

**Ристо Малчески,
Скопје**

НЕРАВЕНСТВО НА КОШИ-БУЊАКОВСКИ-ШВАРЦ

Во оваа статија ќе го разгледаме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, која има забележителна примена во бројните математички дисциплини. Ова неравенство прв го докажал францускиот математичар Коши во 1821 година, а интегралната аналогија на истото ја докажал рускиот математичар Буњаковски во 1859 година. Да забележиме дека ова неравенство во своите работи го користел и германскиот математичар Шварц, но дури во 1884 година.

Тврдење 1 (неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц). Ако $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, за $i = 1, 2, \dots, n$, тогаш

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2, \quad (1)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}. \quad (2)$$

Доказ. Да го разгледаме квадратниот тринომ

$$P(t) = \sum_{i=1}^n (a_i t - b_i)^2 = t^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2t \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Полиномот $P(t)$ е ненегативен за секој $t \in \mathbf{R}$, па затоа неговата дискриминанта е непозитивна, т.е. точно е неравенството

$$4\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 - 4\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq 0,$$

кое е еквивалентно со неравенството (1). Понатаму, во (1) важи знак за равенство ако и само ако дискриминантата на полиномот $P(t)$ е еднаква на нула, што значи ако и само ако $a_i t - b_i = 0$, за $i = 1, 2, \dots, n$, т.е. ако и само ако се исполнети равенствата (2). ♦

Во следните две последици ќе покажеме како со помош на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц може да се докажат некои од добро познатите неравенства меѓу средните.

Дефиниција. Нека се дадени n позитивни реални броеви a_1, a_2, \dots, a_n . Броевите

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n}, \frac{n}{\sum_{i=1}^n a_i^{-1}} \text{ и } \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2}$$

ги нарекуваме *аритметичка*, *геометриска*, *хармониска* и *квадратна средина* на броевите a_1, a_2, \dots, a_n , соодветно.

Последица 1 (неравенство меѓу аритметичката и квадратната средина). Ако $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ се позитивни реални броеви, тогаш

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2}, \quad (3)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Доказ. Нека $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ се позитивни реални броеви и да земеме $b_i = 1, i = 1, 2, \dots, n$. Тогаш од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot 1 \right)^2 &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n 1^2 \Leftrightarrow \\ \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 &\leq n \sum_{i=1}^n a_i^2 \Leftrightarrow \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i &\leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2}. \end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако во неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц важи знак за равенство, т.е. ако и само ако $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. ♦

Последица 2 (неравенство меѓу аритметичката и хармониската средина). Ако $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ се позитивни реални броеви, тогаш

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^{-1}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (4)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Доказ. Земеме $a_i = \sqrt{x_i}, b_i = \frac{1}{\sqrt{x_i}}, i = 1, 2, \dots, n$. Со замена во неравенството (1) добиваме

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_i}} \right)^2 &\leq \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}^2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_i}^2} \Leftrightarrow \\ n^2 &\leq \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{-1} \Leftrightarrow \\ \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^{-1}} &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако во неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц важи знак за равенство, т.е. ако и само ако

$$\frac{\sqrt{x_1}}{\frac{1}{\sqrt{x_1}}} = \frac{\sqrt{x_2}}{\frac{1}{\sqrt{x_2}}} = \dots = \frac{\sqrt{x_n}}{\frac{1}{\sqrt{x_n}}},$$

т.е. ако и само ако $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. ♦

Забелешка. Во претходните разгледувања го докажавме неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина на позитивни реални броеви. Меѓу-

тоа, во случајот важна улога има и геометриската средина, односно за позитивни реални броеви $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ точни се неравенствата

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \geq \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^n a_i^{-1}},$$

кои ќе ги прифатиме без доказ.

Во претходните разгледувања го докажавме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и со негова помош докажавме две важни неравенства меѓу аритметичката, хармониската и квадратната средина. Во натамошните разгледувања ќе ја покажеме примената на овие неравенства.

Пример 1. Нека $x_i, i = 1, 2, \dots, n, n+1$ се реални броеви такви што

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = x_{n+1}.$$

Докажете дека

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i(x_{n+1} - x_i)} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_{n+1}(x_{n+1} - x_i)}.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i(x_{n+1} - x_i)} &= \sum_{i=1}^n 1 \cdot \sqrt{x_i(x_{n+1} - x_i)} \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + \dots + 1^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i(x_{n+1} - x_i)} \\ &= \sqrt{n[x_{n+1} \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i^2]} = \sqrt{n[x_{n+1}^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2]}. \end{aligned} \quad (5)$$

Повторно, од условот на задачата и од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$x_{n+1}^2 = \left(\sum_{i=1}^n 1 \cdot x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

т.е.

$$-n \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq -x_{n+1}^2. \quad (6)$$

Конечно, од условот на задачата и од неравенствата (5) и (6) следува

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i(x_{n+1} - x_i)} &\leq \sqrt{nx_{n+1}^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2} \leq \sqrt{nx_{n+1}^2 - x_{n+1}^2} = \sqrt{x_{n+1}(nx_{n+1} - x_{n+1})} \\ &= \sqrt{x_{n+1}(nx_{n+1} - \sum_{i=1}^n x_i)} = \sqrt{x_{n+1} \sum_{i=1}^n (x_{n+1} - x_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_{n+1}(x_{n+1} - x_i)}, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

Пример 2. Нека $a_1 a_2 \dots a_n = 1, a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$. Докажете дека

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n} \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n. \quad (7)$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме

$$\frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \dots \sqrt{a_n}} = 1,$$

т.е.

$$n \leq \sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n}. \quad (8)$$

Понатаму, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и од неравенството (8) следува

$$\begin{aligned} (\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n})^2 &\leq (1^2 + 1^2 + \dots + 1^2)(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = n(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \\ &\leq (\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n})(a_1 + a_2 + \dots + a_n). \end{aligned}$$

Конечно, ако последното неравенство го поделиме со $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n}$ го добиваме неравенството (7). ♦

Пример 3. Докажете дека за секои реални броеви $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ важи

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} \leq \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2}. \quad (9)$$

Решение. Со последователна примена на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, за броевите

$$x_i = \sqrt{a_i(a_{i+1} + a_{i+2})}, \quad y_i = \sqrt{\frac{a_i}{a_{i+1} + a_{i+2}}}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

каде $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$ и очигледното неравенство $a_i a_j \leq \frac{a_i^2 + a_j^2}{2}$ го добиваме неравенството

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 &= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \\ &= [a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + \dots + a_n(a_1 + a_2)] \left(\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \right) \\ &\leq \left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{2} + \frac{a_1^2 + a_3^2}{2} + \frac{a_2^2 + a_3^2}{2} + \frac{a_2^2 + a_4^2}{2} + \dots + \frac{a_n^2 + a_1^2}{2} + \frac{a_n^2 + a_2^2}{2} \right) \left(\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \right) \\ &= 2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \left(\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \right), \end{aligned}$$

кое е еквивалентно со неравенството (9). ♦

Пример 4. Нека се x, y, z позитивни броеви такви да $x + y + z = 1$. Докажете дека

$$\sqrt{xy(1-z)} + \sqrt{yz(1-x)} + \sqrt{zx(1-y)} \leq \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Решение. Најпрво да забележиме дека од очигледното неравенство

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$$

следува неравенството

$$3(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2 \quad (11)$$

Понатаму, применувајќи го неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и неравенството (11) добиваме

$$\sqrt{xy(1-z)} + \sqrt{yz(1-x)} + \sqrt{zx(1-y)} = \sqrt{xy} \sqrt{1-z} + \sqrt{yz} \sqrt{1-x} + \sqrt{zx} \sqrt{1-y}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sqrt{xy + yz + zx} \sqrt{(1-z) + (1-x) + (1-y)} \\ &= \sqrt{xy + yz + zx} \sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sqrt{\frac{(x+y+z)^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

Пример 5. Нека $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ се ненегативни броеви. Докажете, дека неравенството

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^2\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i x_i^4 \quad (12)$$

е точно за произволни реални броеви $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ ако и само ако $\sum_{i=1}^n a_i \leq 1$.

Решение. Нека за произволни реални броеви $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ е точно неравенството (12). Земаме $x_i = 1, i = 1, 2, \dots, n$ и добиваме

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i,$$

од што следува $\sum_{i=1}^n a_i \leq 1$.

Обратно, нека $\sum_{i=1}^n a_i \leq 1$. Тогаш од неравенството на Коши-Буњаковски-

Шварц следува

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^2\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \sqrt{a_i} x_i^2\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n a_i x_i^4 \leq \sum_{i=1}^n a_i x_i^4. \quad \blacklozenge$$

Пример 6. Нека c е произволен позитивен реален број. Најдете ја онаа пермутација $k_0, k_1, k_2, \dots, k_n$ на броевите $0, 1, 2, \dots, n$ за која изразот

$$c^{k_0} + c \cdot c^{k_1} + c^2 \cdot c^{k_2} + \dots + c^n \cdot c^{k_n} \quad (13)$$

достигнува максимална вредност.

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски Шварц добиваме

$$1 \cdot c^{k_0} + c \cdot c^{k_1} + c^2 \cdot c^{k_2} + \dots + c^n \cdot c^{k_n} \leq \sqrt{\sum_{i=0}^n (c^i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=0}^n (c^{k_i})^2} = \sum_{i=0}^n c^{2i}. \quad (14)$$

Според тоа, за која било пермутација $k_0, k_1, k_2, \dots, k_n$ изразот (13) не е поголем од

$\sum_{i=0}^n c^{2i}$. Меѓутоа, во неравенството (14) знак за равенство се достигнува ако и само ако

$$\frac{1}{c^{k_0}} = \frac{c}{c^{k_1}} = \frac{c^2}{c^{k_2}} = \dots = \frac{c^n}{c^{k_n}},$$

што е можно ако и само ако $k_0 = 0, k_1 = 1, k_2 = 2, \dots, k_n = n$. Според тоа, бараната пермутација за која изразот (13) достигнува максимална вредност е идентичната пермутација. ♦

На крајот од нашите разгледувања ќе наведеме неколку задачи за самостојна работа, за чие решавање може да се искористи неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц.

Задача 1. Ако $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, за $i = 1, 2, \dots, n$, тогаш

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

Докажете!

Задача 2. Нека се a, b, c должини на страни на триаголник. Докажете го неравенството

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

Упатство. Земете

$$s = \frac{a+b+c}{2}, \quad x = s - a, \quad y = s - b, \quad z = s - c, \quad a = y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y,$$

трансформирајте го почетното неравенство и искористете го неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц.

Задача 3. Докажете дека за страните a, b, c и тежишните линии m_a, m_b, m_c на произволен триаголник важи

$$am_a + bm_b + cm_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Упатство. Искористете го неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и познатото равенство

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Литература

1. Govedarica, V.: *Matematička takmičenja u Republici Srpskoj*, ZUNS, Sarajevo, 2007
2. Arslanagić, Š.: *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
3. Mitrinović, D. S.; Vasić, P. M.: *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970