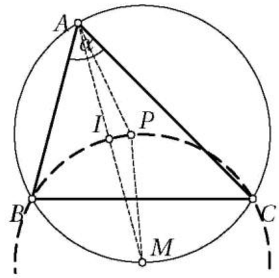
XLVII олимпијада

1. Нека I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Во внатрешноста на триаголникот избрана е точка P таква што
$$\measuredangle PBA + \measuredangle PCA = \measuredangle PBC + \measuredangle PCB.$$
Докажи, дека $\overline{AP} \geq \overline{AI}$ и дека знак за равенство важи ако и само ако $P \equiv I$.
Решение. Од условот на задачата следува
$$\measuredangle PBC + \measuredangle PCB = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha,$$
т.е.
$$\measuredangle BPC = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha = \measuredangle BIC.$$


Тоа значи дека P лежи на опишаната кружница ω околу $\triangle BCI$. Бидејќи центарот на кружницата ω е во средината M на лакот BC на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, кој не ја содржи A (бидејќи $\overline{MB} = \overline{MC} = \overline{MI}$), добиваме дека
$$\overline{AP} \geq \overline{AM} - \overline{MP} = \overline{AM} - \overline{MI} = \overline{AI},$$
при што знак за равенство важи ако и само ако $P \equiv I$.

2. За дијагоналата на правилниот 2006-аголник $\Re$ велиме дека е *добра* ако нејзините крајни точки ја делат границата на $\Re$ на две дела такви што секој од деловите се состои од непарен број страни на $\Re$. За страните на $\Re$ исто така сметаме дека за добри.
Ги разгледуваме разбивањата на многуаголникот $\Re$ на триаголници со помош на 2003 дијагонали такви што не постојат две дијагонали со заедничка внатрешна точка. Определи го најголемиот можен број рамнокраки триаголници со по две добри страни кои може да се појават во такво разбивање.
Решение. Рамнокраките триаголници со две добри страни ќе ги наречеме добри. Темињата на добар триаголник T ја делат границата на $\Re$ на три дела, од кои два, да кажеме $\Re_1$ и $\Re_2$, се состојат од непарен број страни. Ќе велиме дека T ги поседува сите страни во $\Re_1$ и $\Re_2$.
Секој добар триаголник различен од T поседува парен број страни во секој од деловите $\Re_1$ и $\Re_2$. Бидејќи бројот на страните во $\Re_i$ е непарен, барем една од нив, да кажеме a_i, не ја поседува ниту еден добар триаголник освен T. На триаголникот T му придружуваме две страни a_1 и a_2. По конструкција, не постојат два триаголници кои имаат заедничка придружена страна, па затоа добри триаголници не може да има повеќе од 1003.
Пример со 1003 добри триаголници може да се добие со повлекување на дијагоналите $A_{2k-2}A_{2k}$, за $k = 1, 2, ..., 1003$ (каде $A_0 \equiv A_{2006}$) и уште произволни

1000 дијагонали.

3. Определи го најмалиот реален број M таков што неравенството

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \le M(a^2+b^2+c^2)^2 \qquad (1)$$

важи за секои реални броеви a,b и c.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a \ge b \ge c$. Да означиме $a-b=m, b-c=n, a+b+c=s$. Левата страна на неравенството (1) се разложува како

$$L=(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)=mn(m+n)s,$$

а додека

$$a^2+b^2+c^2=\frac{s^2+m^2+n^2+(m+n)^2}{3}.$$

Бидејќи $(m+n)^2 \le \frac{2}{3}(m^2+n^2+(m+n)^2)$, од неравенството меѓу средните имаме

$$2L^2 \le \frac{(m+n)^6 s^2}{8} \le s^2\left(\frac{m^2+n^2+(m+n)^2}{3}\right)^3 \le \left(\frac{s^2+m^2+n^2+(m+n)^2}{4}\right)^4 = \frac{3^4(a^2+b^2+c^2)^4}{4^4},$$

т.е. $L \le \frac{9}{16\sqrt{2}}(a^2+b^2+c^2)^2$. Знак за равенство важи ако и само ако $m=n$ и $s^2=\frac{m^2+n^2+(m+n)^2}{3}$, од каде лесно следува дека $a:b:c=(1+\frac{3}{\sqrt{2}}):1:(1-\frac{3}{\sqrt{2}})$. Значи, $M=\frac{9}{16\sqrt{2}}$.

4. Определи ги сите парови цели броеви (x,y) такви што

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2.$$

Решение. Нека $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$. Бројот y е непарен и $2^x \mid (y-1)(y+1)$, но двата множители не се деливи со 4, од каде следува дека еден од нив е делив со 2^{x-1}, т.е. $y=2^{x-1}z \pm 1$. Од друга страна, очигледно е дека

$$2^x+1<y<2^{x+1}-1, \text{ за } x \ge 2,$$

па затоа $z=3$. Ако означиме $t=2^{x-1}$, тогаш почетната равенка го добива обликот $8t^2+2t+1=(3t\pm1)^2$. Последната равенка во множеството природни броеви има единствено решение $t=8$. Сега, $x=4$ и $y=23$ и тоа навистина е решение, бидејќи $1+2^4+2^9=23$.

5. Нека $P(x), \deg P=n>1$ е полином со целобројни коефициенти и нека $k \in \mathbb{N}$. Докажи дека за полиномот

$$Q(x) = \underbrace{P(P(...P(P}_{k \text{ пати}}(x))...)) .$$

постојат најмногу n цели броеви t такви што $Q(t) = t$.

Решение. Ќе докажеме дека ако $Q(t) = t$, тогаш $P(P(t)) = t$. Нека $x_0 = t$ и $x_{i+1} = P(x_i)$ за $i \geq 0$, така што $x_k = x_0$. Да означиме $d_i = x_{i+1} - x_i$. Бидејќи

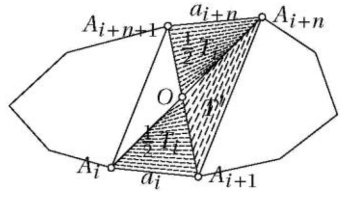
$$d_i \mid P(x_{i+1}) - P(x_i) = x_{i+2} - x_{i+1} = d_{i+1}$$

за секој i , од $d_k = d_0$ следува дека $|d_0| = |d_1| = ... |d_k|$. Нека препоставиме дека $d_1 = d_0 = d \neq 0$. Тогаш $d_2 = d$ (во спротивно ќе важи $x_3 = x_1$, па во низата никогаш нема да се појави x_0); слично $d_3 = d$ итн, па затоа $x_k = x_0 + kd \neq x_0$, за секој k , што е противречност. Според тоа, $d_1 = -d_0$, па затоа $x_2 = x_0$, т.е. $P(P(t)) = t$.

Ако секој $t \in \mathbb{Z}$ таков што $Q(t) = t$ го задоволува условот $P(t) = t$, тогаш бројот на решенијата е помал или еднаков на $\deg P = n$. Да претпоставиме дека за некој $t_1 \in \mathbb{Z}$ важи $P(t_1) = t_2 \neq t_1$ $P(t_2) = t_1$ и да разгледаме произволен $t_3 \notin \{t_1, t_2\}$ и $P(t_3) = t_4$ со $P(t_4) = t_3$. Тогаш $t_1 - t_3 \mid t_2 - t_4 \mid t_1 - t_3$, т.е. $|t_1 - t_3| = |t_2 - t_4|$, а аналогно $|t_1 - t_4| = |t_2 - t_3|$. Ако $t_1 - t_3 = t_2 - t_4 = k \neq 0$, другото равенство го добива обликот $|t_1 - t_2 + k| = |t_2 - t_1 + k|$, што не е можно. Затоа мора да важи $t_1 - t_3 = t_4 - t_2$, т.е. $P(t_1) + t_1 = P(t_3) + t_3 = c$ за некој c . Според тоа, сите целобројни решенија на равенката $P(P(t)) = t$ се нули на полиномот $P(x) + x - c$, а нив ги има најмногу n .

6. На секоја страна b на конвексниот многуаголник $\Re$ и ја придружуваме најголемата плоштина на триаголникот кој се содржи во $\Re$ и чија една страна е b . Докажи, дека збирот на сите плоштини придружени на страните на многуаголникот $\Re$ е поголем или еднаков на двократната плоштина P на многуаголникот $\Re$.

Решение. На секое теме A на многуаголникот $\Re$ му соодветствува единствена точка A' на границата на $\Re$ таква што правата AA' ја полови плоштината на $\Re$. Сметајќи ги и овие точки по потреба во темињата, можеме да претпоставиме дека $\Re$ има паран број темиња $A_1, A_2, ..., A_{2n}$, и дека секоја дијагонала $A_i A_{i+n}$ $(i = 1, ..., n)$ ја полови неговата плоштина.



Со a_i и d_i да ги означиме страната $A_i A_{i+1}$ и полуправата $A_i A_{i+n}$, $1 \leq i \leq 2n$ (индексите се по модул $2n$), соодветно. За $i = 1, ..., n$, нека $\Re_i$ е областа ограничена со d_i, d_{i+1}, a_i и a_{i+n}, а T_i е нејзината плоштина. Ќе докажеме дека областите $\Re_i$ го покриваат целиот $\Re$. Нека X е произволна точка во внатрешноста на $\Re$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека X е лево од d_i. Бидејќи X е десно од d_{i+n}, постои j $(i \le j < i+n)$ таков што X е лево од d_j и десно од d_{j+1}, а тогаш $X \in \Re_j$. Оттука следува дека $T_1 + \ldots + T_n \ge P$.

Со P_i да ја означиме плоштината придружена на страната a_i $(1 \le i \le n)$. Нека d_i и d_{i+1} се сечат во точката O. Триаголниците OA_iA_{i+1} и $OA_{i+n}A_{i+n+1}$ имаат плоштина $\frac{1}{2}T_i$, додека барем еден од триаголниците OA_iA_{i+n+1} и $OA_{i+1}A_{i+n}$ има плоштина T' која не е помала од $\frac{1}{2}T_i$. Според тоа, $P_i + P_{i+n} \ge \frac{1}{2}T_i + T' \ge T_i$. Конечно,

$$P_1 + \ldots + P_{2n} \ge 2(T_1 + \ldots + T_n) \ge 2P.$$

Знак за равенство важи ако и само ако многуаголникот $\Re$ е централно симетричен.