

ЕДЕН МЕТОД ЗА РЕШАВАЊЕ НА РАВЕНКИ

Зоран Штерјов

СОУ „Наум Наумовски-Борче“-Пробиштип

Со помош на неколку теореме и соодветни примери ќе покажеме како може својството монотоност на функции да се примени за решавање на некои видови равенки.

Дефиниција: Нека f е функција определена на интервалот $D \subseteq \mathbb{R}$.

- Функцијата $f(x)$ е **строго монотono растечка** на D ако од $x_1 < x_2$ следува дека $f(x_1) < f(x_2)$, за секои $x_1, x_2 \in D$.

- Функцијата $f(x)$ е **строго монотono опаднувачка** на D ако од $x_1 < x_2$ следува дека $f(x_1) > f(x_2)$, за секои $x_1, x_2 \in D$.

Монотоноста на функциите може да се испита и со помош на изводи. Имено, диференцијабилната функција $f(x)$ строго монотono расте на интервалот D ако и само ако $f'(x) > 0$, за секој $x \in D$, а строго монотono опаѓа на D ако и само ако $f'(x) < 0$, за секој $x \in D$. Функцијата $f(x)$ е константна на D ако и само ако $f'(x) = 0$, за секој $x \in D$.

Теорема 1: Ако $f(x)$ е строго монотона функција (растечка или опаднувачка) на интервалот D , бројот c е константа и бројот $x = a$ е решение на равенката $f(x) = c$, тогаш бројот a е единствено решение на равенката.

Доказ: Нека $f(x)$ е строго монотono растечка функција на интервалот D .

-Ако $x > a$, тогаш $f(x) > f(a) = c$, па за $x > a$ равенката нема решение.

-Ако $x < a$, тогаш $f(x) < f(a) = c$, па за $x < a$ равенката нема решение.

Значи $x = a$ е единствено решение на равенката. Аналогно се докажува кога $f(x)$ е строго монотono опаднувачка функција на интервалот D .

❖**Пример:** Да се реши равенката $a^x + b^x = (a+b)^x$, каде што $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

Решение: Едно очигледно решение е бројот $x = 1$. Дадената равенка ја запишуваме во облик

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^x + \left(\frac{b}{a+b}\right)^x = 1.$$

Нека $f(x) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^x + \left(\frac{b}{a+b}\right)^x$. При $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, функцијата $f(x)$ е строго монотонно опаднувачка, па во согласност со *Теорема 1* добиваме дека $x = 1$ е единствено решение на равенката.

❖**Пример:** Да се реши равенката $9^x - 1 = 2^x(3 + 3 \cdot 2^x + 2^{2x})$, каде што $x \in \mathbb{R}$.

Решение: Дадената равенка ја запишуваме во облик

$$9^x = 1 + 3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{2x} + 2^{3x},$$

$$9^x = (1 + 2^x)^3, \text{ односно } 9^{\frac{x}{3}} = 1 + 2^x,$$

и ако ставиме $t = \frac{x}{3}$, тогаш равенката добива облик $9^t = 1 + 8^t$, односно

$$\left(\frac{1}{9}\right)^t + \left(\frac{8}{9}\right)^t = 1 \quad (*)$$

Едно очигледно решение на оваа равенка е бројот $t = 1$. Нека

$$f(t) = \left(\frac{1}{9}\right)^t + \left(\frac{8}{9}\right)^t, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

Функцијата $f(t)$ е строго монотонно опаднувачка, па во согласност со *Теорема 1* добиваме дека $t = 1$ е единствено решение на равенката (*). Тогаш $x = 3$ е единствено решение на дадената равенка.

Теорема 2: Збир на две строго монотонно растечки (опаднувачки) функции е строго монотонно растечка (опаднувачка) функција.

Доказ: Нека $f(x)$ и $g(x)$ се две строго монотонно опаднувачки функции на интервалот D . Тогаш за нив важи дека $f'(x) < 0$ и $g'(x) < 0$. Ако ставиме $h(x) = f(x) + g(x)$, тогаш и $h'(x) < 0$, што значи дека и нивниот збир е строго монотонно опаднувачка функција. Аналогно се докажува кога $f(x)$ и $g(x)$ се две строго монотонно растечки функции на интервалот D .

❖**Пример:** Да се реши равенката $2^x + 3^x = 7 + 2\sqrt{3^x}$, каде што $x \in \mathbb{R}$.

Решение: Ако $x \leq 0$, тогаш $2^x + 3^x \leq 1 + 1 = 2$, додека $7 + 2\sqrt{3^x} > 7$, што

значи дека за $x \leq 0$ равенката нема решение. Нека $x > 0$. Дадената равенка ја запишуваме во облик

$$3^x - 2\sqrt{3^x} + 1 + 2^x = 8,$$

$$\left(\sqrt{3^x} - 1\right)^2 + 2^x = 8, \text{ односно } \left((\sqrt{3})^x - 1\right)^2 + 2^x = 8.$$

Нека $f(x) = \left(\sqrt{3^x} - 1\right)^2$, $f: (0, \infty) \rightarrow R$ и $g(x) = 2^x$, $g: (0, \infty) \rightarrow R$. Функциите $f(x)$ и $g(x)$ се две строго монотонно растечки функции, па и нивниот збир $h(x) = f(x) + g(x)$ е строго монотонно растечка функција. Според *Теорема 1*, равенката $h(x) = 8$ има единствено решение, и бидејќи $h(2) = 8$, следува дека $x = 2$ е единствено решение на дадената равенка.

Теорема 3: Нека $f(x)$ е строго монотонно растечка (опаднувачка) функција на интервалот D , а $g(x)$ е строго монотонно опаднувачка (растечка) функција на интервалот D . Ако $x = a$ е решение на равенката $f(x) = g(x)$, тогаш $x = a$ е единствено решение.

Доказ: Нека $f(x)$ е строго монотонно растечка функција на интервалот D , а $g(x)$ е строго монотонно опаднувачка функција на интервалот D . Тогаш $-g(x)$ е строго монотонно растечка функција на интервалот D , па $f(x) - g(x)$ е строго монотонно растечка функција на интервалот D . Според *Теорема 1*, равенката $f(x) - g(x) = 0$, т.е. $f(x) = g(x)$ има единствено решение.

❖ **Пример:** Реша ја равенката

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(7 + (\sqrt{2})^x\right) + 0,5x = 0,5 \log_{\frac{1}{3}}\left(3 + (\sqrt{2})^x + 2^x\right).$$

Решение: Равенката ја трансформираме во облик

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(7 + (\sqrt{2})^x\right) + \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}} = \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3 + (\sqrt{2})^x + 2^x},$$

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(7 + (\sqrt{2})^x\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}} = \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3 + (\sqrt{2})^x + 2^x},$$

$$7\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^x = \sqrt{3 + (\sqrt{2})^x + 2^x}.$$

Нека $f, g: R \rightarrow R^+$, $f(x) = 7\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^x$ и $g(x) = \sqrt{3 + (\sqrt{2})^x + 2^x}$.

Тогаш последната равенка добива облик $f(x) = g(x)$ и има решение $x = 2$. Бидејќи $f(x)$ е строго монотono опадувачка функција, а $g(x)$ е строго монотono растечка функција, според *Теорема 3* следува дека $x = 2$ е единствено решение на равенката.

❖ **Пример:** Да се реши равенката $10^x + 11^x + 12^x = 13^x + 14^x$ во множеството R .

Решение: Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$\left(\frac{10}{13}\right)^x + \left(\frac{11}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1 + \left(\frac{14}{13}\right)^x.$$

Нека $f(x) = \left(\frac{10}{13}\right)^x + \left(\frac{11}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x$ и $g(x) = 1 + \left(\frac{14}{13}\right)^x$, $f, g: R \rightarrow R^+$.

Функцијата $f(x)$ е строго монотono опадувачка, а функцијата $g(x)$ е строго монотono растечка. Според *Теорема 3* равенката $f(x) = g(x)$ има единствено решение. Јасно е дека $f(2) = g(2)$, па $x = 2$ е единствено решение. Навистина:

- ако $x < 2$, тогаш $f(x) > f(2)$ и $g(x) < g(2)$, односно
 $g(x) < g(2) = f(2) < f(x)$,

па равенката нема решение помало од 2;

- ако $x > 2$, тогаш $f(x) < f(2)$ и $g(x) > g(2)$, односно
 $f(x) < f(2) = g(2) < g(x)$,

па равенката нема решение поголемо од 2.

Значи $x = 2$ е единствено решение на равенката.

Теорема 4: Нека $f(x)$ и $g(x)$ се строго монотони функции (растечки или опадувачки) на интервалот D . Тогаш $(g \circ f)(x)$ е строго монотono растечка функција.

Доказ: Нека $x_1, x_2 \in D$ и $x_1 < x_2$. Ако $f(x)$ и $g(x)$ се строго монотono растечки функции на интервалот D , тогаш $f(x_1) < f(x_2)$ и $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$, односно $(g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2)$, што значи дека $(g \circ f)(x)$ е строго монотono растечка функција. Ако $f(x)$ и $g(x)$ се строго монотono опадувачки функции на интервалот D , тогаш $f(x_1) > f(x_2)$ и $g(f(x_1)) < g(f(x_2))$, односно повторно

$(g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2)$, што значи дека $(g \circ f)(x)$ е строго монотонно растечка функција.

Забелешка: Ако $f(x)$ и $g(x)$ се функции со различна монотоност, тогаш $(g \circ f)(x)$ е строго монотонно опаднувачка функција.

❖ **Пример:** Да се реши равенката $2^{\log_3 x} = -x + 2$, $x \in R^+$.

Решение: Нека $f(x) = \log_3 x$, $f: R^+ \rightarrow R$, а $g(x) = 2^x$, $g: R \rightarrow R^+$. Бидејќи $f(x)$ и $g(x)$ се строго монотонно растечки функции, според *Теорема 4* следува дека и $(g \circ f)(x) = 2^{\log_3 x}$ е строго монотонно растечка функција. Функцијата $h(x) = -x + 2$, $h: R \rightarrow R$ е строго монотонно опаднувачка, па според *Теорема 3* равенката $(g \circ f)(x) = h(x)$ има единствено решение. Јасно е дека решение на равенката е бројот $x = 1$.

Пример: Да се реши равенката $\sqrt{x+5} - \sqrt[4]{20-x} = 1$ во множеството R .

Решение: Функцијата $f: [-5, \infty) \rightarrow R$, $f(x) = \sqrt{x+5}$ е строго монотонно растечка како композиција на две строго монотонно растечки функции. Функцијата $g: [-\infty, 20] \rightarrow R$, $g(x) = \sqrt[4]{20-x}$ е строго монотонно опаднувачка како композиција на една строго монотонно растечка функција и една строго монотонно опаднувачка функција. Добиваме дека функцијата $h: [-5, 20] \rightarrow R$, $h(x) = \sqrt{x+5} - \sqrt[4]{20-x}$ е строго монотонно растечка како разлика меѓу строго монотонно растечка и строго монотонно опаднувачка функција. Бидејќи $x = 4$ е едно решение, според *Теорема 1* тоа е единствено решение.

Задачи за самостојна работа:

1. Да се реши равенката $\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x$.
2. Реша ја равенката $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$.
3. Да се реши равенката $2\log_3(\operatorname{ctg} x) = \log_2(\cos x)$.
4. Реша ја равенката $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x} = x$.
5. Реша ја равенката $x^{\log_2 \sqrt{5}} = \left|x^{\log_2 3} - 2^{\log_2 x}\right|$.
6. Да се реши равенката $(2^{\log_5 x} + 3)^{\log_5 2} = x - 3$.

Литература:

Gazeta matematica-SSM Romanija;
Revista matematica din Timisoara.