

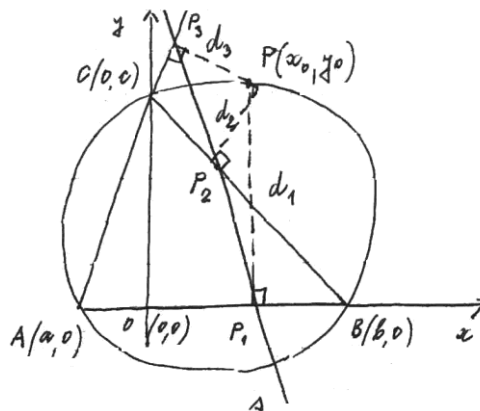
ОБРАТНА ТЕОРЕМА НА ТЕОРЕМАТА НА СИМСОН И НЕЈЗИНА ПРИМЕНА

Во [1] авторката дава доказ на теоремата за Симсоновата права (Robert Simson, шкотски математича, 1687-1768) и напоменува дека важи и обратната теорема:

Точка припаѓа на кружницата опишана околу триаголникот, ако ортогоналните проекции на точката врз правите определени со страните на триаголникот припаѓаат на една права.

а потоа во истата статија се пресентирани три решени задачи. Меѓутоа, во наведената статија не е даден доказ на обратната теорема, па затоа во оваа статија ќе го презентираме овој доказ, при што ќе користиме аналитичка геометрија.

Доказ. Во правоаголен координатен систем нека е даден триаголник ABC таков што $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ и $C(0, c)$. Нека $P(x_0, y_0)$ е точка која припаѓа на надворешноста на триаголникот ABC и нека растојанијата на точката P до страните AB , BC и CA на триаголникот ABC се $d_1 = \overline{PP_1}$, $d_2 = \overline{PP_2}$ и $d_3 = \overline{PP_3}$, соодветно. Ќе ги определиме координатите на точките $P_1(x_0, 0)$, $P_2(x_2, y_2)$ и $P_3(x_3, y_3)$ и ќе докажеме дека ако



точките P_1, P_2 и P_3 се колинеарни, тогаш точката P припаѓа на опишаната кружница околу триаголникот ABC (цртеж десно).

Равенката на правата низ точките A и C е:

$$y = -\frac{c}{a}x + c. \quad (1)$$

Бидејќи правата $d_3 \perp AC$ и d_3 минува низ $P(x_0, y_0)$ добиваме дека нејзината равенка е

$$y - y_0 = \frac{a}{c}(x - x_0), \quad (2)$$

па затоа пресечната точка P_3 на правите d_3 и AC е:

$$P_3\left(\frac{a(c^2 - cy_0 + ax_0)}{a^2 + c^2}, \frac{c(a^2 - ax_0 + cy_0)}{a^2 + c^2}\right). \quad (3)$$

Правата низ точките B и C има равенка $y = -\frac{c}{b}x + c$ и бидејќи $d_2 \perp BC$ и би-

дејќи d_2 минува низ $P(x_0, y_0)$, на потполно аналоген начин како погоре добиваме дека

$$P_2\left(\frac{b(c^2 - cy_0 + bx_0)}{b^2 + c^2}, \frac{c(b^2 - bx_0 + cy_0)}{b^2 + c^2}\right). \quad (4)$$

Понатаму, равенката на правата која минува низ точките P_1 и P_2 е

$$y = \frac{\frac{c(b^2 - bx_0 + cy_0)}{b^2 + c^2} - 0}{\frac{b(c^2 - cy_0 + bx_0)}{b^2 + c^2} - x_0} (x - x_0),$$

односно

$$y = \frac{b^2 - bx_0 + cy_0}{bc - by_0 - cx_0} (x - x_0). \quad (5)$$

Ако точките P_1, P_2 и P_3 се колинеарни, тогаш точката P_3 припаѓа на правата P_1P_2 и затоа

$$y_3 = \frac{b^2 - bx_0 + cy_0}{bc - by_0 - cx_0} (x_3 - x_0),$$

па од (3) последователно добиваме:

$$\begin{aligned} \frac{c(a^2 - ax_0 + cy_0)}{a^2 + c^2} &= \frac{b^2 - bx_0 + cy_0}{bc - by_0 - cx_0} \left(\frac{a(c^2 - cy_0 + ax_0)}{a^2 + c^2} - x_0 \right) \\ \frac{c(a^2 - ax_0 + cy_0)}{a^2 + c^2} &= \frac{b^2 - bx_0 + cy_0}{bc - by_0 - cx_0} \cdot \frac{ac^2 - acy_0 + a^2x_0 - a^2x_0 - c^2x_0}{a^2 + c^2} \\ c(a^2 - ax_0 + cy_0) &= \frac{b^2 - bx_0 + cy_0}{bc - by_0 - cx_0} \cdot c(ac - ay_0 - cx_0) \\ (a^2 - ax_0 + cy_0)(bc - by_0 - cx_0) &= (b^2 - bx_0 + cy_0)(ac - ay_0 - cx_0) \\ acx_0^2 - bcx_0^2 - a^2cx_0 + b^2cx_0 + acy_0^2 - bcy_0^2 + bc^2y_0 - ac^2y_0 + ab^2y_0 - a^2by_0 + a^2bc - ab^2c &= 0 \\ cx_0^2(a - b) - cx_0(a^2 - b^2) + cy_0^2(a - b) - c^2y_0(a - b) - aby_0(a - b) + abc(a - b) &= 0 \\ x_0^2 - x_0(a + b) + y_0^2 - \frac{c^2 + ab}{c} y_0 + ab &= 0 \\ (x_0 - \frac{a+b}{2})^2 + (y_0 - \frac{c^2 + ab}{2c})^2 &= (\frac{a+b}{2})^2 + (\frac{c^2 + ab}{2c})^2 - ab \\ (x_0 - \frac{a+b}{2})^2 + (y_0 - \frac{c^2 + ab}{2c})^2 &= (\frac{a-b}{2})^2 + (\frac{c^2 + ab}{2c})^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Конечно од (6) следува дека точката $P(x_0, y_0)$ припаѓа на кружница со центар

$(\frac{a+b}{2}, \frac{c^2 + ab}{2c})$ и радиус

$$r = \sqrt{(\frac{a-b}{2})^2 + (\frac{c^2 + ab}{2c})^2}.$$

Ни останува да докажеме дека точката $P(x_0, y_0)$ лежи на опишаната кружница околу триаголникот ABC . Ако равенката на опишаната кружница околу триаголникот ABC има облик $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ тогаш

$$(a-p)^2 + q^2 = r^2 \quad (7)$$

$$(b-p)^2 + q^2 = r^2 \quad (8)$$

$$p^2 + (c-q)^2 = r^2 \quad (9)$$

Ако од (7) ја одземеме (8) добиваме

$$\begin{aligned} (a-p)^2 - (b-p)^2 &= 0 \\ (a-b)(a+b-2p) &= 0 \\ a+b-2p &= 0 \\ p &= \frac{a+b}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Ако од (9) ја одземеме (8) добиваме

$$\begin{aligned} p^2 + (c-q)^2 - (b-p)^2 - q^2 &= 0 \\ c^2 - 2cq - b^2 + 2bp &= 0 \\ 2cq &= c^2 - b^2 + 2b \frac{a+b}{2} \\ 2cq &= c^2 - b^2 + ab + b^2 \\ q &= \frac{c^2+ab}{2c}. \end{aligned} \quad (11)$$

Конечно, ако од (10) и (11) замениме во (7) добиваме $(a - \frac{a+b}{2})^2 + (\frac{c^2+ab}{2c})^2 = r^2$,

т.е. $r = \sqrt{(\frac{a-b}{2})^2 + (\frac{c^2+ab}{2c})^2}$. Според тоа, опишаната кружница околу триаголникот ABC има равенка:

$$(x - \frac{a+b}{2})^2 + (y - \frac{c^2+ab}{2c})^2 = (\frac{a-b}{2})^2 + (\frac{c^2+ab}{2c})^2,$$

а како што видовме точката $P(x_0, y_0)$ лежи на оваа кружница, што и требаше да се докаже.

Задача 1. Нека K, L, M се проекциите на точката P , која припаѓа на опишаната кружница околу триаголникот ABC на правите BC, CA, AB , соодветно. Докажи дека

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{PL}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{PK}}.$$

Решение. *Прв начин.* Нека N е точка на BC таква што $\angle BNP = \angle ACP$ (види цртеж). Од триаголниците PBK и PAL добиваме

$$\overline{PK} = \overline{PB} \cdot \sin \angle PBK \text{ и } \overline{PL} = \overline{PA} \cdot \sin \angle PAL.$$

Ако ги поделиме последните две равенства и земеме предвид дека $\angle PAL = \angle PBK$ (како перифериски агли над лакот PC) добиваме

$$\frac{\overline{PK}}{\overline{PL}} = \frac{\overline{PB} \cdot \sin \angle PBK}{\overline{PA} \cdot \sin \angle PAL} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}. \quad (1)$$

Понатаму, $\angle PBN = \angle PBC$ и $\angle BNP = \angle ACP$, па затоа важи $\triangle PBN \sim \triangle PAC$, што значи

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{AC}}. \quad (2)$$

Сега, од триаголниците PAM и PCK следува

$$\overline{PM} = \overline{PA} \cdot \sin \angle PAM \text{ и}$$

$$\overline{PK} = \overline{PC} \cdot \sin \angle PCK,$$

па ако земеме предвид дека

$$\angle PAM = \angle PAB = \angle PCB = \angle PCK,$$

како перифериски агли над лакот BP , добиваме

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PK}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}. \quad (3)$$

Четириаголникот $PCAB$ е тетивен, па затоа $\angle ACP + \angle PBA = 180^\circ$ и освен тоа важи $\angle BNP + \angle PNC = 180^\circ$. Бидејќи точката N ја определевме така што важи $\angle BNP = \angle ACP$, а од последните две равенства имаме:

$$\angle ACP = 180^\circ - \angle PBA \text{ и } \angle BNP = 180^\circ - \angle PNC,$$

добиваме дека $\angle PBA = \angle PNC$. Но, $\angle PAB = \angle PCN$, па затоа $\triangle PCN \sim \triangle PAB$, што значи дека

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}. \quad (4)$$

Од (1) и (2) добиваме дека $\frac{\overline{PK}}{\overline{PL}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{AC}}$, т.е. $\frac{\overline{AC}}{\overline{PL}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{PK}}$, а од (3) и (4) добиваме дека

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PK}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CN}}, \text{ т.е. } \frac{\overline{CN}}{\overline{PK}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}. \text{ Според тоа,}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{PL}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{PK}} + \frac{\overline{CN}}{\overline{PK}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{PK}}.$$

На потполно аналоген начин се докажува дека

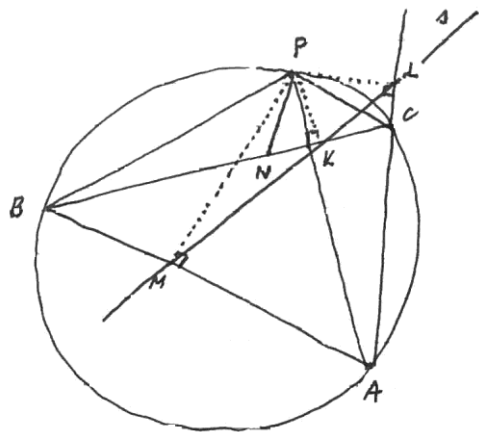
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{PK}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{PL}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PM}} \text{ и } \frac{\overline{BC}}{\overline{PK}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{PL}}. \blacksquare$$

Втор начин. Да ги воведеме ознаките

$$\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{PK} = d_1, \overline{PL} = d_2 \text{ и } \overline{PM} = d_3,$$

(види цртеж) и че докажеме дека $\frac{c}{d_3} + \frac{b}{d_2} = \frac{a}{d_1}$ ($\frac{a}{d_1} + \frac{b}{d_2} = \frac{c}{d_3}$ и $\frac{a}{d_1} + \frac{c}{d_3} = \frac{b}{d_2}$).

Точката P ја поврзуваме со точките A и B и за плоштината на триаголникот



$\overline{ABP}$ добиваме $P_{ABP} = \frac{cd_3}{2}$ и $P_{ABP} = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PB}}{4R}$, од каде следува

$$d_3 = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PB}}{2R}. \quad (1)$$

Аналогно добиваме

$$d_1 = \frac{\overline{PB} \cdot \overline{PC}}{2R}, \quad d_2 = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PC}}{2R}. \quad (2)$$

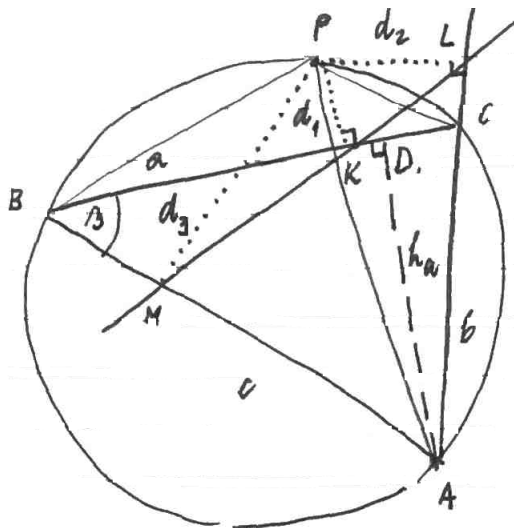
Четириаголникот $PCAB$ е тети-
вен, па од теоремата на Птоломеј
(Клавдиј Птоломеј, околу 100-178
година, Александриски математи-
чар), следува

$$c \cdot \overline{PC} + b \cdot \overline{PB} = a \cdot \overline{PA}$$

$$\frac{2Rc \cdot \overline{PC}}{\overline{PA} \cdot \overline{PB} \cdot \overline{PC}} + \frac{2Rb \cdot \overline{PB}}{\overline{PA} \cdot \overline{PB} \cdot \overline{PC}} = \frac{2Ra \cdot \overline{PA}}{\overline{PA} \cdot \overline{PB} \cdot \overline{PC}}$$

$$c \frac{2R}{\overline{PA} \cdot \overline{PB}} + b \frac{2R}{\overline{PA} \cdot \overline{PC}} = a \frac{2R}{\overline{PB} \cdot \overline{PC}}$$

$$\frac{c}{d_3} + \frac{b}{d_2} = \frac{a}{d_1}. \quad \blacksquare$$



Трет начин. Нека $\overline{AD} = h_a$ е висина и $\angle ABC = \beta$ во триаголникот ABC (цртеж горе). Во правоаголниот триаголник ABD важи $\sin \beta = \frac{h_a}{c}$, а од синусната теорема применета на триаголникот ABC имаме $\sin \beta = \frac{b}{2R}$. Според тоа, $\frac{h_a}{c} = \frac{b}{2R}$, па затоа

$$h_a = \frac{bc}{2R} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB}}{2R}. \quad (3)$$

Ревнството (3) всушност покажува дека: Висината повлечена од едно теме на триаголникот е еднаква на количникот на должините на страните кои го содржат тоа теме и дијаметарот на опишаната кружница околу тој триаголник. Оттука непосредно следуваат равенствата $d_1 = \frac{\overline{PB} \cdot \overline{PC}}{2R}$, $d_2 = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PC}}{2R}$ и $d_3 = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PB}}{2R}$. Сега решението на задачата е аналогно како при вториот начин. ■

Задача 2. Нека точката D припаѓа на опишаната кружница околу триаголникот ABC и нека подножните точки на нормалите повлечени кон правите a, b, c на кои лежат страните BC, CA, AB на триаголникот се P, Q, R , соодветно. Докажи дека $\overline{PQ} = \overline{QR}$ ако и само ако симетралите на аглиите $\angle ABC$ и $\angle ADC$ се сечат во точка X на страната AC на триаголникот ABC .

Решение. Нека претпоставиме дека $D \in AC$, кој не ја содржи точката B .

Точките P, Q, R припаѓаат на Симсоновата права на триаголникот ABC . Од $\angle P = \angle Q = 90^\circ$ следува дека четириаголникот $DPCQ$ е тетивен. Така $\angle DCQ = \angle DPQ$, како перифериски агли над лакот QD , односно $\angle DCA = \angle DPR$ (цртеж десно). Освен тоа и четириаголникот $DQRA$ е тетивен, па затоа

$$\begin{aligned}\angle DQA &= \angle DAC = \\ \angle DRQ &= \angle DRP.\end{aligned}$$

Значи, $\triangle DCA \sim \triangle DPR$, од каде

следува дека $\frac{\overline{DA}}{\overline{DR}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DP}}$, т.е.

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DR}}{\overline{DP}}. \quad (1)$$

Слично се докажува дека $\triangle DAB \sim \triangle DPQ$ и $\triangle DBC \sim \triangle DRQ$ и од овие сличности

следува $\frac{\overline{DB}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{QP}}$ и $\frac{\overline{DB}}{\overline{DR}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{RQ}}$, па затоа важи

$$\overline{DP} = \frac{\overline{DB} \cdot \overline{QP}}{\overline{AB}}, \quad (2)$$

$$\overline{DR} = \frac{\overline{DB} \cdot \overline{RQ}}{\overline{BC}}. \quad (3)$$

Сега, од (1), (2) и (3) следува

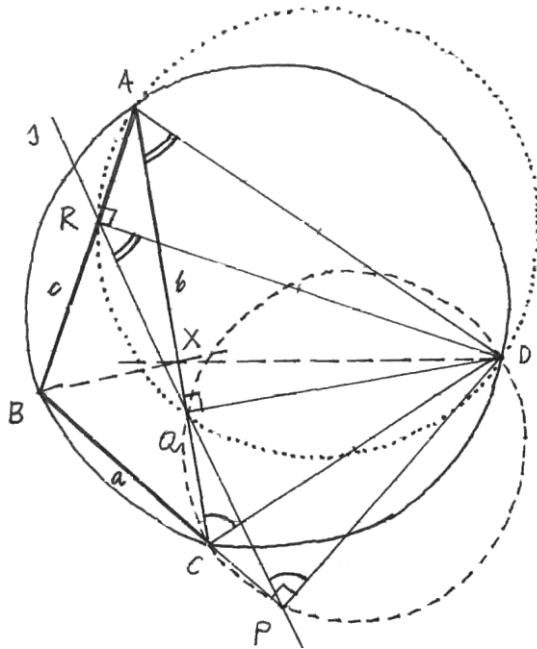
$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DR}}{\overline{DP}} = \frac{\frac{\overline{DB} \cdot \overline{RQ}}{\overline{BC}}}{\frac{\overline{DB} \cdot \overline{QP}}{\overline{AB}}} = \frac{\overline{RQ}}{\overline{QP}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}. \quad (4)$$

Од (4) следува дека $\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ кога $\frac{\overline{RQ}}{\overline{QP}} = 1$, т.е. кога $\overline{RQ} = \overline{QP}$. Конечно,

симетралата на аголот $\angle ABC$ ја дели страната AC во однос $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$, а симетралата

на аголот $\angle ACD$ ја дели страната AC во однос $\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}}$ и оттука следува тврдењето

на задачата. ■



ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Докажи јапланиметриски обратната теорема на теоремата за Симсоновата права.
2. За подножјата A_1, B_1, C_1 (на Симсоновата права s) на нормалите повлечени од точката P на опишаната кружница околу даден триаголник ABC важи

$$\overline{PA} \cdot \overline{PA_1} = \overline{PB} \cdot \overline{PB_1} = \overline{PC} \cdot \overline{PC_1} = 2Rd$$

каде R е радиусот на опишаната кружница, а d е растојанието на очката P до Симсоновата права s во однос на триаголникот ABC . Докажи!

3. Нека правите p_1, p_2, p_3 се сечат во три различни точки. Во просторот определи го геометриското место на точки P такви што подножјата на нормалите повлечени од точката P на правите p_1, p_2, p_3 се колинеарни. (Теорема на Емил Лемоане, 1840-1912, француски математичар.)

Литература

1. Џајкоска, Л. (2019). Теорема за Симсонова права и нејзина примена, Армаганга, Скопје