## *XIII олимпијада*

1. Дадени се реалните броеви $a_1, a_2, ..., a_n$. Докажи дека за $n=3$ или $n=5$ точно е неравенството

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)...(a_1-a_n)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)...(a_2-a_n)+...$$
$$+(a_n-a_2)(a_n-a_3)...(a_n-a_{n-1})\geq 0,$$

но тоа не е точно за било кој друг природен број $n, n>2$.

**Решение.** За $n=3$ левата страна на неравенството е еднаква на

$$\frac{1}{2}[(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+(a_2-a_3)^2]\geq 0.$$

За $n=5$, заради симетричност на левата страна во однос на $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$, можеме да претпоставиме дека $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5$. Бидејќи

$$a_1-a_3 \geq a_2-a_3,\ a_1-a_4 \geq a_2-a_4,\ a_1-a_5 \geq a_2-a_5,$$

добиваме

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\geq 0.$$

Исто така

$$(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\geq 0,$$

како и

$$(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)+(a_5-a_1)(a_5-a_2)(a_5-a_3)(a_5-a_4)\geq 0$$

што значи дека за $n=5$ неравенството е исполнето.

За $n=4$ можеме да земеме

$$a_1=0,\ a_2=a_3=a_4=1,$$

а за $n>5$,

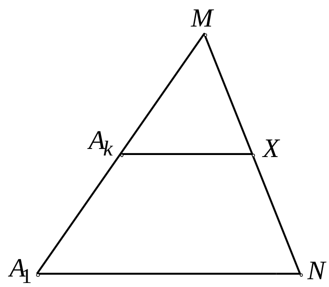
$$a_1=a_2=...=a_{n-4}=0,\ a_{n-3}=a_{n-2}=a_{n-1}=2 \text{ и } a_n=1$$

и во секој од овие случаи неравенството не е исполнето.

2. Даден е конвексен полиедар $P_1$ со темиња $A_1, A_2, ..., A_9$. Нека $P_2, P_3, ..., P_9$ се полиедри кои се добиваат со транслации на полиедарот $P_1$ кои точката $A_1$ ја пресликуваат во точките $A_2, A_3, ..., A_9$, соодветно. Докажи дека најмалку два од полиедрите $P_1, P_2, P_3, ..., P_9$ имаат барем една заедничка внатрешна точка.

**Решение.** Со $P$ да го означиме полиедарот кој е хомотетичен на полиедарот $P_1$ со центар на хомотетија $A_1$ и коефициент 2. Нека $X$ е некоја од точките на полиедарот $A_k$, $k\in\{2,3,4,...,9\}$. Тогаш

$$\overrightarrow{A_1X}=\overrightarrow{A_1A_k}+\overrightarrow{A_kX}.$$



*Црт. 13.1.*

Нека $M$ и $N$ се точки во просторот такви што $\overrightarrow{A_1M} = 2\overrightarrow{A_1A_k}$ и $\overrightarrow{A_1N} = 2\overrightarrow{A_kX}$. Точките $M$ и $N$ припаѓаат на полиедарот $P$, при што точката $X$ припаѓа на отсечката $MN$, па бидејќи полиедарот $P$ е конвексен, таа припаѓа и на $P$. Од овде заклучуваме дека полиедарот $P$ ги содржи сите 9 полиедри $P_1, P_2, ..., P_9$ а волуменот му е 8 пати поголем од волуменот на секој од нив. Сега, од принципот на Дирихле следува дека меѓу полиедрите $P_1, P_2, ..., P_9$, постојат два кои имаат заедничка точка.

3. Докажи дека низата $2^n - 3$, $n = 1, 2, 3, ...$ има бесконечно многу членови такви што секои два од нив се заемно прости.

**Решение.** Тврдењето во задачата ќе го докажеме користејќи математичка индукција.

Нека претпоставиме дека имаме $k$ броеви

$$a_1 = 2^{n_1} - 3,\ a_2 = 2^{n_2} - 3,\ ...,\ a_k = 2^{n_k} - 3$$

такви што секои два од нив се заемно прости и $2 = n_1 < n_2 < ... < n_k$. Конструираме број од облик $a_{k+1} = 2^{n_{k+1}} - 3$, кој ќе биде земно прост со секој од овие броеви. Избираме $l = a_1 a_2 ... a_k$. Меѓу $l+1$-те броеви $2^0, 2^1, ..., 2^l$ постојат барем два кои при делење со $l$ даваат ист остаток. Нека $2^r$ и $2^s$ $(r > s)$ се тие броеви. Тогаш постои природен број $p$, таков што

$$pl = 2^r - 2^s = (2^{r-s} - 1)2^s.$$

Бидејќи $l$ е непарен, добиваме дека $2^{r-s} - 1$ е делив со $l$, т.е. за некој природен број $q$ важи $2^{r-s} - 1 = ql$. Според тоа,

$$2^{r-s+2} - 3 = 4 \cdot 2^{r-s} - 3 = 4(ql + 1) - 3 = 4ql + 1$$

и овој број ќе го земеме за бројот $a_{k+1}$, бидејќи тој нема заеднички делител поголем од 1 со било кој од броевите $a_1, a_2, ..., a_k$ и освен тоа $a_{k+1} > a_k$.

На опишаниот начин можеме да конструираме произволно многу броеви кои ги исполнуваат условите на задачата.

4. Секоја страна на тетраедарот $ABCD$ е остроаголен триаголник. Ги разгледуваме затворените полигонални линии $XYZTX$ определени на следниот начин: точката $X$ е на работ $AB$ и е различна од $A$ и $B$. Аналогно $Y, Z$ и $T$ се на рабовите $BC$, $CD$ и $AD$, соодветно.

Докажи дека:

а) Ако $\measuredangle DAB + \measuredangle BCD \neq \measuredangle ABC + \measuredangle CDA$, тогаш меѓу полигоналните линии нема најкратка.

б) Ако $\measuredangle DAB + \measuredangle BCD = \measuredangle ABC + \measuredangle CDA$, тогаш постојат бесконечно многу полигонални линии со минимална должина и таа е еднаква на $2\overline{AC}\sin\frac{\alpha}{2}$, каде $\alpha = \measuredangle CAB + \measuredangle DAC + \measuredangle DAB$.

**Решение.** а) Да претпоставиме дека постои најкратка искршена линија $XYZTX$ (црт. 13.2.). Триаголниците $ABC$ и $BCD$ ги поставуваме во една рамнина. Со тоа добиваме четириаголник $ABCD$ (црт. 13.3.). За линијата да има минимална должина, мора да е исполнето $\measuredangle BYX = \measuredangle CYZ$, бидејќи во спротивен случај би добиле помала должина на линијата со поместување на точката $Y$. Аналогно се покажува дека мора да е исполнето

$$\measuredangle CZY = \measuredangle TZD,\ \measuredangle DTZ = \measuredangle XTA,\ \measuredangle AXT = \measuredangle YXB.$$

На тој начин добиваме

$$\begin{aligned}\measuredangle DAB + \measuredangle BCD &= 180^\circ - \measuredangle AXT - \measuredangle XTA + 180^\circ - \measuredangle CZY - \measuredangle CYZ\\ &= 180^\circ - \measuredangle YXB - \measuredangle BYX + 180^\circ - \measuredangle DTZ - \measuredangle TZD\\ &= \measuredangle ABC + \measuredangle ADC.\end{aligned}$$

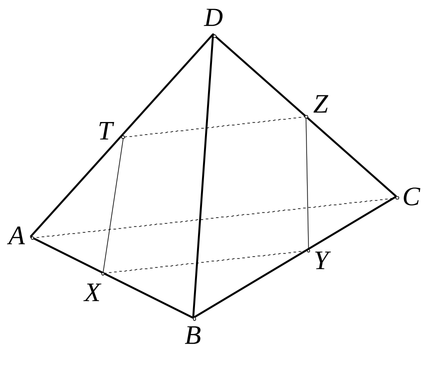
што противречи на претпоставката.

б) Нека претпоставиме дека е исполнет условот

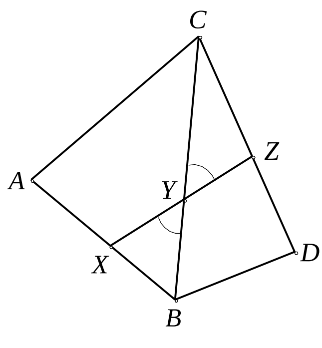
$$\measuredangle DAB + \measuredangle BCD = \measuredangle ABC + \measuredangle ADC \tag{1}$$

Со $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ги означуваме збировите на аглите меѓу рабовите во темињата $A, B, C, D$. Тогаш

$$\begin{aligned}\alpha + \gamma &= \measuredangle DAB + \measuredangle CAB + \measuredangle DAC + \measuredangle BCA + \measuredangle ACD + \measuredangle BCD\\ &= (\measuredangle ABC + \measuredangle CAB + \measuredangle BCA) + (\measuredangle CDA + \measuredangle DAC + \measuredangle ACD)\\ &= 360^\circ.\end{aligned}$$




*Црт. 13.2.*



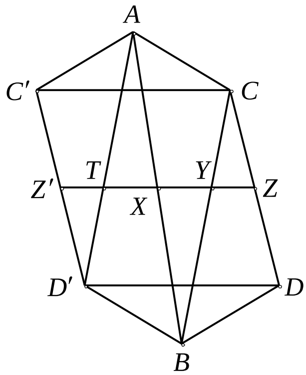

*Црт. 13.3.*

т.е. $\alpha + \gamma = 360^\circ$. Аналогно се докажува дека $\beta + \delta = 360^\circ$. Затоа, барем еден од аглите $\alpha, \gamma$ или од аглите $\beta, \delta$ не може да биде поголем од $180^\circ$. Нека се тоа аглите $\alpha$ и $\gamma$. Обвивката на тетраедарот $ABCD$ ја расечуваме по рабовите $AC, CD, DB$ (овој избор на рабови зависи од изборот на аглите кои се помали или еднакви на $180^\circ$ ). Во рамнина формираме фигура $AC'D'BDC$ (црт. 13.4.) која се состои од триаголници $AC'D'$, $AD'B$, $ABC$ и $BDC$. Од равенството (1) добиваме

$$\measuredangle C'D'A + \measuredangle ABC = \measuredangle CDA + \measuredangle ABC,\ \measuredangle D'AB + \measuredangle BCD = \measuredangle DAB + \measuredangle BCD$$

од каде што

$$\measuredangle C'D'A + \measuredangle ABC = \measuredangle D'AB + \measuredangle BCD \qquad (2)$$



*Црт. 13.4.*

За да од отсечката $C'D'$ дојдеме до отсечката $CD$, прво треба отсечката $C'D'$ да ја ротираме за агол $\measuredangle C'D'A$ околу точката $D'$ во негативна насока, потоа отсечката $D'A$ да ја ротираме за $\measuredangle D'AB$ околу точката $A$ во позитивна насока, потоа отсечката $AB$ за $\measuredangle ABC$ околу точката $B$, и конечно отсечката $BC$ за агол $\measuredangle DCB$ околу точката $C$. Според (2) исполнето е $CD \| C'D'$ и отсечките $CD$ и $C'D'$ се еднакво ориентирани. Затоа $DCD'C'$ е паралелограм. Од рамнокракиот триаголник $ACC'$ добиваме

$$\overline{CC'} = 2\overline{AC}\sin\tfrac{\alpha}{2} = \overline{DD'}.$$

Бидејќи аголот $\alpha$ не е поголем од $180^\circ$, целиот паралелограм $DCC'D'$ е содржан во ликот $AC'D'BDC$ и на секоја отсечка $ZZ'$ која е паралелна со $CC'$, и е придружена искршена линија $XYZTX$ која има минимална должина.

5. Докажи дека за секој природен број $m$ постои непразно конечно множество $S$ од точки од рамнината со следното својство: секоја точка од множеството $S$ е на единечно растојание од точно $m$ други точки од $S$.

**Решение.** Тврдењето од задачата е точно за $m=1$. (Доволно е да се земат две точки на единечно растојание). Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за природниот број $m$. При тоа нека $S=\{A_1, A_2, ..., A_n\}$. Околу секоја точка $A_i$, $i=1,2,...,n$, опишуваме единечна кружница. Оние точки кои припаѓаат барем на две од опишаните кружници ги има конечно многу. Нека тоа се точките $Q_1, Q_2, ..., Q_r$. Нека $\vec{e}$ е единичен вектор различен од секој од векторите $\overrightarrow{A_iA_j}, \overrightarrow{A_iQ_k}$, за $i,j\in\{1,2,...,n\}$ и $k\in\{1,2,...,r\}$. При транслација за вектор $\vec{e}$ точката $A_i$ се пресликува во точката $B_i$, $i\in\{1,2,...,n\}$.

Да го разгледаме множеството $S=\{A_1, A_2, ..., A_n, B_1, B_2, ..., B_n\}$. Секоја точка од ова множество е на единечно растојание од $m+1$ точка од тоа множество. Сега тврдењето на задачата следува од принципот на математичка индукција.

6. Разгледуваме квадратна таблица

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}$$

која содржи ненегативни цели броеви и го има следното својство: ако $a_{ij} = 0$, тогаш збирот на елементите на $i-$тата редица и $j-$тата колона е

$$a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} + a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj} \geq 0 .$$

Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geq \frac{1}{2} n^2 .$$

**Решение.** Ги разгледуваме сите можни збирови по редици и колони. Нека $p$ е најмалиот од сите тие збирови. Ако $p \geq n$, тогаш нема што да се докажува. Затоа нека $p < n$. Со замена на редиците и колоните збировите не се менуваат. Затоа можеме да претпоставиме дека збирот на елементите од првата колона е еднаков на $p$ и првите собирци се еднакви на нула, а останатите собирци се ненулти. Бидејќи $p < n$, во првата редица има најмалку $n-p$ нули. Збирот на елементите во секоја од првите $n-p$ колони е најмалку $n-p$, па затоа збирот на елементите во сите тие колони е поголем или еднаков на $(n-p)^2$. Во последните $p$ колони збирот на елементите е најмалку $p^2$. Затоа збирот на сите елементи $S_n$ го исполнуваат условот:

$$S_n \geq (n-p)^2 + p^2 = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2}(n-p)^2 \geq \frac{1}{2} n^2 ,$$

што и требаше да се докаже.