Виктор Јанекоски, Скопје

ЕДЕН ДИРЕКТЕН ДОКАЗ НА ШТАЈНЕРОВАТА ТЕОРЕМА ЗА РАМНОКРАК ТРИАГОЛНИК

Во литературата постојат повеке планиметриски, воглавно индиректни докази на Штајнеровата теорама: *Ако симетралите на двата агли на триаголникот се еднакви, тогаш триаголникот е рамнокрак.* Овде ке биде изложен еден директен доказ на горната теорема.

Нека е

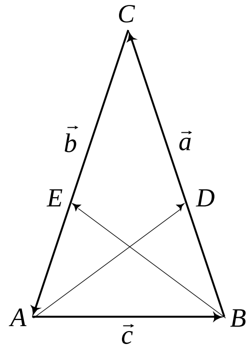
$$\overrightarrow{AB} = \vec{c},\ \overrightarrow{BC} = \vec{a},\ \overrightarrow{CA} = \vec{b},$$

каде

$$AB = c,\ BC = a,\ CA = b$$

при што (црт. 1)

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0. \tag{1}$$



Црт. 1

Треба да се покаже дека од еднаквоста на симетралата AD на внатрешниот агол A со симетралата BE на внатрешниот агол B на дадениот триаголник ABC

$$AD = BE \tag{2}$$

следува дека $a = b$.

Симетралите на внатрешните агли A и B се одредени со векторите:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= \lambda'(\overrightarrow{c_0} - \overrightarrow{b_0}) = \lambda(b\vec{c} - c\vec{b}) \qquad (\lambda = \lambda'/bc), \\ \overrightarrow{BE} &= \mu'(\overrightarrow{a_0} - \overrightarrow{c_0}) = \mu(c\vec{a} - a\vec{c}) \qquad (\mu = \mu'/ca), \end{aligned} \tag{3}$$

при што засега λ, μ се неопределени скалари, а $\overrightarrow{a_0}, \overrightarrow{b_0}, \overrightarrow{c_0}$ се единечни вектори во насока со дадените вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ соодветно. Од друга страна

$$\overrightarrow{AD} = \vec{c} + m\vec{a}, \quad \overrightarrow{BE} = \vec{a} + n\vec{b} \tag{4}$$

при што m, n се исто така неопределени скалари засега.

Со изедначување на изразите (3) и (4) кои го одредуваат векторот $\overrightarrow{AD}$, од релацијата (1), добиваме

$$(\lambda c - m)\vec{b} + (1 - m - \lambda b)\vec{c} = 0$$

од каде заради нелинеарната зависност на векторите $\vec{b}$ и $\vec{c}$, добиваме

$$\lambda = \frac{1}{b+c}, \quad m = \frac{c}{b+c}. \tag{5}$$

Со вредноста на λ од (5) и од (3) имаме,

$$\overrightarrow{AD} = \frac{b\vec{c} - c\vec{b}}{b+c} \tag{6}$$

од каде што со циклична замена $\vec{b} \to \vec{c} \to \vec{a},\ b \to c \to a$ добиваме

$$\overrightarrow{BE} = \frac{c\vec{a} + a\vec{c}}{c+a}. \tag{7}$$

Бидејќи според (1),

$$2\vec{b}\cdot\vec{c}=a^2-(b^2+c^2),\quad 2\vec{c}\cdot\vec{a}=b^2-(c^2+a^2),$$

за квадратите на интензитетите на векторите дадени со (6) и (7) добиваме:

$$AD^2=bc\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2},\tag{8}$$

$$BE^2=ca\frac{(c+a+b)(c+a-b)}{(c+a)^2}.\tag{9}$$

Сега условот (2), со помош на изразите (8) и (9) гласи

$$b(c+a)^2(b+c)-ab(c+a)^2=a(b+c)^2(c+a)-ab(b+c)^2$$

што напишано како

$$ab\left[a(b+c)^2-(c+a)^2\right]+(b+c)(c+a)\left[b(c+a)-a(b+c)\right]=0,$$

или

$$ab(a+b+2c)(b-a)+(b+c)(c+a)(b-a)c=0,$$

конечно добиваме

$$(b-a)\left[ab(a+b+2c)+c(b+c)(c+a)\right]=0.\tag{10}$$

Бидејќи сите изрази во средната заграда од релацијата (10), добоваме дека $b-a=0$, што и требаше да се докаже.