

БМО 2014

1. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $xy + yz + zx = 3xyz$. Докажи, дека

$$x^2y + y^2z + z^2x \geq 2(x + y + z) - 3.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Равенството од условот е еквивалентно со равенството

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3. \quad (1)$$

Од неравенството меѓу средините следува $x^2y + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{x^2y \cdot \frac{1}{y}} = 2x$ и аналогно добиваме $y^2z + \frac{1}{z} \geq 2y$ и $z^2x + \frac{1}{x} \geq 2z$. Ако ги собереме последните три неравенства и го искористиме равенството (1) го добиваме бараното неравенство.

Знак за равенство важи ако и само ако $x^2y = \frac{1}{y}$, $y^2z = \frac{1}{z}$ и $z^2x = \frac{1}{x}$, од каде лесно следува $x = y = z = 1$.

2. За природниот број n ќе велиме дека е специјален ако постојат природни броеви a, b, c и d такви што $n = \frac{a^3 + 2b^3}{c^3 + 2d^3}$.

а) Докажи, дека постојат бесконечно многу специјални броеви.

б) Докажи, дека бројот 2014 не е специјален.

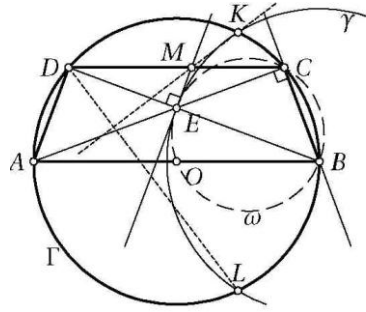
Решение. а) Ако земеме $a = nc, b = nd$ добиваме дека $\frac{a^3 + 2b^3}{c^3 + 2d^3} = n^3 \frac{c^3 + 2d^3}{c^3 + 2d^3} = n^3$,

што значи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ бројот n^3 е специјален.

б) Нека претпоставиме дека $2014 = \frac{a^3 + 2b^3}{c^3 + 2d^3}$, за некои природни броеви a, b, c и d , т.е. дека $a^3 + 2b^3 = 2 \cdot 19 \cdot 53(c^3 + 2d^3)$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\text{NZD}(a, b, c, d) = 1$. Имаме $x^3 \equiv 0, \pm 1, \pm 7, \pm 8 \pmod{19}$, па затоа $a^3 + 2b^3 \equiv 0 \pmod{19}$ ако и само ако $19 \mid a, b$. Но, тогаш од $19^3 \mid a^3 + 2b^3$ следува дека $19^2 \mid c^3 + 2d^3$, од каде следува $19 \mid c, d$, што противречи на $\text{NZD}(a, b, c, d) = 1$.

3. Нека $ABCD$ е впишан во кружница Γ со дијаметар AB и нека E е пресечната точка на дијагоналите AC и BD на трапезот. Кружницата со центар во точката B и радиус BE ја сече кружницата Γ во точките K и L , при што точката K е од иста страна на правата AB како и точката C . Ако нормалата повлечена од точката E на правата BD ја сече правата CD во точката M , докажи дека правите KM и DL се заемно нормални.

Решение. Нека O е центарот на кружницата Γ . Точките O, B, C и E лежат на кружницата ω со дијаметар BE , која ги допира правата EM и кружницата $\gamma(B, \overline{BE})$. Радијалните оски на паровите кружници (Γ, γ) , (Γ, ω) , (γ, ω) се правите KL, BC и EM , соодветно, па затоа овие прави се паралелни или се сечат во една точка. Одтука следува дека KL е симетрала на отсечката CM , т.е. $\overline{KM} = \overline{KC}$. Сега

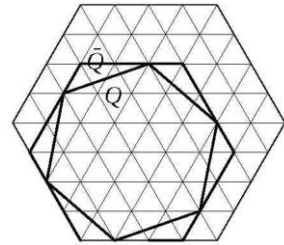


$$\begin{aligned} \angle KMC + \angle LDC &= \angle KCM + \angle LDB + \angle BDC = \angle KCD + \angle KDB + \angle BDC \\ &= \angle KCD + \angle KDC + 2\angle BDC = \angle CBD + \angle BEC = 90^\circ, \end{aligned}$$

па затоа $KM \perp DL$.

4. Нека n е природен број. Правилен шестаголник со должина на страна еднаква на n е поделен со прави, кои се паралелни на неговите страни, на рамнострани триаголници чии страни се со должина 1. Определи го вкупниот број правилни шестаголници чии темиња воедно се и темиња на делбените рамнострани триаголници.

Решение. Нека P е дадениот шестаголник. Темињата на разгледуваните рамнострани триаголници ќе ги нарекуваме *јазли*. За секој шестаголник Q со темиња во јазлите го разгледуваме шестаголникот $\overline{Q}$ опишан околу Q со страни паралелни на страните на P (види цртеж десно). Темињата на $\overline{Q}$ се исто така јазли.



За $0 \leq m < n$ шестаголникот $\overline{Q}$ со должина на страна $n - m$ може да се избере на $3m^2 + 3m + 1 = (m + 1)^3 - m^3$ начини. За дадениот шестаголник $\overline{Q}$, шестаголникот Q може да се избере на $n - m$ начини. Според тоа, вкупниот број можни шестаголници Q е еднаков на

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-1} (n - m)((m + 1)^3 - m^3) &= \sum_{m=0}^{n-1} (n - m)(m + 1)^3 - \sum_{m=0}^{n-1} (n - m)m^3 \\ &= \sum_{m=1}^n (n - m + 1)m^3 - \sum_{m=0}^{n-1} (n - m)m^3 \\ &= \sum_{m=1}^n m^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}. \end{aligned}$$