

XX олимпијада

1. Нека $m, n \in \mathbb{N}$ се такви што $n > m \geq 1$ и последните три цифри на броевите 1978^m и 1978^n (во декаден запис) се еднакви.

Најди ги броевите m и n за кои збирот $m+n$ е најмал.

Решение. Според условот на задачата бројот $1978^m(1978^{n-m}-1)$ е делив со $1000 = 8 \cdot 125$. Бидејќи бројот $1978^{n-m}-1$ е непарен, а 1978 е парен добиваме

$$8 \mid 1978^m \quad \text{и} \quad 125 \mid (1978^{n-m}-1).$$

Но, $1978 = 2 \cdot 989$ па од првиот услов следува $m \geq 3$, а од вториот услов

$$1978^{n-m} \equiv (-2)^{n-m} \equiv 1 \pmod{5}.$$

Ова е можно само за $n-m = 4k$, $k \geq 1$. Останува да се определи најмалиот природен број k , таков што бројот $1978^{4k}-1$ е делив со 125. Од

$$1978^4 \equiv 6 \pmod{125}$$

добиваме $6^k \equiv 1 \pmod{125}$. Најмалиот таков број е 25, па решението на задачата е $m=3$, $n=103$.

2. Нека P е внатрешна точка на сферата S , а A, B и C се произволни точки на S такви што правите PA, PB и PC се заемно нормални. Со Q да го означиме темето на паралелопипедот определен со PA, PB, PC кое е дијагонално спротивно на темето P .

Најди го геометриското место на точката Q , за сите можни положби на точките A, B и C .

Решение. Ги воведуваме векторите $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{PB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{PC}$, $\vec{\rho} = \overrightarrow{OP}$ и $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$, каде што O е центарот на сферата. Тогаш имаме

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0, \quad \vec{q} = \vec{\rho} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \quad (\vec{\rho} + \vec{a})^2 = (\vec{\rho} + \vec{b})^2 = (\vec{\rho} + \vec{c})^2 = R^2,$$

каде R е радиусот на сферата. Според тоа,

$$\begin{aligned} \vec{q}^2 &= \vec{\rho}^2 + \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{\rho} + 2\vec{b} \cdot \vec{\rho} + 2\vec{c} \cdot \vec{\rho} \\ &= (\vec{\rho} + \vec{a})^2 + (\vec{\rho} + \vec{b})^2 + (\vec{\rho} + \vec{c})^2 - 2\vec{\rho}^2 = 3R^2 - 2p^2, \end{aligned}$$

каде $p = |\vec{\rho}|$. Бидејќи точката P е во внатрешноста на сферата добиваме

$$p < R, \text{ па според тоа } q = |\vec{q}| = \sqrt{3R^2 - 2p^2} > R.$$

Значи, точката Q се наоѓа на сфера која е концентрична на дадената сфера, чиј радиус е $\sqrt{3R^2 - 2p^2}$. Ќе докажеме дека оваа сфера е бараното геометричко место на точки.

За дадената точка Q за која $\overline{OQ} = \sqrt{3R^2 - 2p^2}$ конструираме сфера чиј радиус е $\overline{PQ}$. Бидејќи $\overline{OQ} > R > \overline{OP}$ таа ја сече дадената сфера. Со C означуваме една од пресечните точки, а со X дијагонално спротивното теме на правоаголникот определен со CP и CQ . Векторски се докажува дека е исполнето равенството $\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OX}^2$, па добиваме

$$\overline{OX}^2 = \overline{OP}^2 + (3R^2 - 2\overline{OP}^2) - R^2 = 2R^2 - p^2 > R^2,$$

т.е. X е надвор од дадената сфера. Пресекот на рамнината α , која минува низ точката P и е нормална на PC е кружница k , при што точката P е на таа кружница, а X е надвор од неа. Кружница со радиус $\overline{PX}$ во рамнината α ја сече кружницата k во точка B . Нека A е теме на правоаголник $PBXA$ спротивно на темето B . Ако B е на дадената сфера, добиваме

$$\overline{OA}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OX}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{OP}^2 + 2R^2 - \overline{OP}^2 - R^2 = R^2,$$

т.е. A е исто така на дадената сфера и сите услови се исполнети.

3. Множеството природни броеви е запишано како унија на две дисјунктни подмножества: $\{f(1), f(2), \dots, f(n), \dots\}$, $\{g(1), g(2), \dots, g(n), \dots\}$ такви што

$$f(1) < f(2) < \dots < f(n) < \dots, \quad g(1) < g(2) < \dots < g(n) < \dots$$

и

$$g(n) = f(f(n)) + 1, \text{ за секој } n \geq 1$$

Најди го бројот $f(240)$.

Решение. Бидејќи $g(n) = f(f(n)) + 1$ и $f(f(n))$ е член на низата f , постојат точно $n-1$ членови на низата g кои што се помали од $f(f(n))$. Според тоа

$$f(f(n)) = f(n) + n - 1. \quad (1)$$

Бидејќи $g(1) = f(f(1)) + 1 > 1$ добиваме $f(1) = 1$ и $g(1) = f(1) + 1 = 2$. Да забележиме уште дека бројот кој што претходи на членот на низата g мора да припаѓа на низата f , т.е. не може два последователни броја да бидат членови на низата g . Навистина, ако за некој n важи $g(n+1) = g(n) + 1$, тогаш според условот на задачата ќе важи $f(f(n+1)) = f(f(n)) + 1$, па од (1) ќе следува

$$f(f(n)) + 1 = f(n) + n - 1 \text{ и } f(f(n+1)) = f(n+1) + n,$$

т.е. $f(n) = f(n+1)$, што противречи на условот на задачата.

Од досега изнесеното и од формулата (1) добиваме:

$$\begin{aligned}
 f(2) &= 3, \\
 f(3) &= f(f(2)) = f(2) + 1 = 4, \\
 f(4) &= f(f(3)) = f(3) + 2 = 6, \\
 f(6) &= f(f(4)) = f(4) + 3 = 9, \\
 f(9) &= 9 + 5 = 14, \\
 f(14) &= 22, \\
 f(22) &= 35, \\
 f(35) &= 56, \\
 f(56) &= 90, \\
 f(90) &= 145, \\
 f(145) &= 234, \\
 f(234) &= 378.
 \end{aligned}$$

Понатаму, од $f(35) = 56$ следува $91 = f(f(35)) + 1 = g(35)$, па според тоа $f(57) = 92$. Сега повторно со примена на (1) добиваме:

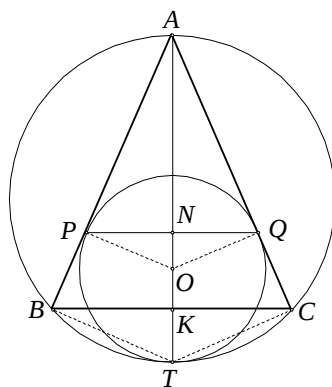
$$f(92) = 148, \quad f(148) = 239, \quad f(239) = 386.$$

Конечно, $378 = f(f(148)) + 1 = g(148)$, па според тоа $f(240) = 388$.

4. Даден е рамнокрак триаголник ABC , $\overline{AB} = \overline{AC}$. Кружницата, која одвнатре ја допира опишаната кружница околу $\triangle ABC$, ги допира страните AB и AC во точки P и Q . Докажи дека средината на отсечката PQ е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$.

Решение. Нека O е центар на дадената кружница, а T е нејзина допирна точка со опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Добиената фигура е симетрична во однос на правата која што минува низ A, O, T и средината K на отсечката BC при што таа е нормална на BC . Хомотетија со центар во точката A која ја пресликува T во K , ја пресликува дадената кружница во впишаната кружница на $\triangle ABC$, па значи точката O ја пресликува во центарот U на таа кружница.

Центарот на опишаната кружница на $\triangle ABC$ е исто така на споменатата права, па $\angle ABT = \angle ACT = 90^\circ$. Четириаголниците $ABTC$ и $APOQ$ се слични, што значи дека со оваа хомотетија точката O се пресликува во средината на отсечката PQ .



Црп. 20.1.

Според тоа, средината на отсечката PQ е центар на впишаната кружница на $\triangle ABC$.

5. Нека $(a_k), k=1, 2, \dots, n, \dots$ е низа од различни природни броеви. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ е точно неравенството

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Решение. Ако низата $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ не е растечка, тогаш постои j таков што $a_j > a_{j+1}$ ($1 \leq j < n$). Во овој случај е исполнето неравенството

$$\frac{a_j}{j^2} + \frac{a_{j+1}}{(j+1)^2} > \frac{a_{j+1}}{j^2} + \frac{a_j}{(j+1)^2}.$$

Тоа значи, дека збирот

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2}$$

е поголем од соодветниот збир за низата $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, за која исто така $b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Бидејќи $b_k \geq k$ за $k=1, 2, \dots, n$ добиваме

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

6. На еден меѓународен собир имало учесници од шест земји. Вкупниот број на учесници бил 1978, а секој учесник бил нумериран со број од 1 до 1978. Докажи дека постои барем еден учесник чиј број е еднаков на збирот на броевите на два члена од неговата земја, или е два пати поголем од бројот на некој член од неговата земја.

Решение. Бидејќи $1978 = 329 \cdot 6 + 4$, во една од државите, да ја наречеме A , има барем 330 членови на собирот. Нека нивните броеви се

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{330}.$$

Разгледуваме 329 разлики $a_{330} - a_i$ ($i=1, 2, \dots, 329$). Ако некоја од овие разлики е еднаква на бројот на некој од членовите на собирот од A , тогаш тврдењето од задачата е докажано. Во спротивно (заради $329 = 65 \cdot 5 + 4$), меѓу горните разлики би имале 66, $b_1 < b_2 < \dots < b_{66}$ кои припаѓаат на иста држава, на пример B . Тогаш, или некоја од разликите $b_{66} - b_i$ ($i=1, 2, \dots, 65$) припаѓа на некоја од државите A и B (во тој случај тврдењето е докажано) или ни една не припаѓа на некоја од тие држави.

Да претпоставиме дека тврдењето на задачата не е точно. Продолжувајќи ја таа постапка добиваме 17 од тие разлики во иста држава, на пример C , потоа од шеснаесетте нови разлики, шест од нив се во иста држава D ; од петте наредни разлики три се во E . На крај, двете нови разлики мора да бидат во

преостанатата држава F . (Да забележиме дека секоја разлика е од облик $a_p - a_q$). Нивната разлика не може да биде во ниту една држава A, B, C, D, E, F . (Таа не може да биде во F бидејќи разликата на два броја не може да биде еднаква на некој од тие броеви). Ова, меѓутоа, не е можно бидејќи секој природен број помал од 1978 мора да биде во некоја од шесте разгледувани држави. Затоа претпоставката не е точна, т.е. исполнето е тврдењето од задачата.