Jens Carstensen и Алија Муминагиќ, Данска

ЕДЕН ИНТЕРЕСЕН ЧЕТИРИАГОЛНИК

Да го разгледаме четириаголникот $ABCD$ во кој
$AB = a = 325,\ BC = b = 313,\ CD = c = 65,\ DA = d = 109,\ AC = e = 116,\ BD = f = 372$.

Воочуваме дека должините на страните и дијагоналите се природни броеви. Да се потсетиме на следната **теорема:**

Ако во четириаголникот $ABCD,\ a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, тогаш $e \perp f$.

Доказ: Нека за четириаголникот $ABCD$ важи $AB = a$,
$BC = b,\ CD = c,\ DA = d,\ AC = e,\ BD = f,\ e \cap f = \{0\},\ CO = p,\ AO = r,\ BO = s,$
$DO = q,\ \angle DOC = \varphi$.

Со примена на косинусната теорема на триаголниците ΔABO и ΔCDO добиваме:

$$a^2 = s^2 + r^2 - 2sr\cos\varphi \tag{1}$$

и

$$c^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos\varphi \tag{2}$$

Со собирање на равенките (1) и (2) добиваме

$$a^2 + c^2 = s^2 + r^2 + p^2 + q^2 - 2\cos\varphi(sr + pq) \tag{4}$$

Косинусната теорема применета на триаголниците ΔBCO и ΔDAO дава:

$$b^2 = p^2 + s^2 - 2ps\cos(180^\circ - \varphi) \tag{5}$$

и

$$d^2 = r^2 + q^2 - 2rq\cos(180^\circ - \varphi) \tag{6}$$

по собирање на равенките (5) и (6) добиваме

$$b^2 + d^2 = p^2 + s^2 + r^2 + q^2 + 2\cos\varphi(ps + rq) \tag{7}$$

Од $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, (4) и (7) следи

$$-2\cos\varphi(sr + pq) = 2\cos\varphi(ps + rq) \Leftrightarrow \cos\varphi(ps + rq + sr + pq) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\cos\varphi[p(s+q) + r(s+q)] = 0 \Leftrightarrow (s+q)(p+r)\cos\varphi = 0$$

и оттука заради $s + q \neq 0$ и $p + r \neq 0$ следи $\cos\varphi = 0$, т.е. $\varphi = 90^\circ$. ▪

Во конкретниот случај имаме $325^2 + 65^2 = 313^2 + 109^2$. Значи, $e \perp f$. Нека и на цртежот 1 е $e \cap f = \{0\}$.

Триаголниците $\Delta AOB,\ \Delta BOC,\ \Delta COD$ и ΔDOA се правоаголни триаголници или т.н. Питагорини триаголници што треба да се докаже.

Нека $CO = p,\ AO = r,\ BO = s$ и $DO = q$ (цртеж 1). Ќе ја користеме Хероновата формула за пресметување на површина на триаголникот ΔBCD. Следи:

$$P_\Delta(BCD) = \sqrt{375\,(375-372)\,(375-313)\,(375-65)}$$
$$= \sqrt{375 \cdot 3 \cdot 62 \cdot 310} = \sqrt{(5 \cdot 15 \cdot 62)^2} = 4650.$$

или $P_\Delta(BCD)=\frac{1}{2}f\cdot p$, од каде

$$p=\frac{2\cdot P_\Delta(BCD)}{f}=\frac{2\cdot 4650}{372}=245,$$

а од $p+r=e$, т.е. $25+r=116$, следи $r=91$.

На сличен начин добиваме дека $q=60$ и $s=312$. На тој начин ги добивме триаголниците

$$(91,312,325),\ \ (25,312,313),\ \ (25,60,65)\ \text{и}\ (60,91,109).$$

Сите овие триаголници се Питагорини триаголници. ▪