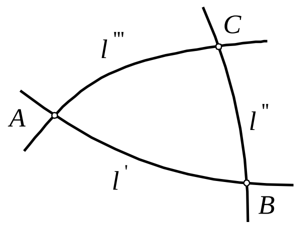
Ирена Стојменовска,
Скопје

ИНЦИДЕНТНТИ СТРУКТУРИ, 3 - РЕШЕТКА И НЕЈЗИНА КООРДИНАТИЗАЦИЈА

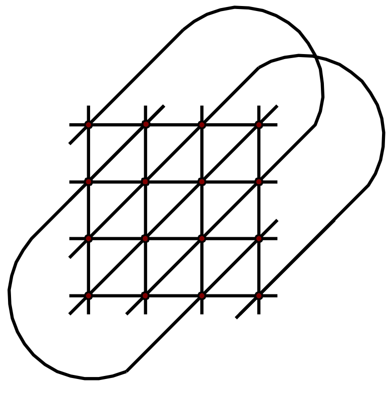
Во оваа работа ќе се запознаеме со еден вид инцидентна структура наречена **3-решетка**. Најнапред, да го образложиме поимот *инцидентна структура*.

Дефиниција. Нека T и L се непразни множества, $T \cap L = \varnothing$ и нека $I \subseteq T \times L$. Тројката (T, L, I) се вика инцидентна структура. Елементите на множеството T ќе ги викаме точки, а елементите на множеството L ќе ги викаме линии. Ако за точката $A \in T$ и за линијата $l \in L$ е исполнето $(A, l) \in I$, велиме дека точката A е инцидентна со линијата l, т.е. A лежи на линијата l (линијата l минува низ точката A).

Пример. На цртежот имаме множество точки $T=\{A, B, C\}$ и множество линиии $L=\{l', l'', l'''\}$, $T \cap L = \varnothing$
$I=\{(A, l'), (B, l'), (B, l''), (C, l''), (A, l'''), (C, l''')\}$
(T, L, I) е инцидентна структура. Без да навлегуваме во понатамошно продлабочување на овој поим, на еден конкретен пример ќе се запознаеме со еден вид инцидентна структура наречена *3-решетка*.



Пример 1. На цртеж 1 имаме три меѓусебно дисјунктнти множества (три класи) линии. Нека множеството хоризонтални линии го означиме со L_1 (нив ќе ги наречеме 1-линии), нека множеството вертикални линии го означиме со L_2 (нив ќе ги наречеме 2-линии) и нека множеството од останатите линии го означиме со L_3 (нив ќе ги викаме 3-линии). Ќе сметаме дека линиите од L_1, L_2 и L_3 ги “носат” само посебно маркираните точки $\bullet$.



Цртеж 1

Согледувајќи ја инцидентноста (припадноста) од самиот цртеж, забележуваме дека низ секоја од точките $\bullet$ минува точно по една линија од секоја класа L_1, L_2 и L_3. Исто така, секои две линии од различни класи се сечат во точно една точка $\bullet$. Класите L_1, L_2 и L_3 имаат по 4 линии, а на секоја линија (од било која класа) лежат по 4 точки $\bullet$. Значи имаме: множество линии $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ каде L_1, L_2 и L_3 се меѓусебно дисјунктни множества линии и множество T од 16 точки. Притоа се задоволени следните два услови:

R1 Кои било две линии од различни класи L_i, L_j $i, j \in \{1, 2, 3\}$ имаат точно една заедничка точка од T;

R2 Секоја точка од множеството T лежи на точно по една линија од секоја класа.

Оваа инцидентна структура претставува една 3-решетка. Откако интуитивно го "насетивме" поимот *3-решетка*, можеме да ја дадеме следнава:

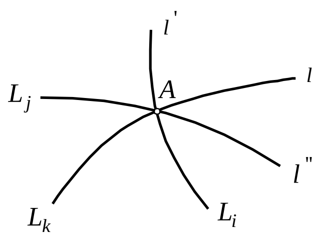
Дефиниција. Нека T е непразно множество. Нека L_1, L_2 и L_3 се непразни меѓусебно дисјунктни множества, чии елементи се подмножества од множеството T. За елементите од множеството T велиме дека се точки, а за елементите од множествата L_1, L_2 и L_3 велиме дека се линии. За (T, L_1, L_2, L_3) велиме дека е ***3-решетка*** ако се исполнети условите **R1** и **R2**. 3-Решетката (T, L_1, L_2, L_3) можеме накратко да ја означиме со (T, L), (каде $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$).

Задача 1. Дали инцидентната структура од примерот кој го дадовме во уводниот дел е 3-решетка?

Решение. Од самата дефиниција на 3-решетка, веднаш следува дека линиите од иста класа L_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ не се сечат меѓусебно, па по пример на соодветната ситуација во геометријата за нив велиме дека се меѓусебно паралелни. Ќе покажеме дека во една 3-решетка постои биекција помеѓу множествата линии од две различни класи L_i и L_j, $i, j \in \{1, 2, 3\}$:

Нека l е произволна k-линија $(l \in L_k,\ k \neq i, j)$.

Секоја i-линија од класата L_i има точно по една заедничка точка со k-линијата l. Така, ако l' е произволна i-линија, тогаш $l' \in L_i$ и $l \in L_k$ имаат точно една заедничка точка $A \in T$ (цртеж 2).



Цртеж 2

Низ точката A пак, минува единствена j-линија l''. Значи на секоја $l' \in L_i$ ñ кореспондира единствена $l'' \in L_j$ т.е. $l' \leftrightarrow l''$ е биекција од каде следува дека L_i и L_j имаат ист број на елементи (линии) за $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Истовремено, можеме да заклучиме дека постои биекција и помеѓу сите точки кои лежат на произволна линија од било која класа на 3-решетката и сите линии кои припаѓаат на една класа. Имено, $l' \leftrightarrow A$ е взаемно еднозначна коресподенција, т.е. на секоја i-линија од класата L_i, $i \in \{1,2,3\}$ ñ кореспондира единствена точка од произволната k-линија $(k \neq i)$ и обратно. Како сите класи од 3-решетката имаат ист број линии, бројот на точки кои лежат на произволна линија од 3-решетката е еднаков со бројот на линии кои припаѓаат на една класа. Оваа дискусија нñ дава за право да го воведеме поимот ***ред на 3-решетка*** кој го дефинираме како број на линии од една класа т.е. број на точки кои лежат на една линија.

Задача 2. Кој е редот на 3-решетката од пример 1? Слично може да се претстави и 3-решетка со ред 5, 6, 7, итн. т.е. 3-решетка со ред k, $k \in$N.

Направи го тоа за $k = 5$.

Решение. Природно, се поставува прашањето: дали постои некоја алгебарска структура која ќе соодвејствува на една 3-решетка, т.е. дали постојат алгебарски структури со кои можат да се интерпретираат 3-решетките? Одговорот е потврден, но претходно ќе се потсетиме на некои основни алгебарски поими.

Нека G е непразно множество; Секое пресликување $* : G$ x $G \to G$ се вика (бинарна) операција на G. За подредениот пар (G, $*$) велиме дека е групоид. Притоа G се вика носител, а операцијата "$*$" - операција на групоидот. Предмет на наше разгледување ќе бидат групоиди (G, $*$) во кои равенките $a * x = b$ и $y * a = b$ имаат единствено решение за секои $a, b \in G$. На пример, во групоидот (Z, -) каде Z е множеството од сите цели броеви, а "-" е операцијата одземање на целите броеви, равенките $a - x = b$ и $y - a = b$ имаат единствени решенија $x = a - b$ и $y = a + b$ во Z, за секои $a, b \in$ Z. Групоидите кои го имаат ова својство се викаат квазигрупи.

Дефиниција. Еден групоид (G, $*$) е квазигрупа ако равенките $a * x = b$ и $y * a = b$ се еднозначно решливи (во G), за секои $a, b \in G$.

Задача 2. Дали (Z, $\bullet$) е квазигрупа? Дали (R, $\bullet$) каде R е множеството од сите реални броеви а "$\bullet$" - операцијата множење на реални броеви е квазигрупа? А (R\{0}, $\bullet$)?

Решение. Да се вратиме сега, на поимот 3-решетка. Токму овие инцидентни структури се еден "извор" на квазигрупи, а во продолжение ќе ја образложиме постапката на нивно формирање.

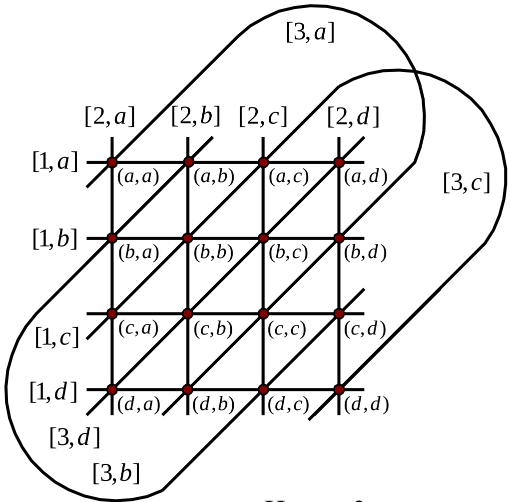
Нека (T , L), ($L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$) е дадена 3-решетка со ред k, $k \in$N.

Нека $Q=\{a, b, c, ...\}$ е (произволно) множество со k елементи. Бидејќи секоја класа L_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ од 3-решетката има по k линии, секоја i - линија од класата L_i, ($i \in \{1, 2, 3\}$) можеме да ја означиме со по еден елемент од Q (постои взаемно еднозначна коресподенција помеѓу сите елементи од множеството Q и сите линии од произволна класа на 3-решетката). Така, ако на i-линијата l ѝ кореспондира елемент $a \in$ Q, неа ќе ја означиме со [i, a]. На овој начин, секоја линија од класата L_1 можеме да ја означиме со по еден елемент од множеството Q; аналогно, секоја линија од класата L_2 можеме да ја означиме со по еден елемент од Q; истото важи и за секоја линија од класата L_3. Сакаме множеството Q да го доведеме до некоја алгебарска структура. За таа цел ќе дефинираме операција на Q и тоа на следниот начин:

Нека $a, b \in$ Q. Тогаш линиите [1, a] и [2 , b] се сечат во единствена точка од 3-решетката која ќе ја означиме со (a, b). (притоа елементот a ќе го викаме апциса, елементот b - ордината, а двата елементи a и b ќе ги викаме координати на таа точка). Низ точката (a, b) минува само една 3 -линија од решетката, и нека таа 3-линија е означена со елементот $c \in$ Q, т.е. нека низ (a, b) минува линијата [3, c].

Во тој случај дефинираме $a \bullet b = c$. На овој начин, на множеството Q е дефинирана бинарна операција “•“. Притоа, равенката $a \bullet x = b$ има единствено решение во Q, за секои $a, b \in$ Q.

Навистина, линиите [1, a] и [3, b] се сечат во единствена точка од 3-решетката, низ која пак минува единствена 2-линија. Нека таа 2-линија е означена со елементот $d \in$ Q, т.е. нека низ пресечната точка на [1, a] и [3, b] минува линијата [2, d]. (Сега, оваа пресечна точка можеме да ја означиме со (a, d)). Согласно дефиницијата на “•“ имаме $a \bullet d = b$, т.е. равенката $a \bullet x = b$ има единствено решение $x = d$. Аналогно, разгледувајќи ја равенката $y \bullet a = b$ (a, $b \in$ Q), а во согласност со дефиницијата на операцијата “•“ и особините на една 3-решетка имаме: линиите [2 ,a] и [3, b] имаат само една заедничка точка, низ која пак, минува единствена 1 - линија, означена со некој соодветен елемент од Q. Нека тоа е елементот $f \in$ Q. Имаме $f \bullet a = b$ и притоа $y = f$ е единствено решение на разгледуваната равенка. Од сето ова следува дека вака дефинираната операција на Q е квазигрупна, т.е. (Q, •) е квазигрупа. Оваа квазигрупа се вика координатна квазигрупа за 3-решетката (T, L), а постапката на нејзино формирање се вика координатизација на соодветната 3-решетка.



Цртеж 3

За илустрација, ќе ја координатизираме 3-решетката од пример 1.

Редот на оваа 3-решетка е 4, па земаме множество Q={a, b, c, d} со 4 елементи. Нека линиите од 3-решетката ги означиме како на цртеж 3.

Применувајќи ја претходно опишаната постапка, точките од 3-решетката ги означуваме со координати, при што: првите коор-динати ја означуваат припадноста на точките на соодветните 1-линии а вторите координати ја означуваат припадноста на соодветните 2 - линии. На пример, точката (a, a) лежи на линиите [1, a] и [2, a], точката (a, b) лежи на линиите [1, a] и [2, b], точката (a, c) лежи на линиите [1, a] и [2, c], итн.

Низ точката (a, a) минува 3-линијата [3, a] (цртеж 3) па имаме $a \bullet a = a$. Низ точката (a, b) минува 3 -линијата [3, b], па имаме $a \bullet b = b$; аналогно $a \bullet c = c$; итн. На овој начин ги дефинираме сите меѓусебни производи на елементите од множеството Q, со што добиваме групоид (Q, •) (таблица 1).

•	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Таблица 1

Уште повеќе, вака добиениот групоид (Q, •) е квазигрупа. Оваа квазигрупа е координатна за 3-решетката од пример 1. Да напоменеме дека при координатизацијата на оваа 3-решетка, линиите од секоја класа L_i, ($i \in \{1,2,3\}$) ги означивме (на произволен начин) со по еден елемент од Q. При било каква нумерација на линиите од соодветните класи на 3-решетката со елементи од множеството $Q=\{a,b,c,d\}$, повторно добиваме координатни квазигрупи.

Задача 4. Утврди ја конструкцијата на барем уште една од нив.

Решение. Сите квазигрупи добиени при различна нумерација на линиите од една 3-решетка со елементи од множеството Q, (Q е произволно множество чиј број на елементи се совпаѓа со редот на 3-решетката), формираат една класа координатни квазигрупи за разгледуваната 3-решетка.

Да забележиме уште дека во досегашното излагање, при координатиза-цијата на 3-решетка со ред k, земавме множество Q со k елементи, а при дефинирањето на операцијата "•" на Q, за први "множители" ги земавме индексите на 1-линиите, за втори "множители" ги земавме индексите на 2-линиите, а за "производи" ги земавме индексите на 3-линиите, т.е. работевме по следнава шема:

$$\begin{pmatrix} [1,x] \;\; [2,y] \;\; [3,z] \\ x \cdot y = z \end{pmatrix}.$$

Елементите од првата редица можат да се распоредат на 3!=6 различни начини. Поради тоа, на претходно опишаниот начин можат да се конструираат уште 5 бинарни операции, кои исто така ќе бидат квазигрупни. Во согласност пак со претходната дискусија, секоја од овие квазигрупи е по еден претставник од соодветната класа координатни квазигрупи на разгледуваната 3-решетка. (За секој од овие 3!=6 начини, при различна нумерација на линиите од 3-решетката со елементи од множеството Q, добиваме координатни квазигрупи од истата класа).

Запознавајќи се со поимот 3-решетка, покажавме како една (конечна) 3-решетка со ред k ($k \in$N) може да се координатизира со квазигрупа. Притоа, постојат повеќе квазигрупи кои се координатни за таа 3-решетка. Сепак, постапката на координатизација подразбира конструкција на една од нив (при било каков редослед на "множителите" и при произволна нумерација на i -линиите ($i \in \{1, 2, 3\}$) со елементи од множеството Q, каде Q е произволно множество со k елементи).

Задача 5. Во задача 1 требаше да претставиш 3-решетка со ред 5. Координатизирај ја оваа 3-решетка а соодветната координатна квазигрупа претстави ја со таблица.