Мирјана Докоска, Струга

ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

Во математиката постојат голем број на логичко-комбинаторни задачи чие решавање се темели на користење на различни логички принципи. Еден од најпознатите методи за решавање на овие задачи е ***принципот на Дирихле***, кој е предмет на оваа статија. Во нашите разгледувања прво ќе се осврнеме на наједноставниот облик на принципот на Дирихле, кој гласи:

Нека n е природен број. Ако $n+1$ предмети на произволен начин се распоредени во n кутии, тогаш барем во една кутија има најмалку два предмети.

Доказ. Нека во секоја од n - те кутии има само по еден предмет. Тоа значи дека во кутиите има точно n предмети, што противречи на претпоставката дека во кутиите има $n+1$ предмети, па затоа во една кутија да има најмалку два предмети. ♦

Забелешка. Принципот на Дирихле кажува дека постои кутија во која има барем два предмети, но не дава начин, т.е. алгоритам како таа кутија да се најде.

Задача 1. Меѓу кои било 100 природни броеви може да се изберат неколку (можно е само еден) чиј збир е делив со 100.

Решение. Нека $a_1, a_2, ..., a_{100}$ се дадените броеви. Да ги разгледаме броевите

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3, ..., S_{100} = a_1 + a_2 + ... + a_{100}$$

Ако некој од броевите

$$S_i,\ i = 1,2,...,100$$

е делив со 100, тогаш тврдењето е докажано. Во спротивно сите сто броеви при делење со 100 можат да дадат остаток 1,2,...,99. Бидејќи има 100 броеви S_i, а деведесет и девет можни остатоци следува дека постојат два броја S_i и S_k, $i > k$ кои при делење со бројот 100 даваат ист остаток. Тогаш,

$$100 \mid (S_i - S_k) = \sum_{j=k+1}^{i} a_j ,$$

што и требаше да се докаже. ♦

Задача 2 *(Руска олимпијада* 81*)*. Дали може во таблица со n - редици и n - колони да се запишат броевите 1, -1 и 0, така што сите збирови во колоните, редиците и двете дијагонали да бидат различни.

Решение. Збирот на n броеви од множеството {1,0,-1} може да ги прими вредностите:

$$-n, -(n-1), ..., -1, 0, 1, ..., n-1, n ,$$

т.е. вкупно $2n+1$ вредност. Бидејќи има вкупно $2n+2$ редици, колони и дијагонали, од принципот на Дирихле следува дека бараниот распоред на броевите -1,0 и 1 не е можен. ♦

Принципот на Дирихле може да се искаже и на следниот начин:

Ако M и N се конечни множества такви што $|M|=m$ и $|N|=n$, $m>n$, тогаш не постои инјекција $f:M\to N$, т.е. постојат $x,y\in N, x\neq y$ за кои важи $f(x)=f(y)$, (со $|X|$ е означен бројот на елементите на множеството $|X|$).

Задача 3. Да се докаже дека меѓу 367 луѓе секогаш има барем двајца што имаат заеднички роденден.

Решение. Нека M е дадено множество од 367 луѓе и нека N е множество денови во годината. Јасно, $|N|\leq 366$. Дефинираме пресликување $f:M\to N$ со кое на секој елемент од M му го придружуваме неговиот роденден. Бидејќи $|M|>|N|$, од принципот на Дирхле следува дека f не е инјекција т.е. постојат двајца луѓе кои што имаат заеднички роденден. ♦

Задача 4. Да се покаже дека меѓу произволни $n+1$ цели броеви можат да се изберат два броја чија разлика е делива со n.

Решение. Нека $b_1,b_2,...,b_{n+1}$ се произвилни цели броеви. Од теоремата за делење со остаток следува дека $b_i=c_in+r_i, i=1,2,...,n+1$, каде $0\leq r_i<n$. Бидејќи има $n+1$ остатоци $r_1,r_2,...,r_{n+1}$, а тие можат да примаат n вредности, од принципот на Дирихле следува дека барем два меѓу нив се еднакви, постојат p и q, $p<q$ такви што $r_p=r_q$. Според тоа,

$$b_q-b_p=n(c_q-c_p) \text{ т.е. } n\,|\,(b_q-b_p). \ ♦$$

Задача 5. Да се докаже дека постои степен на бројот 3 чиј запис во декаден систем завршува на 0001.

Решение. Да ги разгледаме броевите $a_i=3^i, i=1,2,3,...$. Според задача 4 постојат p и q, $p<q$ такви што $10^4\,|\,(3^p-3^q)$, т.е. $10^4\,|\,3^q(3^{p-q}-1)$.

Но, $10^4 \nmid 3^q$, па затоа $10^4\,|\,(3^{p-q}-1)$. Значи дека постои природен број n таков што $3^{p-q}-1=10^4n$ односно $3^{p-q}=10^4n+1$. Според тоа, бројот 3^{p-q} завршува на цифрите 0001. ♦

Задача 6. Да се докаже дека во произволно множество на луѓе постојат барем двајца кои имаат ист број познаници во тоа множество на луѓе.

Решение. Нека претпоставиме дека тоа множество се состои од n луге. Можен е само еден од следните два случаи:

1) Секој човек од тоа множество има барем еден познаник;
2) Постои барем еден човек кој никого не познава.

Ако важи 1), тогаш секој човек има 1,2,3,... или $n-1$ познаници, а бидејќи има n, ќе постојат двајца кои имаат ист број познаници.

Нека важи 2). Ако постојат барем двајца кои немаат познаници, тогаш постојат двајца кои имаат ист број (0) познаници. Затоа да претпоставиме дека постои само еден човек кој никого не познава. Тогаш останатите $n-1$ имаат 1,2,3,... или $n-2$, па затоа меѓу нив постојат двајца кои имаат ист број познаници. ♦

Една од најпознатите задачи поврзана за принципот на Дирихле е следната задача:

Задача 7. Меѓу првите $2n$ природни броеви $1,2,3,...,2n$ избрани се $n+1$ од нив на произволен начин. Тогаш, меѓу избраните броеви сигурно можат да се најдат два такви за кои важи еден од следните услови:

1) едниот е делител на другиот
2) немаат заеднички делител
3) нивниот збир е еднаков на $2n$ или меѓу избраните броеви се наоѓа бројот n.

Решение.

1) Нека избраните броеви ги означиме со $b_1, b_2, ..., b_{n+1}$. Секој од нив може да се запише во обликот $2^{\alpha} k$, $\alpha \geq 0$, α е цел број и $k \in \{1,3,5,...,2n-1\}$, т.е. k може да прими вкупно n вредности. Тогаш во множеството $\{b_1, b_2, ..., b_{n+1}\}$ постојат два броја b_i и b_j такви што $b_i = 2^{\alpha} k$ и $b_j = 2^{\beta} k$. Очигледно е дека едниот од овие броеви е делител на другиот.
2) Меѓу $n+1$ природни броеви кои се помали или еднакви на $2n$ мора да постојат два соседни. Овие два броја се заемно прости.
3) Ги разгледуваме паровите $(1,2n-1)$, $(2,2n-2)$, ..., $(n-1, n+1)$.

Ако меѓу избраните броеви два броја се од ист пар, тогаш тврдењето на задача е очигледно. Во спротивно, како и да го извршиме изборот на $n+1$ броеви од множеството $\{1,2,3,...,2n\}$ меѓу избраните броеви секогаш се наоѓа бројот n, што и требаше да се докаже. ♦

За принципот на Дирихле постои и таканаречен општ облик, кој гласи:

Ако $kn+1$ топче се распоредени во n кутии, тогаш постои барем една кутија во која се наоѓаат барем $k+1$ топче.

Задача 8. Во една одделение 40 ученици правеле по три писмени задачи. Никој не добил оценка помала од 3 и секој добил по три различни оценки. Александар забележал дека во одделението има најмалку 7 ученици кои имаат иста оценка на секоја од трите поисмени задачи.

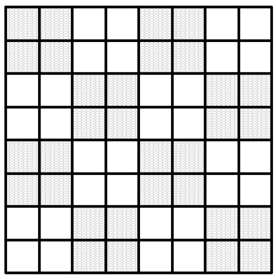
Дали Александар е во право?

Упатство. Искористете го принципот на Дирихле за $kn+1$ предмети и n кутии. ♦

Во некои проблеми потребно е да се изврши поделба, групирање на појдовната структура (множество броеви, геометриска фигура таблици...) на погоден начин, после што примената на принципот на Дирихле станува очидледна, како во следниов пример.

Задача 9. Колкав е максималниот број кралови кои можат да се ставаат на шаховска табла така што никои два од нив меѓусебно да не се напаѓаат.

Решение. Шаховската табла може да се подели на 16 квадрадрати 2x2. Јасно, во секој од овие може да се стави не повеќе од еден крал така да условот на задачата биде исполнет. Значи, максималниот број кралови кои го задоволуваат условот на задачата е 16. ♦



Да забележиме дека принципот на Дирихле може да се сретне и во неговата таканаречена бесконечна форма која гласи :

Ако M е бесконечно множество такво што $M = A_1 \cup \ldots \cup A_k$, тогаш барем едно од множествата A_i е бесконечно.

Задача (XXVI Московска олимпијада). Меѓу 11 произволни бесконечни децимални броеви секогаш можат да се најдат два кои се поклопуваат на бесконечно многу места

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека овие децимални броеви се наоѓаат во интервалот (0,1). Нека избраните броеви се:

$$x_1 = 0, a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} \ldots a_k^{(1)} \ldots$$
$$x_2 = 0, a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} \ldots a_k^{(2)} \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{11} = 0, a_1^{(11)} a_2^{(11)} a_3^{(11)} \ldots a_k^{(11)} \ldots$$

Ги разгледуваме цифрите после децималната запирка $a_1^{(1)},\ldots,a_1^{(11)}$ кои примаат вредности од множеството $\{0,1,2,\ldots,9\}$, па затоа барем две од нив се еднакви. Слично се заклучуваме дека некои две меѓу цифрите $a_k^{(1)}, a_k^{(2)},\ldots,a_k^{(11)}$ се меѓу себе еднакви, каде k е произволен природен број.

Нека

$$S_{ij} = \{\ n \in \mathrm{N} \mid a_n^{(i)} = a_n^{(j)}\ \} \quad i < j,\ \ i, j = 1, 2, \ldots, 11$$

Јасно, $\mathbf{N} = \cup S_{ij}$. Според принципот на Дирлихе едно од множествата S_{ij} е бесконечно. Ова значи дека x_i и x_j се совпаѓаат на бесконечно многу места. ♦

Заради потполност на изложувањето ќе спомнеме два логички принципи кои по својата форма се многу блиски (но не се идентични) до принципот на Дирихле.

I. ***Ако збирот на n реални броеви $b_1, b_2, \ldots, b_n$ е еднаков на a т.е. $\sum_{i=1}^{n} b_i = a$, тогаш барем еден од броевите $b_i, i = 1,2,\ldots,n$ е поголем (помал) или еднаков на $\frac{a}{n}$.***

II. ***Ако збирот на плоштините на фигурите $F_1, F_2, \ldots, F_n$ е помал од плоштината на фигурата F, тогаш тие потполно не ја покриваат фигурата F.***

На читателот му препорачуваме, користејќи го тврдењето II самостојно да ја реши следната задача.

Задача (VI руска олимпијада). Во конвексен многуаголник со плоштина P и периметар S може да се смести круг со радиус $\frac{P}{S}$.

ЗАДАЧИ САМОСТОЈНА РАБОТА

На крајот од оваа статија ви предлагаме самостојно да ги решите следните задачи.

1. Во клас од 31 ученик, збирот на годините на учениците е 423 години. Дали во класот има 20 ученици, чиј збир на години е поголе или еднаков на 280.

2. Во круг со плоштина 1 се наоѓаат 1992 различни точки од кои никои три не се колинеарни. Докажи дека постојат три меѓу нив кои образуваат триаголник чија плоштина е помала од 0,0011.

3. Да се докаже дека меѓу 53 различни природни броеви, чиј збир е помал или еднаков на 1990 секогаш можат да се најдат два чија збир е еднаков на 53.

P.MONTEL ЗА НАУЧНОТО ИСТРАЖУВАЊЕ

Долгото трпение не е доволно да се биде генијалец, но на генијалецот му е потребно трпение за да го дочека моментот на ненадејна светлост која блеснува после извесен период на размислување и свесни или несвесни идејни асоцијации.

*

Математичкото истражување не е толку спектакуларно како другите истражувања за кои се потребни лаборатории, апарати итн. Математичкото истражување е мисловен процес кој тешко може да се опипа.

*

За факултетски професор може да се каже дека навистина е достоен на својата функција само ако во науката која ја предава дава нов допринес.

*

Колку повеќе се зголемуваат нашите знаења, толку се побројни нашите допирни точки со непознатото. Со секој решен проблем се поставуваат нови кои се побројни. Во математиката, како и во сите науки, како луѓето ги решаваат проблемите, нови проблеми се појавуваат пред нив и се наметнуваат нови прашања за истражување. Во секое време имало луѓе кои изјавувале дека науката ја извршила својата задача, дека повеќе нема што да се работи, дека се е откриено, се видено, и според тоа треба само од откриените закони да се извлекуваат пригодни примени. Историјата секогаш ги оповргнувала ваквите пророштва. Напротив, бројот на проблемите само се зголемува, и нема надеж дека во некоја епоха се ќе биде решено; особено во математиката, каде прашањата се множат и се развиваат до бескрај.