

Користење на табели броеви за одредување на збирите на елементите на некои низи природни броеви

Според познатата анегдота, големиот германски математичар Гаус (1777-1855) како десетгодишно дете, молневито ја решил следната задача:

Да се најде збирот на сите природни броеви од 1 до 100.

Гаус при решавањето ја користел следната табела од два реда составена од броевите 1, 2, 3, ..., 100.

$$A_{100}: \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & 98 & 99 & 100 \\ 100 & 99 & 98 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Збирот на броевите во табелата A_{100} можеме да го пресметаме на два начини. Првиот начин се состои во тоа да се пресметаат збирите на броевите во секоја колона: $1+100, 2+99, 3+98, \dots, 98+3, 99+2, 100+1$ и потоа сите зборови да се соберат. Така се добива бројот

$$(1+100) \cdot 100. \quad (1)$$

Вториот начин за определување на збирите на сите броеви во табелата A_{100} се сведува на тоа да се најдат збирите во секој ред:

$$1+2+3+\dots+98+99+100 \text{ и } 100+99+98+\dots+3+2+1.$$

Потоа овие два збира се собираат и се добива

$$2 \cdot (1+2+3+\dots+98+99+100). \quad (2)$$

Ако ги изедначиме резултатите од (1) и (2) го добиваме решението на задачата

$$1+2+3+\dots+98+99+100 = \frac{(1+100) \cdot 100}{2} = 5050.$$

Сега ќе ја воопштиме оваа задача.

Најди формула за пресметување на збирот $1+2+3+\dots+n$.

Задачата ќе ја решиме користејќи ја идејата на Гаус, т.е. користејќи ја табелата

$$A_n: \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n-2 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

За збирот A_n на броевите во табелата се добива изразот $(n+1)n$ кога собираме по колони, а потоа ги собереме добиените зборови, и изразот

$2(1 + 2 + 3 + \dots + n)$ кога прво ќе собереме по редици и ги собереме добиените зборови. Според тоа, бараната формула е

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (3)$$

Целта на нашите разгледувања е да укажеме, како различните табели од природни броеви можат да се искористат за изведување на некои познати формули. Во текстот што следува ќе дадеме неколку такви примери.

Пример 1. Табелата B_n дадена на цртеж 1 се состои од n редици и n колони, т.е. таа содржи n^2 броеви еднакви на 1. Затоа збирот на овие броеви е еднаков на n^2 .

1	1	1	...	1	1	1
1	1	1	...	1	1	1
1	1	1	...	1	1	1
...
1	1	1	...	1	1	1
1	1	1	...	1	1	1
1	1	1	...	1	1	1

Ако броевите во табелата ги групираме по “коридори”, како што е прикажано на црт. 1, тогаш за зборовите во коридорите добиваме: $1, 3, 5, \dots, 2n-5, 2n-3$ и $2n-1$. Според тоа, збирот n^2 на сите броеви во табелата B_n може да се изрази како збир на броевите $1, 3, 5, \dots, 2n-5, 2n-3$ и $2n-1$. Така ја добиваме формулата

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-5) + (2n-3) + (2n-1) = n^2. \quad \blacklozenge \quad (4)$$

Пример 2. Да се вратиме на табелата A_n . Покажавме дека збирот на броевите во оваа табела е еднаков на $n(n+1) = n^2 + n$. Од друга страна, за истиот збир имаме

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n + n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1.$$

Ако од двата последни збира одземеме n добиваме

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1 = n^2. \quad \blacklozenge \quad (5)$$

Забелешка. До истиот резултат може да се дојде и ако броевите од табелата B_n ги групираме по дијагонали. Обиди се самостојно да го извршиш ова пресметување.

Пример 3. Да ја разгледаме табелата C_n (црт. 2). Повторно ќе ги групираме броевите во табелата на два начина и ќе го пресметаме нивниот збир.

Прво ќе ги групираме собироците по редици како што е прикажано на црт. 2. Зборовите на броевите се дадени со следните изрази

$$1 + 2 + 3 + \dots + n, 2(1 + 2 + 3 + \dots + n), 3(1 + 2 + 3 + \dots + n), \dots, n(1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

што значи дека збирот на тие броеви е:

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

и ако ја искористиме формулата (3) за збирот на броевите во табелата C_n добиваме

$$[\frac{n(n+1)}{2}]^2. \quad (6)$$

	1	2	3	...	$n-2$	$n-1$	n
	2	4	6	...	$2(n-2)$	$2(n-1)$	$2n$
	3	6	9	...	$3(n-2)$	$3(n-1)$	$3n$
C_n
	$n-2$	$2(n-2)$	$3(n-2)$...	$(n-2)^2$	$(n-2)(n-1)$	$(n-2)n$
	$n-1$	$2(n-1)$	$3(n-1)$...	$(n-2)(n-1)$	$(n-1)^2$	$(n-1)n$
	n	$2n$	$3n$...	$(n-2)n$	$(n-1)n$	n^2

Црт. 2

Вториот начин на групирање на броевите од табелата C_n е по коридори, како што е прикажано на црт. 3. Збирите на броевите во овие коридори се:

$$1, 2(1+2+1), 3(1+2+3+2+1), \dots, n[1+2+\dots+(n-1)+n+(n-1)+\dots+3+2+1]$$

	1	2	3	...	$n-2$	$n-1$	n
	2	4	6	...	$2(n-2)$	$2(n-1)$	$2n$
	3	6	9	...	$3(n-2)$	$3(n-1)$	$3n$

C_n	$n-2$	$2(n-2)$	$3(n-2)$...	$(n-2)^2$	$(n-2)(n-1)$	$(n-2)n$
	$n-1$	$2(n-1)$	$3(n-1)$...	$(n-2)(n-1)$	$(n-1)^2$	$(n-1)n$
	n	$2n$	$3n$...	$(n-2)n$	$(n-1)n$	n^2

Црт. 3

Ако ја искористиме формулата (5), тогаш овие збирови можат да се запишат како $1, 2 \cdot 2^2, 3 \cdot 3^2, \dots, n \cdot n^2$ односно како $1^3, 2^3, 3^3, \dots, n^3$ па затоа збирот на сите броеви во табелата C_n е еднаков на

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3. \quad (7)$$

Бидејќи со претходно опишаните групирања собираме исти броеви, од (6) и (7) следува дека

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2. \quad (8)$$

Коментар. Заради тежината на следниов пример, на учениците им препорачуваме истиот да го разгледуваат во консултација со своите наставници. Докол-

ку некој од учениците се одлучи истиот да не го проучува, пожелно е да ја запамете формулата (11), која наоѓа примена при решавањето на голем број задачи.

Пример 4. Да ја разгледаме табелата D_n , дадена на црт. 4. Во секој ред од оваа табела збирот на броевите е

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

и како имаме n редови добиваме дека збирот S_n на сите броеви во табелата е

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \cdot n = \frac{n^2(n+1)}{2}. \quad (9)$$

Но, збирот S_n може да се определи и на друг начин, со групирање на сорциите по дијагонали и вертикални коридори, како што е прикажано на црт. 5. Од ова групирање добиваме

	1	2	3	4	...	$n-2$	$n-1$	n
	2	3	4	$n-1$	n	1
	3	4	n	1	2
	4	...	$n-2$	$n-1$...	1	2	3

D_n	$n-2$	$n-1$	n	1	$n-4$	$n-3$
	$n-1$	n	1	2	...	$n-4$	$n-3$	$n-2$
	n	1	2	3	...	$n-3$	$n-2$	$n-1$

Црт. 4

$$S_n = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \dots + (n-1)(n-1) + n \cdot n + 1 + (1+2) + (1+2+3) + [1+2+\dots+(n-2)] + [1+2+\dots+(n-1)]$$

и ако ја искористиме формулата (3), за S_n добиваме

$$\begin{aligned} S_n &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{(2+1) \cdot 2}{2} + \frac{(3+1) \cdot 3}{2} + \dots + \frac{[(n-1)+1] \cdot (n-1)}{2} \\ &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2}{2} + \frac{1+2+3+\dots+(n-1)}{2} \\ &= \frac{3}{2} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2] - \frac{n^2}{2} + \frac{n(n-1)}{4}. \end{aligned} \quad (10)$$

	1	2	3	4	...	$n-2$	$n-1$	n
	2	3	4	$n-1$	n	1
	3	4	n	1	2
	4	...	$n-2$	$n-1$...	1
	...	$n-2$	$n-1$	n
D_n	$n-2$	$n-1$	n	1	$n-4$	$n-3$
	$n-1$	n	1	2	...	$n-4$	$n-3$	$n-2$
	n	1	2	3	...	$n-3$	$n-2$	$n-1$

Црт. 4

Сега, од формулите (9) и (10) добиваме

$$\frac{3}{2} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2] - \frac{n^2}{2} + \frac{n(n-1)}{4} = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

од каде после средувањето наоѓаме

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (11)$$

Забелешка. Постојат и други зборови кои можат да се пресметаат со помош на табели слични на претходно разгледаните. Меѓутоа, истите нема да ги разгледуваме, а на читателите им препорачуваме со помош на веќе најдените формули да ги докажат следните равенства:

а) $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n-1) \cdot n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$ и

б) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

Упатство. а) Искористете ги равенствата (8) и (11).

б) Искористете ги равенствата (3) и (8).