

ЗА ВИЕТОВАТА ТЕОРЕМА

Делата на повеќе математичари се вградени во современата средношколска математика. Но, два математичара за неа направиле повеќе отколку останатите: геометарот од античка Грција, Евклид и таткото на современата алгебра, Франсоа Виет.

Франсоа Виет (1540-1603) е француски математичар. Најнапред студирал право и работел како адвокат. Тој бил сестрано образован човек кој добро ги знаел класичните јазици, но и астрономијата, а на математиката и се предавал со занес. Умеел своето знаење и способности да ги примени на разни математички проблеми и се случувало со денови да остане без храна и сон, за да ги реши.

Неговите остроумни мисли ширум ја отвориле вратата на математиката во новиот свет на современата алгебра чии основи лежат на сметањето со букви. Пред него скоро сите пресметковни операции и знаци биле пишувани со зборови. На пример, денешниот израз $a^3 + ab = c$, се запишувал како:

A cubus + A planum in B aequantur C solido,

каде *aequantur* е напишано место знакот за еднакво, а *planum* значи плоштина. Во негово време не можеле да се запишат, па ниту да се проучуваат алгебарските равенки во општ облик или други алгебарски изрази. Виет и неговите следбеници забележале дека не се важни самите цифри или геометриските толкувања на самиот број, туку може да се смета дека сите тие броеви припаѓаат на ист вид и може да се означуваат, на пример со буквите од латинската азбука.

Денес, кога секој ученик умее автоматски да ги примени и запише правилата што ги вовел Виет, јасно е зошто тој е толку важен за севкупната современа алгебра.

Виетовата заслуга е и запишувањето на алгебарските изрази со помош на формули. Ваквиот начин на обележување и остроумноста му овозможиле на Виет да дојде до важни откритија при проучувањата на општи алгебарски равенки. Едно од нив, со кое особено се гордеел, е и познатата Виетова теорема, на средношколците позната во следниот облик:

Ако x_1 и x_2 се решенија (корени) на квадратната равенка $x^2 + px + q = 0$, тогаш за нив важи $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 x_2 = q$.

Нејзиниот доказ лесно може да се изведе ако на местата на x_1 и x_2 се стави

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Овде ќе биде докажана обопштената Виетова теорема, при што ќе бидат искористени следниве својства:

1° Секој полином со реални коефициенти има барем еден комплексен корен.

2° Ако a е корен на полиномот

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

тогаш постои полином

$$Q_{n-1}(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-1},$$

така што

$$P_n(x) = (x-a)Q_{n-1}(x).$$

3° Еден полином од n -ти степен може да има најмногу n корени.

4° Ако $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, тогаш постојат $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$, така што $P_n(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$.

Теорема. Ако $x_1, x_2, \dots, x_n$ се корени на полиномната равенка

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

каде $a_0 \neq 0$, тогаш се точни следните формули:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{-a_1}{a_0},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0},$$

$$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \frac{-a_3}{a_0},$$

.....

$$x_1x_2x_3\dots x_n = \frac{(-1)^n a_n}{a_0}$$

Доказ. Имаме

$$\begin{aligned} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n &= a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) \\ &= a_0x^n - a_0(x_1 + x_2 + \dots + x_n)x^{n-1} + a_0(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n)x^{n-2} - \\ &\quad - a_0(x_1x_2x_3 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n)x^{n-3} + \dots + (-1)^n a_0x_1\dots x_n. \end{aligned}$$

па со изедначување на коефициентите пред еднаквите степени на x ги добиваме бараните формули. ■

Пример 1. Не решавајќи ја равенката $x^3 - 3x^2 + 2x + 5 = 0$, најди го збирот на квадратите на нејзините корени.

Решение. Нека x_1 , x_2 и x_3 се корените на дадената равенка. Според Виетовата теорема имаме:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2 \quad \text{и} \quad x_1x_2x_3 = -5.$$

Ако во идентитетот

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

ги замениме првите две равенства, ќе добиеме:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3^2 - 2 \cdot 2 = 5.$$

Значи бараниот збир е 5. ■

Пример 2. Броевите α и β , ($\alpha \neq \beta$) се корени на равенката $x^3 + px + q = 0$ и за нив важи равенството $\alpha\beta + \alpha + \beta = 0$. Изрази го третиот корен на равенката преку α и β а потоа најди го односот меѓу p и q .

Решение. Нека третиот корен на дадената равенка е γ . Според формулите на Виет имаме $\alpha + \beta + \gamma = 0$, па

$$\gamma = -(\alpha + \beta) \quad (1)$$

Но, од условот на задачата $\alpha + \beta = -\alpha\beta$, па значи $\gamma = \alpha\beta$. Од формулите на Виет исто така важи:

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = p \quad (2)$$

$$\alpha\beta\gamma = -q \quad (3)$$

Ако сега од условот на задачата $\alpha\beta + \alpha + \beta = 0$ и равенствата (1), (2) и (3) ги исклучиме α , β и γ ќе добиеме $(p - q)^2 - q = 0$. ■

Пример 3. Ако x_1, x_2, x_3 се корени на равенката $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, состави равенка од трет степен по y , чии корени се: $y_1 = x_2 + x_3, y_2 = x_1 + x_3, y_3 = x_1 + x_2$.

Решение. Бидејќи x_1, x_2, x_3 се корени на равенката $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, според Виетовата теорема важи

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b \text{ и } x_1x_2x_3 = -c.$$

Од друга страна за корените на бараната равенка, која ќе има облик

$$y^3 + py^2 + qy + r = 0,$$

според Виетовата теорема ќе важи

$$y_1 + y_2 + y_3 = -p, y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = q \text{ и } y_1y_2y_3 = -r.$$

Од условите на задачата имаме

$$y_1 + y_2 + y_3 = 2(x_1 + x_2 + x_3) = 2(-a) \Rightarrow -p = -2a \Rightarrow p = 2a;$$

$$q = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3$$

$$= (x_2 + x_3)(x_1 + x_3) + (x_2 + x_3)(x_1 + x_2) + (x_1 + x_3)(x_1 + x_2)$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = a^2 + b$$

и

$$r = -y_1y_2y_3 = -(x_2 + x_3)(x_1 + x_3)(x_1 + x_2)$$

$$= -(2x_1x_2x_3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2)$$

$$= -((x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - x_1x_2x_3) = -(-ab + c) = ab - c$$

Тогаш бараната равенка од трет степен гласи $y^3 + 2ay^2 + (a^2 + b)y + ab - c = 0$. ■

Пример 4. Најди ги корените на равенката $x^3 + ax + b = 0$, ако се знае дека има еден двоен корен.

Решение. Ако x_1, x_2, x_3 се корени на дадената равенка, тогаш според Виетовата теорема имаме $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a$ и $x_1x_2x_3 = -b$. Од условот на задачата нека $x_1 = x_2$. Тогаш имаме $2x_1 + x_3 = 0$, $x_1^2 + 2x_1x_3 = a$ и $x_1^2x_3 = -b$. Од првата равенка $x_3 = -2x_1$. Заменувајќи во втората и третата равенка добиваме $x_1^2 - 4x_1 = a$ и $-2x_1^3 = -b$. Значи $x_1^2 = -\frac{a}{3}$, односно $x_1^3 = \frac{b}{2}$. Одовде бидејќи $x_1x_1^2 = \frac{b}{2}$, добиваме $x_1(-\frac{a}{3}) = \frac{b}{2}$, односно $x_1 = -\frac{3b}{2a}$. На крајот, бидејќи $x_3 = -2x_1$, имаме $x_3 = \frac{3b}{a}$. ■

Пример 5. Кој услов треба да го исполнат коефициентите p , q и r на равенката $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, така што за нејзините корени да важи релацијата $x_1x_2 = x_3$?

Решение. Од Виетовата теорема имаме

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q \quad \text{и} \quad x_1x_2x_3 = -r.$$

Од првата равенка $x_1 + x_2 = -(x_3 + p)$, додска во втората и третата равенка ако го примениме условот на задачата ќе добиеме

$$x_3 + x_3(x_1 + x_2) = q \tag{1}$$

$$x_3^2 = -r \tag{2}$$

Значи, од (1) и (2) ќе имаме

$$x_3 + x_3(-(x_3 + p)) = q \Rightarrow x_3 - x_3^2 - x_3p = q \Rightarrow$$

$$x_3 + r - x_3p = q \Rightarrow x_3(1 - p) = q + r \Rightarrow x_3 = \frac{q + r}{1 - p}.$$

Додека од (2) ќе имаме $x_3 = \pm\sqrt{-r}$. Од споредбата на последните два резултата ја добиваме бараната врска меѓу коефициентите p , q и r на дадената равенка

$$(1 - p)\sqrt{-r} = q + r. \blacksquare$$

Пример 6. Одреди ги коефициентите a и b , така што равенката од четврт степен $ax^4 + bx^3 + 1 = 0$, да има двоен корен $x = 1$.

Решение. Нека x_1, x_2, x_3, x_4 се корени на дадената равенка, тогаш според Виетовата теорема имаме

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0,$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0 \text{ и}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{1}{a}.$$

Од условот на задачата нека $x_3 = x_4 = 1$, тогаш во горните равенства имаме

$$x_1 + x_2 + 2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 1 = 0, \quad 2x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 = 0 \text{ и } x_1x_2 = \frac{1}{a}.$$

Од втората и третата равенка наоѓаме дека $x_1x_2 = \frac{1}{3}$, додека $x_1 + x_2 = -\frac{2}{3}$.

Заменувајќи ги овие резултати во четвртата, односно првата равенка, ќе добиеме дека $a = 3$ и $b = 4$. ■

Пример 7. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ xy + yz + xz = a^2 \\ xyz = a^3 \end{cases}$$

Решение 1. Да го замениме збирот $x + y$ од првата равенка во втората, ќе добиеме $xy + z(a - z) = a^2$. Сера xy од оваа равенка да го замениме во третата равенка. Добиваме $z^3 - az^2 + a^2z - a^3 = 0$. Левата страна од ова равенство можеме да ја разложиме на множители $(z - a)(z - ai)(z + ai) = 0$. Од овде имаме $z_1 = a$, $z_2 = ai$ и $z_3 = -ai$.

Ако го замениме $z_1 = a$ во првата и втората равенка ќе го добиемс системот $x + y = 0$, $xy = a^2$. Одовде $x = \pm ia$, $y = \mp ia$. Притоа лесно може да се провери дека тројките броеви $(x, y, z): (ia, -ia, a)$, $(-ia, ia, a)$, го задоволуваат почетниот систем равенки. Аналогно наоѓаме уште два пара решенија, од $z_2 = ai$ и од $z_3 = -ai$. Тоа се:

$$(a, -ia, ia), (-ia, a, ia) \text{ и } (ia, a, -ia), (a, ia, -ia).$$

На тој начин шесте горедобиени решенија го задоволуваат системот. ■

Решение 2. До овој резултат можеме да дојдеме и на поелегантен начин, ако воочиме дека дадениот систем равенки се сведува на решавање на кубната равенка:

$$t^3 - at + a^2t - a^3 = 0 \tag{1}$$

Навистина, ако x, y, z се решенија на равенката (1), тогаш од Виетовите формули добиваме дека за x, y, z важат релациите од почетниот систем.

Бидејќи

$$t^3 - at^2 + a^2t - a^3 = t^2(t-a) + a^2(t-a) = (t-a)(t-ai)(t+ai),$$

трите корени на равенката (1) се: $t_1 = a, t_2 = ia, t_3 = -ia$.

Ако ги индексираме на сите можни начини (ги има 3!), ќе ги добиеме сите решенија на разгледуваниот систем. На таков начин ние иовторно ги имаме шесте решенија, најдени и во погоре наведеното решение.

Овде ќе докажеме дека тие шест решенија се сите можни решенија на дадениот систем равенки. Навистина, да земеме тројката (x_1, y_1, z_1) , да е некое решение на системот равенки и да ја разгледаме равенката од трет степен

$$(t - x_1)(t - x_2)(t - x_3) = 0,$$

чији корени се броевите x_1, y_1 и z_1 . Ако се ослободиме од заградите во равенката и ако ги искористиме равенствата

$$x_1 + y_1 + z_1 = a, \quad xy + yz + xz = a^2 \quad \text{и} \quad xyz = a^3$$

ќе забележиме дека равенките (1) и

$$(t - x_1)(t - x_2)(t - x_3) = 0$$

се еквивалентни. Значи x_1, y_1 и z_1 се јавуваат како корени и на равенката (1), што требаше и да се докаже.

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Не решавајќи ја равенката $x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$, најди го збирот на квадратите на нејзините корени.
2. Состави равенка од трет степен по y , чији корени се $y_1 = x_2 + x_3, y_2 = x_1 + x_3$ и $y_3 = x_1 + x_2$, каде x_1, x_2 и x_3 се корени на равенката $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, без да ја решавааш равенката по x .
3. Под кој услов равенката $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, има трикратен корен?
4. Кој услов треба да го исполнат коефициентите p, q и r на равенката $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, така што за нејзините корени да важи релацијата $x_1 + x_2 = x_3$.
5. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ xy + xz + yz = 27 \end{cases}$$

Литература

- [1] Bell Eric Templ, *Veliki matematičari*, Znanje, Zagreb, 1972.
- [2] Stipanić Ernest, *Putevima razvitka maiematike*, Vuk Karadzić, Beograd, 1988.
- [3] Лидский В. Б. и др., *Задачи по элементарной математике*, Москва, 1962.