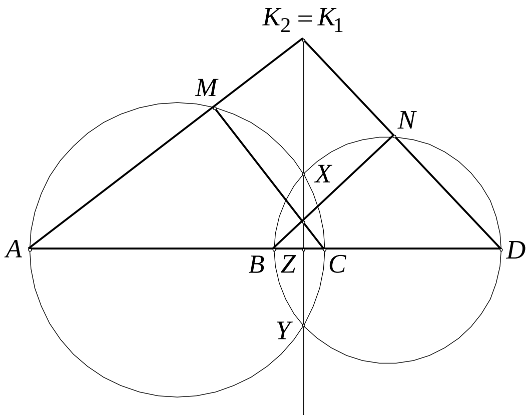
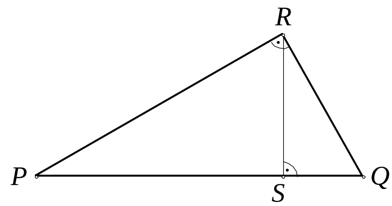
XXXVI олимпијада

1. Нека A, B, C и D се четири различни точки од дадена права, распоредени во запишаниот редослед. Кружниците со дијаметри AC и BD се сечат во точките X и Y. Правата XY ја сече BC во точка Z и P е точка на правата XY различна од Z. Правата CP ја сече кружницата со дијаметар AC во точките C и M, а правата BP ја сече кружницата со дијаметар BD во точките B и N. Докажи дека правите AM, DN и XY се сечат во една точка.

Решение. Нека $K_1 = DN \cap XY, K_2 = AM \cap XY$. Триаголникот BDN е правоаголен и $\measuredangle DNB = 90^\circ$. Од сличноста на триаголниците PBZ и DK_1Z следува $\frac{\overline{K_1Z}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{DZ}}{\overline{PZ}}$ т.е. $\overline{K_1Z} = \frac{\overline{BZ}\cdot\overline{DZ}}{\overline{PZ}}$ и аналогно од сличноста на триаголниците PCZ и AK_2Z следува $\frac{\overline{K_2Z}}{\overline{CZ}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{PZ}}$, т.е. $\overline{K_2Z} = \frac{\overline{AZ}\cdot\overline{CZ}}{\overline{PZ}}$.



Црт. 36.1.



Црт. 36.2.

Ако триаголникот PQR е правоаголен со прав агол во темето R и ако S е подножната точка на висината од темето R, тогаш од сличноста на триаголниците PSR и RSQ следува $\frac{\overline{RS}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{SQ}}{\overline{RS}}$, т.е. $\overline{RS}^2 = \overline{PS}\cdot\overline{SQ}$.

Бидејќи триаголниците ACX и BDX се правоаголни, со примена на претходното тврдење добиваме $\overline{AZ}\cdot\overline{CZ} = \overline{ZX}^2 = \overline{BZ}\cdot\overline{DZ}$, па затоа $\overline{K_1Z} = \overline{K_2Z}$, т.е. $K = K_1 = K_2$ и $K = AM \cap DN \cap XY$.

2. Нека $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ се такви што такви што $abc = 1$. Докажи дека

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Решение. Нека $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$ и $z=\frac{1}{c}$. Тогаш, $xyz=1$ и

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}.$$

Десната страна на неравенството да ја означиме со S. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\begin{aligned}[(y+z)+(z+x)+(x+y)]S&=x^2+y^2+z^2+(x^2\tfrac{z+x}{y+z}+y^2\tfrac{y+z}{z+x})+\\&\quad+(y^2\tfrac{x+y}{z+x}+z^2\tfrac{z+x}{x+y})+(z^2\tfrac{y+z}{x+y}+x^2\tfrac{x+y}{y+z})\\&\ge x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\\&=(x+y+z)^2\end{aligned}$$

односно $S\ge\frac{x+y+z}{2}$. Повторно од неравенствот меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме $S\ge\frac{x+y+z}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{x+y+z}{3}\ge\frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=1$, односно ако и само ако $a=b=c=1$.

3. Најди ги сите природни броеви $n>3$ за кои постојат n точки $A_1,A_2,...,A_n$ во рамнината и реални броеви $r_1,r_2,...,r_n$, такви што се исполнети условите:

(a) било кои три точки од точките $A_1,A_2,...,A_n$ се неколинеарни,

(b) за секои i,j,k $(1\le i<j<k\le n)$, плоштината на триаголникот $A_iA_jA_k$ е еднаква на $r_i+r_j+r_k$.

Решение. Ќе докажеме дека $n=4$ е единствениот природен број што ги задоволува условите на задачата.

Нека $n=4$, $A_1A_2A_3A_4$ е единечен квадрат и $r_i=\frac{1}{6}, i=1,2,3,4$. Тогаш, условите на задачата се задоволени.

Ќе докажеме дека бројот 5 не ги задоволува условите на задачата, од каде ќе следува дека не постои природен број $n\ge5$, кој ги задоволува условите на задачата.

Нека претпоставиме дека бројот 5 ги задоволува условите на задачата. Плоштината на триаголникот $A_iA_jA_k$ ја означуваме со $[ijk]$. Имаме,

$$[ijk]=r_i+r_j+r_k, \text{ за } 1\le i<j<k\le5.$$

Ако на пример $r_4=r_5$, тогаш $[124]=[125]$ и $[234]=[235]$, од што следува дека A_5A_4 е паралелна со A_1A_2 и A_2A_3, што не е можно бидејќи точките A_1,A_2,A_3 не се колинеарни. Да забележиме дека ако четириаголникот

$A_iA_jA_kA_l$ е конвексен, тогаш важи $[ijk]+[kli]=[jkl]+[lij]$, од што следува $r_i+r_k=r_j+r_l$.

Да ја разгледаме конвексната обвивка на точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, т.е. конвексниот многуаголник чии темиња припаѓаат на множеството $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$. Можни се следните три случаи.

Нека конвексната обвивка е петаголник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Бидејќи $A_1A_2A_3A_4$ и $A_1A_2A_3A_5$ се конвексни четориаголници, од претходните забелешки добиваме дека $r_1+r_3=r_2+r_4$ и $r_1+r_3=r_2+r_5$. Од овде е $r_4=r_5$, што е противречност.

Нека конвексната обвивка е четириаголник $A_1A_2A_3\ A_4$. Не се губи од општоста ако се претпостави дека A_5 се наоѓа во триаголникот $A_3A_4A_1$. Тогаш $A_1A_2A_3A_5$ е конвексен четириаголник, и добиваме иста противречност како и во првиот случај.

Нека конвексната обвивка е триаголникот $A_1A_2A_3$. Бидејќи

$$[123]+[234]+[314]=[125]+[235]+[315]$$

добиваме $r_4=r_5$ што е противречност.

4. Најди ја најголемата можна вредност на бројот x_0 за која постои низа позитивни реални броеви $x_o, x_1, ..., x_{1995}$ кои ги задоволуваат условите:

(a) $x_0=x_{1995}$.

(b) $x_{i-1}+\frac{2}{x_{i-1}}=2x_i+\frac{1}{x_i}$, за секој $i\in\{1,2,...,1995\}$.

Решение. Дадениот услов е еквивалентен со $2x_i^2-(x_{i-1}+\frac{2}{x_{i-1}})x_i+1=0$, чии решенија по x_i се $x_i=\frac{1}{2}x_{i-1}$ и $x_i=\frac{1}{x_{i-1}}$. Со математичка индукција ќе докажеме дека $x_i=2^{k_i}x_0^{\varepsilon_i}$, каде k_i е цел број таков што $|k_i|\le i$ и $\varepsilon_i=(-1)^{k_i+i}$. Тврдењето е точно за $i=0$, бидејќи земаме $k_0=0$ и $\varepsilon_0=1$. Да претпоставиме дека тврдењето е точно за $i-1$. Можни се два случаја. Ако $x_i=\frac{1}{2}x_{i-1}$, тогаш имаме $k_i=k_{i-1}-1$ и $\varepsilon_i=\varepsilon_{i-1}$. Ако $x_i=\frac{1}{x_{i-1}}$, тогаш имаме $k_i=-k_{i-1}$ и $\varepsilon_i=-\varepsilon_{i-1}$. И во двата случаја непосредно се добива дека $|k_i|\le i$ и $\varepsilon_i=(-1)^{k_i+1}$. Затоа $x_{1995}=2^k\cdot x_0^{\varepsilon}$ каде $k=k_{1995}$ и $\varepsilon=\varepsilon_{1995}$ пти што $0\le|k|\le 1995$ и $\varepsilon=(-1)^{1995+k}$. Значи $x_0=x_{1995}=2^k x_0^{\varepsilon}$. Ако k е непарен број, тогаш $\varepsilon=1$, па имаме $2^k=1$, што е противречност бидејќи $k\ne 0$.

Затоа k мора да е парен број, па $\varepsilon=-1$ и ${x_0}^2=2^k$. Бидејќи k е парен и $|k|\le 1995$ добиваме дека $k\le 1994$. Од овде е $x_0\le 2^{997}$. Равенството се достигнува за $x_0\le 2^{997}$, $x_i=\frac{1}{2}x_{i-1}$ за $i=1,2,3,...,1994$ и $x_{1995}=\frac{1}{x_{1994}}$. Тогаш, $x_{1994}=2^{-997}$ и $x_{1995}=2^{997}=x_0$.

5. Нека $ABCDEF$ е конвексен шестаголник, таков што

$$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD},\quad \overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FA}\quad \text{и}\quad \measuredangle BCD=\measuredangle EFA=60^\circ,$$

и G и H се точки од внатрешноста на шестаголникот такви што

$$\measuredangle AGB=\measuredangle DHE=120^\circ.$$

Докажи дека

$$\overline{AG}+\overline{GB}+\overline{GH}+\overline{DH}+\overline{HE}\ge\overline{CF}.$$

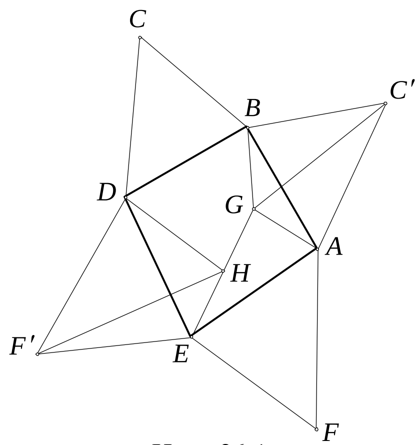
Решение. Забележуваме дека триаголниците BCD и EFA се рамнострани. Од $\overline{AB}=\overline{BD}$ и $\overline{AE}=\overline{ED}$ следува дека правата BE е оска на симетрија за четириаголникот $ABDE$. Нека C' и F' се симетричните точки на C и F во однос на правата BE. Тогаш,

$$\triangle BCD\cong\triangle BC'A \text{ и } \triangle ADF'\cong\triangle EAF.$$

Четириаголникот $AGBC'$ е тетивен бидејќи

$$\measuredangle AGB+\measuredangle AC'B=120^\circ+60^\circ=180^\circ.$$

Од теоремата на Птоломеј добиваме дека $\overline{AG}+\overline{GB}=\overline{GC'}$. Аналогно се добива дека $\overline{HE}+\overline{HD}=\overline{HF'}$. Од овде добиваме



Црт. 36.4.

$$\overline{CF}=\overline{C'F'}\le\overline{C'G}+\overline{GH}+\overline{HF'}=\overline{AG}+\overline{GB}+\overline{GH}+\overline{DH}+\overline{HE}.$$

При тоа равенството важи ако и само ако точките G и H лежат на правата $C'F'$.

6. Нека p е непарен прост број. Најди го бројот на сите подмножества A од множеството $\{1,2,3,...,2p\}$ такви што:

(a) A има точно p елементи, и

(b) збирот на сите елементи од множеството A е делив со p.

Решение. За произволно p-елементно подмножество A од $\{1,2,..,2p\}$, со $s(A)$ да го означиме збирот на елементите во A. Има вкупно $\binom{2p}{p}$ подмножества од $\{1,2,..,2p\}$ со по p елементи. За множествата $B=\{1,2,...,p\}$ и $C=\{p+1,...,2p\}$ важи $s(B)\equiv s(C)\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$. Останатите $\binom{2p}{p}-2$ подмножества со p елементи ќе ги поделиме во групи од по p броеви на следниот начин:

Две подмножества A и A' се во иста група ако и само ако $A\cap C=A'\cap C$ и ако $A'\cap B$ е циклична пермутација од $A\cap B$ во однос на B. Тоа значи, ако $A\cap B$ има n елементи, $0<n<p$, тогаш за некој m, таков што $0<m<p$ важи

$$A'\cap B=\{x+m \mid x\in A\cap B, x+m\le p\}\cup\{x+m-p \mid x\in A\cap B, x\le p<x+m\}.$$

Сега $s(A')-s(A)\equiv mn\ (\mathrm{mod}\ p)$ и mn мора да биде делив со p. Оттука следува дека точно едно подмножество A во секоја група го задоволува условот $s(A)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$. Затоа бројот на сите такви подмножества е еднаков на

$$\frac{1}{p}\left(\binom{2p}{p}-2\right).$$