SEEMOUS 2017

February 28 – March 5, 2017,
Ohrid

Problems

Πρόβλημα 1. Έστω $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ας υποθέσουμε ότι αν

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ισχύει ότι

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < \tfrac{1}{5}.$$

Δείξτε πως ο $I + A$ είναι αντιστρέψιμος.

Πρόβλημα 2. Έστω $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

α) Να αποδείξετε πως υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\varepsilon \in (-a, a)$, $\varepsilon \neq 0$, η γραμμική εξίσωση

$$AX + \varepsilon X = B, \quad X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

έχει μοναδική λύση $X(\varepsilon) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

β) Αποδείξτε πως αν $B^2 = I_n$, τότε

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \cdot \mathrm{Tr}(BX(\varepsilon)) = n - \mathrm{rank}\, A.$$

Πρόβλημα 3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^4 f(x(x-3)^2)dx = 2\int_1^3 f(x(x-3)^2)dx.$$

Πρόβλημα 4. α) Έστω $n \geq 0$ ακέραιος. Υπολογίστε το $\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

β) Έστω $k \geq 0$ σταθερός ακέραιος και $(x_n)_{n \geq k}$ η ακολουθία που ορίζεται με

$$x_n = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} \left(e - 1 - \tfrac{1}{1!} - \tfrac{1}{2!} - \ldots - \tfrac{1}{i!}\right).$$

Αποδείξτε ότι η ακολουθία συγκλίνει και βρείτε το όριό της.

Time for work 5 hours