\ ydy=dz\right]=-2\int te^tdt=-2(te^t-e^t)+C=2e^{\frac{1}{2}y^2}-y^2e^{\frac{1}{2}y^2}+C .$$

Според тоа $z=Ce^{-\frac{1}{2}y^2}-y^2+2=\frac{1}{x}$.

Значи, општото решение на диференцијалната равенка е $x=\frac{1}{Ce^{-\frac{1}{2}y^2}-y^2+2}$.

Резултат: $x=\frac{1}{Ce^{-\frac{1}{2}y^2}-y^2+2}$.

17. Најди го партикуларното решение на диференцијалната равенка

$$xy'-(x-1)y=x^2e^{-x}y^2 ,$$

кое го исполнува почетниот услов $y=e$ за $x=1$.

Решение. Равенката ќе ја запишеме во облик

$$\frac{y'}{y^2}-\frac{x-1}{x}\frac{1}{y}=xe^{-x} .$$

Воведуваме смена $z=\frac{1}{y}$, каде $z=z(x)$ е нова непозната функција. Бидејќи $\frac{y'}{y^2}=-z'$, добиваме:

$$-z'-\frac{x-1}{x}z=xe^{-x}\text{, т.е. } z'+\frac{x-1}{x}z=-xe^{-x}. \quad (1)$$

Непозната функција $z=z(x)$ ќе ја определиме во облик $z=uv$, каде $u=u(x)$ и $v=v(x)$ се нови непознати функции. Ако во равенката (1) замениме $z=uv$ и $z'=u'v+v'u$ добиваме:

$$u'v+v'u+\frac{x-1}{x}uv=xe^{-x}\text{, т.е. } u'v+\left(v'+\frac{x-1}{x}v\right)u=xe^{-x}. \quad (2)$$

Непознатата функција $v=v(x)$ ќе ја определиме од равенката $v'+\frac{x-1}{x}v=0$, т.е. $\frac{dv}{dx}=-\frac{x-1}{x}v$ која е со раздвоиви променливи $\frac{dv}{v}=-\frac{x-1}{x}dx$.

Ако интегрираме добиваме:

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{x-1}{x}dx\text{, т.е. } \ln v=-x+\ln x.$$

Според тоа $v=xe^{-x}$ и ако замениме во имаме

$$u'xe^{-x}=xe^{-x}\text{, т.е. } u'=1.$$

Ако последната равенка ја интегрираме, добиваме $u=x+C$.

Значи, $z=xe^{-x}(x+C)$, а општото решение на диференцијалната равенка е

$$y=\frac{1}{xe^{-x}(x+C)}.$$

Во општото решение заменуваме $x=1$ и $y=e$ и добиваме $C=-1$. Партикуларното решение кое минува низ точката $(1,e)$ е

$$y=\frac{1}{xe^{-x}(x-1)}.$$

Резултат: $y=\frac{1}{xe^{-x}(x-1)}$

18. Определи го решението на диференцијалната равенка

$$xy'+2y=x^5y^2,$$

што минува низ точката $\left(3,\frac{1}{3}\right)$.

Решение. Равенката ќе ја запишеме во облик

$$\frac{y'}{y^2}+\frac{2}{x}\frac{1}{y}=x^3. \quad (1)$$

Воведуваме смена $z=\frac{1}{y}$, каде $z=z(x)$ е нова непозната функција. Ако во (1) замениме $z=\frac{1}{y}$ и $\frac{y'}{y^2}=-z'$, добиваме:

$$z'-\frac{2}{x}z=-x^3. \quad (2)$$

Добиената диференцијална равенка е линеарна диференцијална равенка од прв ред. Непознатата функција $z=z(x)$ ќе ја определиме во облик $z=uv$ каде $u=u(x)$ и $v=v(x)$ се нови непознати функции. Ако во (2) замениме $z=uv$ и $z'=u'v+v'u$ добиваме:

$$u'v+\left(v'-\frac{2}{x}v\right)u=-x^3. \quad (3)$$

Непознатата функција $v=v(x)$ ќе ја определиме од равенката $v'-\frac{2}{x}v=0$ која е со раздвоиви променливи $\frac{dv}{v}=\frac{2}{x}dx$. Ако интегрираме добиваме:

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{2}{x}dx\text{, т.е. } \ln v=2\ln x.$$

Ако во (3) замениме $v=x^2$, добиваме $u'x^2=-x^3$, т.е. $u'=-x$. Последната равенка ќе ја интегрираме при што

$$u=-\int xdx=C-\frac{1}{2}x^2.$$

Значи, $z=x^2\left(C-\frac{1}{2}x^2\right)$, и општото решение на равенката е $\frac{1}{y}=x^2\left(C-\frac{1}{2}x^2\right)$. Ако во општото решение замениме $x=3$, $y=\frac{1}{3}$ добиваме $C=\frac{29}{6}$.

Решението на диференцијалната равенка што минува низ точката $\left(3,\frac{1}{3}\right)$ е $\frac{1}{y}=x^2\left(\frac{29}{6}-\frac{1}{2}x^2\right)$.

Резултат: $\frac{1}{y}=x^2\left(\frac{29}{6}-\frac{1}{2}x^2\right)$

19. Определи го партикуларното решение на диференцијалната равенка

$$(1-x^2)y'-xy=xy^2,$$

за кое $y=\frac{1}{2}$ кога $x=0$.

Решение./

Резултат:

20.Определи го она решение на диференцијалната равенка

$y'-y\,\mathrm{tg}x=\sec x$,

за кое $y(0)=0$.

Решение./

Резултат:

21.Определи ги кривите кај кои поднормалата во било која точка е аритметичка средина на квадратите од координатите на таа точка.

Решение./

Резултат: $yy'=\dfrac{x^2+y^2}{2}$, $y^2=Ce^x-x^2-2x-2$, $C>0$.

22.Најди ги кривите кај кои должината на отсечката што ја отсекува тангентата од ординатната оска е еднаков на квадратот од ординатата на допирната точка.

Решение.Равенката на тангентата во точка $(x_\circ,y_\circ)$ од бараната крива е $y-y_\circ=y'_\circ(x-x_\circ)$.Должината на отсечката што ја отсекува од Oy оската е $d=y_\circ-y'_\circ x_\circ$. Од условот на задачата добиваме $y_\circ-y'_\circ x_\circ=y_\circ^2$. Според тоа, диференцијалната равенка на бараната фамилија криви е

$$y'-\frac{1}{x}y=-\frac{1}{x}y^2 ,$$

која ќе ја запишеме во облик

$$\frac{y'}{y^2}-\frac{1}{x}\frac{1}{y}=-\frac{1}{x} . \qquad (1)$$

Воведуваме смена $z=\dfrac{1}{y}$, каде што $z=z(x)$ е нова непозната функција.Ако во (1) замениме $z=\dfrac{1}{y}$ и $-z'=\dfrac{y'}{y^2}$, добиваме:

$$z'+\frac{1}{x}z=\frac{1}{x} . \qquad (2)$$

Добиената равенка е линеарна диференцијална равенка од прв ред. Воведуваме смена $z=uv$. Ако во (2) замениме $z=uv$ и $z'=u'v+v'u$ добиваме:

$$u'v+\left(v'+\frac{1}{x}v\right)u=\frac{1}{x} . \qquad (3)$$

Непознатата функиција $v=v(x)$ ќе ја определиме од равенката $v'+\dfrac{1}{x}v=0$, која е со раздвоиви променливи $\dfrac{dv}{v}=-\dfrac{1}{x}dx$. Ако интегрираме добиваме

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{1}{x}dx \text{, т.е. } \ln v=-\ln x .$$

Ако во (3) замениме $v=\dfrac{1}{x}$, добиваме $u'=1$, т.е. $u=x+C$. Значи, $z=\dfrac{1}{x}(x+C)$ и бараната фамилија криви е $y=\dfrac{x}{x+C}$.

Резултат: $y-xy'=y^2$, $y=\dfrac{x}{x+C}$.

23.Определи ги кривите кај кои должината на отсечката што ја отсекува нормалата, повлечена во точката (x,y) од кривата, од Ox -оската е еднаков на $\dfrac{y^2}{x}$.

Решение./

Резултат: $y\,y'+x=\dfrac{y^2}{x}$; $y^2=2x^2(\,C-\ln|\,x\,|)$.

24.Определи ги кривите кај кои должината на отсечката што го отсекува нормалата, повлечена во точката (x,y) од кривата, од Oy -оската е еднаков на $\dfrac{x^2}{y}$.

Решение./

Резултат: $y+\dfrac{x}{y'}=\dfrac{x^2}{y}$; $y^2e^{\frac{x^2}{y^2}}=C$

25.Определи ги кривите кај кои должината на отсечката што ја отсекува тангентата повлечена во произволна точка на кривата е пропорционална со квадратот на ординатата на допирната точка.

Решение./

Резултат: $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=1$

26.Определи ги кривите кај кои должината на отсечката што ја отсекува тангентата повлечена во произволна точка на кривата е пропорционална со кубот на ординатата на допирната точка.

Решение./

Резултат: $\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{y^2}=1$.

27.Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$y'-\frac{1}{x}y=\frac{1}{2y}$.

Решение./

Резултат: $y^2=Cx^2-x$.

28.Определи го општото решение на диференцијалната равенка

$y'+\frac{x}{1-x^2}y=x\sqrt{y}$.

Решение./

Резултат: $\sqrt{y}=C\sqrt[4]{1-x^2}-\frac{1}{3}(1-x^2)$

29.Определи го општото решение на равенката

$y'=\frac{2x}{x^2\cos y+a\sin 2y}$.

Решение.Равенката ќе ја запишеме во облик $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x^2\cos y+a\sin 2y}$, т.е. $x'=\frac{x^2\cos y+a\sin 2y}{2x}$. Равенката

$x'-x\frac{\cos y}{2}=\frac{a\sin 2y}{2}\frac{1}{x}$,

е Бернулиева диференцијална равенка со $p(y)=-\frac{\cos y}{2}$, $q(y)=\frac{a\sin 2y}{2}$ и $n=-1$. Во трансформираната равенка

$2xx'-x^2\cos y=a\sin 2y$, (1)

воведуваме смена $x^2=z$, каде $z=z(y)$ е нова непозната функција. Во (1) заменуваме $z=x^2$ и $z'=2xx'$ и добиваме:

$z'-z\cos y=a\sin 2y$. (2)

Равенката (2) е линеарна диференцијална равенка. Нејзиното решение ќе го определиме во облик $z=uv$, каде $u=u(y)$ и $v=v(y)$ се нови непознати функции кои ќе ги определиме. Ако во (2) замениме $z=uv$ и $z'=u'v+v'u$ добиваме

$u'v+v'u-uv\cos y=a\sin 2y$, т.е. $u'v+u(v'-2v\cos y)=a\sin 2y$. (3)

Непознатата функција $v=v(y)$ ќе ја определиме од равенката $v'-v\cos y=0$ која е со раздвоиви променливи $\frac{dv}{v}=\cos ydy$. Ако интегрираме добиваме

$\int\frac{dv}{v}=\int\cos ydy$, т.е. $\ln v=\sin y$

Ако во (3) замениме $v=e^{\sin y}$ добиваме $u'e^{\sin y}=2a\sin y\cos y$, т.е. $u'=2a\sin y\cos ye^{-\sin y}$. Ако интегрираме добиваме

$u=2a\int(-\sin y)e^{-\sin y}(-\cos y)dy=[-\sin y=t\ ,\ -\cos ydy=dt\ ]=2a\int te^t dt=a(te^t-e^t)+C=2a(-\sin ye^{-\sin y}-e^{-\sin y})+C$.

Конечно добиваме $z=Ce^{\sin y}-2a(\sin y-1)$, т.е. $z=Ce^{\sin y}-2a(\sin y-1)$

Резултат: $x^2=Ce^{\sin y}-2a(\sin y-1)$.

30.Определи го она решение на диференцијалната равенка

$xy'+y=xy^2$,

кое што минува низ точката $(0,0)$.

Решение./

Решение. $\frac{1}{y}=x(C-\ln|x|)$.