LIV олимпијада

1. Докажи, дека за секои два природни броја k и n постојат k природни броеви $m_1, m_2, ..., m_k$ (не задолжително различни) такви што

$$1+\frac{2^k-1}{n}=(1+\frac{1}{m_1})(1+\frac{1}{m_2})...(1+\frac{1}{m_k}) .$$

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по k .

За $k=1$ и за секој $n\in\mathbb{N}$ имаме $1+\frac{2^k-1}{n}=1+\frac{1}{n}$, па ако земеме $m_1=n$, добиваме дека равенството (1) е исполнето, т.е. тврдењето важи за $k=1$ и за секој $n\in\mathbb{N}$.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $k=r-1$ и за секој $n\in\mathbb{N}$. Нека $k=r$ и $n\in\mathbb{N}$. Можни се два случаја: $2\,|\,n=2n_1$ и $2\nmid n=2n_1-1$.

1) Ако $2\,|\,n=2n_1$, тогаш

$$1+\frac{2^r-1}{n}=\frac{n+2^r-1}{n+2^r-2}\cdot\frac{n+2^r-2}{n}=(1+\frac{1}{n+2^r-2})(1+\frac{2^{r-1}-1}{n_1}) .$$

Од индуктивната претпоставка следува дека постојат $m_1, m_2, ..., m_{r-1}$ такви што

$$1+\frac{2^{r-1}-1}{n_1}=(1+\frac{1}{m_1})(1+\frac{1}{m_2})...(1+\frac{1}{m_{r-1}})$$

па затоа доволно е да земеме $m_r=n+2^r-2$.

2) Ако $2\nmid n=2n_1-1$, тогаш

$$1+\frac{2^r-1}{n}=\frac{n+2^r-1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{2n_1-1+2^r-1}{2n_1-1+1}\cdot\frac{n+1}{n}=(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2^{r-1}-1}{n_1}) .$$

Од индуктивната претпоставка следува дека постојат $m_1, m_2, ..., m_{r-1}$ такви што

$$1+\frac{2^{r-1}-1}{n_1}=(1+\frac{1}{m_1})(1+\frac{1}{m_2})...(1+\frac{1}{m_{r-1}}) ,$$

па затоа доволно е да земеме $m_r=n$.

Според тоа, и во двата случаја тврдењето важи за $k=r$ и секој $n\in\mathbb{N}$, со што доказот е завршен.

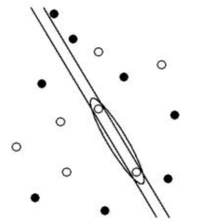
2. Конфигурацијата од 4027 точки во рамнината ја нарекуваме *колумбиска* ако се состои од 2013 црвени и 2014 сини точки, при што никои три точки од конфигурацијата не се колинерани. Со повлекување на прави рамнината се дели на области. За распоредот на правите ќе велиме дека е *добар* за колумбиската конфигурација, ако се исполнети следниве услови:

- ниту една права не минува низ некоја точка од конфигурацијата,
- ниту една област не содржи различно обоени точки.

Определи го најмалиот број k таков што за секоја колумбиска конфигурација од 4027 постои добар распоред на k прави.

Решение. *Прв начин.* Да разгледаме конфигурација на точки $A_1, A_2, ..., A_{4027}$ во која $A_1A_2...A_{4027}$ е правилен 4027-аголник и точката A_n е сина за $2 \nmid n$ и црвена за $2 | n$. Во добиениот распоред на прави, секоја од 4026 отсечки A_nA_{n+1}, за $n = 1, 2, ..., 4026$ мора да биде пресечена барем со една права. Од друга страна, секоја права може да сече најмногу две такви отсечки. Затоа во овој случај, за добар распоред ни се потребни барем $2013 = \frac{4026}{2}$ прави, односно $k \geq 2013$.

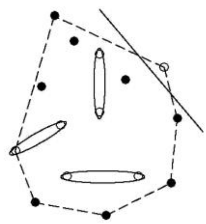
Ќе докажеме дека за секоја колумбиска конфигурација постои добар распоред на 2013 прави.



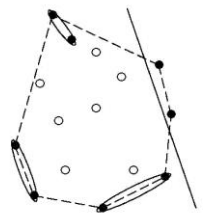
На почетокот да забележиме дека било кои две еднобојни точки може да се одделат од конфигурацијата со помош на две прави. Доволно е да се земат две прави кои се паралелни со правата определена со овие две точки и кои се доволно блиску до неа (цртеж 1).

Ја разгледуваме конвексната обвивка $\mathcal{P}$ на дадените 4027 точки. Можни се два случаја.

1) Ако на $\mathcal{P}$ постои црвена точка, тогаш неа можеме да ја одделиме со една права (цртеж десно). Преостанатите 2012 црвени точки можеме да ги поделиме во 1006 парови и според претходно изнесеното да ги одделиме со помош на 2012 прави. На овој начин повлековме 2013 прави кои формираат добар распоред.



2) Ако сите точки на $\mathcal{P}$ се сини, тогаш со помош на една права може да одделиме две сини точки (цртеж десно). На ист начин како во случајот 1), преостанатите 2012 сини точки можеме да ги одделиме со помош на 2012 прави, со што добивме добар распоред на 2013 прави.



Втор начин. Со индукција по n ќе докажеме дека за произволно множество од n точки обоени во црвено или сино постои добар распоред на $[\frac{n}{2}]$ прави.

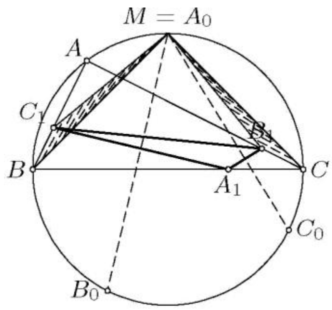
За $n \leq 2$ тврдењето тривијално важи. Нека $n > 2$. Ја разгледуваме конвексната обвивка на дадените n точки и нека A и B се две нејзини соседни темиња. Според индуктивната претпоставка, за преостанатите $n-2$ точки можеме да повлечеме $[\frac{n-2}{2}] = [\frac{n}{2} - 1] = [\frac{n}{2}] - 1$ прави во добар распоред. Можни се три случаи:

1) Ако точките A и B се истобојни, тогаш од преостанатите $n-2$ точки можеме да ги одделиме со една права l. Така добиваме добар распоред на

вкупно $[\frac{n}{2}]-1+1=[\frac{n}{2}]$ прави.

2) Ако A и B се различно обоени, но се одделени со некоја од веќе нацртаните прави, повторно е доволно да се додаде правата l.
3) Ако A и B се различно обоени, но лежат во иста област определена со повлекувањето на $[\frac{n}{2}]-1$ прави, тогаш во таа обаст точките кои се различни од A и B се еднобојни, да кажеме дека се сини. Точно една од точките A и B е црвена, па неа можеме да ја одделиме од другите точки со една права, со што добиваме добар распоред на $[\frac{n}{2}]-1+1=[\frac{n}{2}]$ прави.

3. Припишаната кружница на триаголникот ABC наспроти темето A ја допира страната BC во точката A_1. Аналогно се дефинираат точките B_1 на CA и C_1 на AB, како допирни точки на припишаните кружници наспроти темињата B и C, соодветно. Нека центарот на опишаната кружница околу триаголникот $A_1B_1C_1$ лежи на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Докажи дека триаголникот ABC е правоаголен.



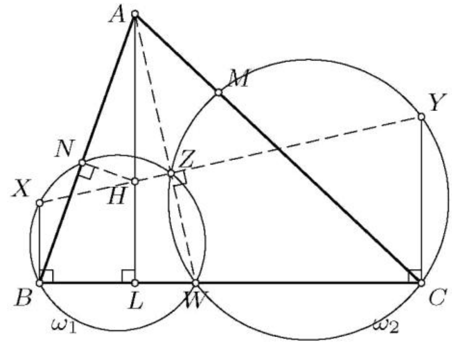
Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека центарот M на опишаната кружница околу триаголникот $A_1B_1C_1$ е во внатрешноста на $\measuredangle B_1A_1C_1$. Освен во M симетралата на отсечката B_1C_1 ја сече опишаната кружница на $\triangle ABC$ во некоја точка M' на спротивната страна на правата B_1C_1 во однос на A_1.

Со A_0, B_0, C_0 да ги означиме средините на лаците CAB, ABC, BCA, соодветно. Бидејќи $\overline{C_1B}=\overline{B_1C}, \overline{A_0B}=\overline{A_0C}$ и $\measuredangle A_0BC_1=\measuredangle A_0CB_1$, заклучуваме дека $\triangle A_0BC_1$ е складен со $\triangle A_0CB_1$, па затоа $\overline{A_0B_1}=\overline{A_0C_1}$, т.е. A_0 припаѓа на симетралата на отсечката B_1C_1. Оттука следува дека важи $\measuredangle AB_1A_0=\measuredangle AC_1A_0$, па затоа A_0 припаѓа на кружницата B_1AC_1. Бидејќи A_0 е точка на надворешната симетрала на $\measuredangle B_1AC_1$, таа е на иста страна на правата B_1C_1 на која е точката A. Оттука следува дека $A_0 \not\equiv M'$, т.е. $A_0 \equiv M$ е центарот на кружницата $A_1B_1C_1$.

Од равенството $\measuredangle B_1A_0C_1=\measuredangle B_1AC_1=\alpha$ следува $\measuredangle B_1A_1C_1=180^\circ-\frac{\alpha}{2}$. Од друга страна, бидејќи B_0A_0 и C_0A_0 се соодветно симетралите на страните A_1C_1 и A_1B_1, добиваме дека $\measuredangle B_1A_1C_1=180^\circ-\measuredangle B_0A_0C_0=90^\circ+\frac{\alpha}{2}$. Од последните две равенства следува $\alpha = 90^\circ$.

4. Нека H е ортоцентарот на остроаголниот триаголник ABC, а W е точка на страната BC различна од темињата B и C. Точките M и N се подножја на висините повлечени од темињата B и C, соодветно. Нека ω_1 е опишаната кружница околу триаголникот BWN, а X е точка на ω_1 таква што WX е дијаметар на ω_1. Аналогно, нека ω_2 е опишаната кружница околу триаголникот CWM, а Y точка на ω_2 таква што WY е дијаметар на ω_2. Докажи дека точките X,Y и H се колинеарни.

Решение. Со Z да ја означиме втората пресечна точка на кружниците ω_1 и ω_2. Радикалните оски на паровите кружници (ω,ω_1), (ω,ω_2) и (ω_1,ω_2) се соодветно правите BN,CM и WZ, па затоа радикалниот центар на овие три кружници е $A = BN \cap CM$, што значи дека $A \in WZ$.



Нека L подножјето на висината повлечена од темето A. Од

$$\overline{AZ}\cdot\overline{AW} = \overline{AN}\cdot\overline{AB} = \overline{AH}\cdot\overline{AL},$$

следува дека точките H,L,W и Z се конциклични. Ако $W \not\equiv L$, оттука следува дека $\measuredangle AZH = \measuredangle ALW = 90^\circ = \measuredangle AZX$, па затоа H лежи на правата XYZ . Тврдењето важи и за $W \equiv L$, бидејќи тогаш $H \equiv Z$.

5. Нека $\mathbb{Q}^+$ е множеството позитивни рационални броеви. Нека функцијата $f:\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}$ ги задоволува условите:

i) за секои $x,y \in \mathbb{Q}^+$ важи $f(x)f(y) \ge f(xy)$,

ii) за секои $x,y \in \mathbb{Q}^+$ важи $f(x+y) \ge f(x)+f(y)$,

iii) постои рационален број $a>1$ таков што $f(a)=a$.

Докажи дека $f(x)=x$, за секој $x \in \mathbb{Q}^+$.

Решение. Од $f(1)f(a) \ge f(1\cdot a)$ следува $f(1)\ge 1$. Од *ii*) со едноставна индукција добиваме $f(nx)\ge nf(x)$ за секои $n\in\mathbb{N}$ и $x\in\mathbb{Q}^+$. Така, $f(n)\ge nf(1)$ и $f(n)f(\frac{m}{n}) \ge f(m)>0$, па затоа $f(x)>0$, за секој $x\in\mathbb{Q}^+$. Оттука, според *ii*) заклучуваме дека функцијата f строго расте, па затоа

$$f(x) \geq f([x]) \geq [x] > x-1 \text{ за секој } x \in \mathbb{Q}^+.$$

Нека $x > 1$. Од i) со индукција добиваме $f(x)^n \geq f(x^n) \geq x^n - 1$, па за секој $n \in \mathbb{N}$ имаме $\frac{f(x)}{x} \geq \sqrt[n]{1 - \frac{1}{x^n}} \geq 1 - \frac{1}{x^n}$, од каде добиваме $\frac{f(x)}{x} \geq 1$, т.е. $f(x) \geq x$ за секој $x \in \mathbb{Q}^+$.

Сега, од $a^n = f(a)^n \geq f(a^n) \geq a^n$ следува $f(a^n) = a^n$. Значи, за $x > 1$ и $n \in \mathbb{N}$ таков што $a^n - x > 1$ важи

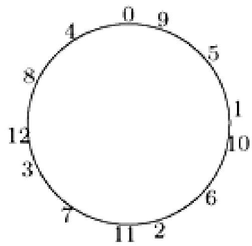
$$a^n = f(a^n) \geq f(x) + f(a^n - x) \geq x + (a^n - x) = a^n \ ,$$

па затоа $f(x) = x$. Конечно, бидејќи $f(n) = n$ за $n \in \mathbb{N}$, имаме

$$nf(x) = f(n)f(x) \geq f(nx) \geq nf(x),$$

па затоа $f(nx) = nf(x)$, од каде што следува дека $f(x) = x$ за секој $x \in \mathbb{Q}^+$.

6. Дадени се природен број $n \geq 3$ и $n+1$ точка кои дадена кружница ја делат на лаци со еднакви должини. Ги разгледуваме сите можни означувања на овие точки со броевите $0, 1, ..., n$, каде секоја ознака се користи точно еднаш и две такви означувања се сметаат за еднакви ако едното може да се добие од другото со ротација на кругот. За означувањето ќе велиме дека е *убаво* ако за секои четири ознаки $a < b < c < d$, такви што $a + d = b + c$, тетивата која ги поврзува точките означени си a и d не ја сече тетивата која ги поврзува точките означени со b и c.
Нека M е бројот на убавите означувања, а N е бројот на подредени парови природни броеви (x, y) такви што $x + y \leq n$ и $\text{NZD}(x, y) = 1$. Докажи дека $M = N + 1$.
Решение. Наместо означување на дадените $n+1$ точка ќе работиме со циклични распореди на броевите $0, 1, ..., n$ на кружницата, каде распоредот е *убав* ако соодветствува на убаво означување.
Избираме ирационален број $\alpha \in (0,1)$. Произволна точка на кружницата да ја означиме со 0, а за $k \in \mathbb{N}$ со k ја означуваме точката на кружницата на аголно растојание $\alpha\pi$ од точката $k-1$ во насока на движењето на стрелките на часовникот. Добиениот распоред на броевите $0, 1, ..., n$ го нарекуваме *цикличен* и го означуваме со $R(\alpha)$, цртеж десно.



$R(\alpha)$ за $n=12$ и $\frac{2}{9} < \alpha < \frac{1}{4}$

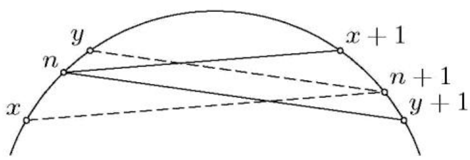
Со $[p, q]$ да ја означиме тетивата на кружницата определена со точките p и q, а со $[p, q]$ соодветниот лак во насока на движењето на стрелките на часовникот. Ако броевите $a<b<c<d$ го задоволуваат условот $a+d=b+c$, тогаш точките означени со a,b,c,d се темиња на рамнокрак трапез, па затоа $[a,d]$ е паралелна со $[b,c]$. Следува дека распоредот $R(\alpha)$ е убав.

Бидејќи α се менува од 0 до 1, распоредот $R(\alpha)$ единствено се менува кога минува низ рационалниот број $\frac{p}{q}$ со $\mathrm{NZD}(p,q)=1$ и $q\leq n$. Бидејќи $\frac{p}{q}\to$ $(p,q-p)$ е биекција меѓу ваквите дропки $\frac{p}{q}$ и паровите (x,y) природни броеви со $\mathrm{NZD}(x,y)=1$ и $x+y\leq n$, вакви рационални броеви $\frac{p}{q}$ има точно N; нека $0=\frac{p_0}{q_0}<\frac{p_1}{q_1}<\frac{p_2}{q_2}<...<\frac{p_N}{q_N}<1<\frac{p_{N+1}}{q_{N+1}}$. Секој интервал $(\frac{p_i}{q_i},\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}})$ определува по еден цикличен распоред, па затоа има точно $N+1$ различни циклични распореди.

Да забележиме дека за $\alpha\in(\frac{p_i}{q_i},\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}})$ броевите непосредно пред и по бројот 0 во насока на движењето на стрелката на часовникот се еднакви на q_{i+1} и q_i, соодветно. Навистина, за доволно мало ε, јасно е дека во $R(\frac{p_i}{q_i}+\varepsilon)$ точката q_i е непосредно по 0, а додека во $R(\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}-\varepsilon)$ точката q_{i+1} е непосредно пред 0.

Останува со индукција по n да докажеме дека секој убав распоред е цикличен. Ова е точно за $n\leq 2$. Да разгледаме убав распоред R за броевите $0,1,...,n+1$. Според индуктивната претпоставка, распоредот на броевите $0,1,...,n$ се совпаѓа со распоредот $R(\alpha)$ за α од некој интервал $(\frac{p_i}{q_i},\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}})$.

Нека бројот n се наоѓа на лакот $[x,y]$ на кој нема други точки. Бидејќи тетивите $[x+1,n]$ и $[y,n+1]$ не се сечат, $n+1$ се наоѓа на лакот $[x+1,x]$. Тетивите $[y+1,n]$ и $[y,n+1]$ не се сечат, па затоа $n+1$ се наоѓа на лакот $[y,y+1]$.



Значи, $n+1$ е на лакот $[x+1,y+1]$, цртеж десно. Од друга страна, заради цикличноста, единствена точка која може да лежи на овој лак е точката 0.

1) Ако точката 0 не е на лакот $[x+1,y+1]$, распоредот R е еднозначно определен и тој мора да се совпадне со $R(\alpha)$.
2) Точката 0 е на лакот $[x+1,y+1]$ ако и само ако $\frac{k}{n+1}\in(\frac{p_i}{q_i},\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}})$ за некој $k\in\mathbb{N}$. Во овој случај, ако бројот $n+1$ го ставиме меѓу $x+1$ и 0, односно

меѓу 0 и $y+1$, добиваме две можности за распоредот R. Во распоредот $R(\alpha)$ за $\frac{p_i}{q_i} < \alpha < \frac{k}{n+1}$ и $\frac{k}{n+1} < \alpha < \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$, точката $n+1$ припаѓа на лаците $[x+1, 0]$ и $[0, y+1]$, соодветно. Значи, двата можни распореди се циклични.