

## Меѓународен натпревар “Европски Кенгур”

15 март 2018 г.

### ТЕМА за студенти

После секоја од првите 18 задачи има посочени по 5 одговори, од кои само еден е точен. На задачите 19 и 20 треба да се даден нумерички одговор. Секоја задача се оценува со 5 бода. Не е дозволено користење на калкулатори и таблици.

**ВРЕМЕ ЗА РАБОТА:** 90 минути. Ви посакуваме успех!

1. Ако  $A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 11 \end{vmatrix}$ , тогаш вредноста на детерминантата на матрицата  $3A$  е:
- A) 2                      B) 54                      C) 6                      D) 34                      E) -6
2. Определи ги вредностите на  $x$  и  $y$ , за кои матрицата  $A = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$  го задоволува равенството  $A^2 - xA + yE = 0$ , каде  $E$  е единичната матрица.
- A)  $x = 4, y = 0$                       B)  $x = 3, y = 0$                       C)  $x = 9, y = 14$   
D)  $x = 2, y = -8$                       E)  $x = 3, y = -4$
3. Дадена е матрицата  $A = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ . Определи ја матрицата  $A^{2018}$ .
- A)  $2^{2018} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$     B)  $2^{1008} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$     C)  $2^{2018} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$     D)  $2^{1008} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$     E)  $2^{1008} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$
4. Инверзната матрица на матрицата  $A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$  е:
- A)  $\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{vmatrix}$     B)  $\frac{1}{8} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$     C)  $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$     D)  $\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{vmatrix}$     E)  $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$
5. Дадени са матриците  $A = \begin{vmatrix} 2 & a \\ a & 1 \end{vmatrix}$  и  $B = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix}$ . За кои вредности на реалниот параметар  $a$  детерминантата  $|AB|$  е еднаква на  $-2$ ?
- A) 1                      B)  $\pm 1$                       C)  $\pm 2$                       D) 1 и 2                      E)  $\pm 1$  и  $\pm 2$

6. За кои вредности на реалниот параметар  $a$  вредноста на детерминантата  $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix}$  е ненегативна?
- A)  $a \in (-\infty; +\infty)$       B)  $a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$       C)  $a \in (-\infty; 1]$   
D)  $a \in (-1; 1)$       E)  $a \in [-1; 1]$
7. Ако  $(4x+7)^2 = ax^2 + bx + c$ , каде  $a$ ,  $b$  и  $c$  се реални броеви, определи ја вредноста на изразот  $a+b-c$ .
- A) 16      B) 19      C) 23      D) 49      E) 56
8. Определи полином од втор степен  $f(x)$ , за кој  $f(x+1) = f(x) + x + 1$  за секој  $x$  и  $f(0) = 0$ .
- A)  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$       B)  $x^2 + x$       C)  $x^2 - x$   
D)  $2x^2 + 2x$       E)  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$
9. Агловиот коефициент на правата, која ги сече координатните оски  $Ox$  и  $Oy$  на правоаголниот координатен систем во рамнината во точките  $(3;0)$  и  $(0;5)$ , соодветно, е еднаков на:
- A)  $-\frac{3}{5}$       B)  $\frac{3}{5}$       C)  $\frac{5}{3}$       D)  $-\frac{5}{3}$       E) 3
10. Определи ги координатите на точката, во која тангентата на графикот на функцијата  $f(x) = x^3 - 3x$  во точката  $A(1; -2)$  ја сече абсцисната оска  $Ox$  на правоаголниот координатен систем во рамнината.
- A)  $(-2;0)$       B)  $(1;0)$       C)  $(0;-2)$       D)  $(0;1)$       E) не ја сече
11. Во правоаголен координатен систем во просторот  $Oxyz$  се дадени површините  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  и  $2x^2 + y^2 = 2a^2$ , каде  $a \neq 0$  е реален број. Определи го бројот на заедничките точки на овие површини.
- A) бесконечно многу      B) 4      C) 3      D) 2      E) 1
12. Во правоаголен координатен систем во рамнината  $Oxy$  е дадена кружницата  $x^2 - 6x + y^2 + 5 = 0$ . Определи ги координатите на нејзиниот центар.
- A)  $(3;0)$       B)  $(-3;0)$       C)  $(3;2)$       D)  $(-3;2)$       E)  $(3;1)$

13. Во правоаголен координатен систем во рамнината со координатен почеток  $O$  се дадени правите  $l_1: x + y - 2 = 0$  и  $l_2: 2x - 3y + 1 = 0$ , кои се сечат во точката  $B$ . Ако  $l_1$  ја сече абсцисната оска  $Ox$  во точката  $C$ , а  $l_2$  ја сече ординатната оска  $Oy$  во точката  $A$ , тогаш плоштината на четириаголникот  $OABC$  е еднаква на:

- A)  $\frac{5}{6}$       B)  $\frac{7}{6}$       C)  $\frac{1}{6}$       D) 1      E) 2

14. Во правоаголен координатен систем во равнината со координатен почеток  $O$  е дадена кружницата  $k: x^2 + y^2 = 1$ . Права, која ја допира  $k$  во точка од првиот квадрант, ги сече координатните оски во точките  $A$  и  $B$ . Определи ја најмалата можна плоштина на  $\triangle OAB$ .

- A) 1      B)  $\sqrt{2}$       C) 4      D) 2      E)  $\sqrt{6}$

15. На колку начини може да се наредат во ред еден до друг три пара сопруг и сопруга и уште двајца мажи при услов дека секоја жена треба да се наоѓа до својот сопруг?

- A) 120      B) 240      C) 8.8!      D) 960      E) 8!

16. Определи ја границата

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(2x)}.$$

- A)  $\frac{1}{2}$       B) 2      C)  $\frac{1}{4}$       D) 1      E) 4

17. Определи ја вредноста на интегралот

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\sin^4 x - 1 + \cos^2 x} dx.$$

- A) -1      B) 1      C) 0      D)  $-\infty$       E)  $+\infty$

18. Ако  $f(x, y) = ax^2 - (a+1)xy + 2ay^2$ , за која вредност на реалниот параметар  $a$  должината на  $\text{grad } f$  во точката  $(2; 1)$  е најмала?

Градиент на функцијата  $f(x, y)$  во точката  $(x, y)$  е векторот  $\left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}; \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)$ .

- A) 2      B)  $\frac{7}{13}$       C)  $\frac{1}{13}$       D)  $\frac{2}{13}$       E)  $\frac{14}{13}$

За следните две задачи дади нумерички одговор.

19. Определи ја должината на интервалот во кој се менува разликата  $a - b$  на четирицифрените броеви  $a = \overline{xuzt}$  и  $b = \overline{tzyx}$ , такви што  $a \geq b$ .

20. На темињата на правилен 2018-аголник се придружени броеви, секој од кои е еднаков на збирот на броевите придружени на двете соседни темиња. Темињата  $A$  и  $P$  на цртежот десно се дијаметрално спротивни, а темињата  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  и  $R$  се последователни. Броевите придружени на темињата  $M$  и  $R$  се  $-10$  и  $-8$ , соодветно. Кој број е придружен на темето  $A$ ?

