Пятый турнир городов

ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур, 20 ноября 1983 г.
7-8 кл.

Задача 1.(4)
Внутри квадрата ABCD взята точка M.
Доказать, что точки пересечения медиан треугольников ABM, BCM, CDM и DAM образуют квадрат.
Фольклор

Задача 2.(8)
Найти все такие натуральные K, которые можно представить в виде суммы двух взаимно-простых чисел, отличных от 1.
Фольклор

Задача 3.(12)
Построить четырёхугольник по сторонам и расстоянию между серединами диагоналей.
И.З. Титович

Задача 4.(12)
a_1, a_2, a_3, ... - монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел. Известно, что $a_{a_k}=3k$ для любого k.
Найти значение a_{100}.
А. Анджанс

Задача 5.(2+12)
На шахматной доске N*N стоят N (в условии была ошибка - N^2 - *Ред.*) шашек. Можно ли их переставить так, чтобы любые две шашки, отстоявшие на ход коня, после перестановки отстояли друг от друга лишь на ход короля (то есть стояли рядом)? Рассмотрите два случая:
а)(2) n=3;
б)(12) n=8.
С. Стефанов

ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур, 20 ноября 1983 г.
9-10 кл.

Задача 1.(4)
На сторонах CB и CD квадрата ABCD выбраны точки M и K так, что периметр треугольника CMK равен удвоенной стороне квадрата.
Найти величину угла MAK.
Фольклор

Задача 2.(2+14)
Рассматриваются девятизначные числа, состоящие из неповторяющихся цифр от 1 до 9 в разном порядке. Пара таких чисел называется "кондиционной", если их сумма равна 987654321.
а)(2) Доказать, что найдутся хотя бы две кондиционные пары (считаем, что (a,b) и (b,a) - одна и та же пара).
б)(14) Доказать, что кондиционных пар - нечётное число.
Г. Гальперин

Задача 3.(10)
Вокруг треугольника ABC описана окружность. Её центр O находится внутри треугольника. Из точки O опущены перпендикуляры на стороны и продолжены до окружности; получились точки K, M и P. Рассмотрим отрезки OK, OM и OP как векторы, направленные из точки O.
Доказать, что сумма этих векторов равна вектору OO_1, где O_1 - центр вписанной окружности.
В. Гальперин

Задача 4.(8)
a_1, a_2, a_3, ... - монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел. Известно, что $a_{a_k}=3k$ для любого k.
Найти a_{1983}.
А. Анджанс

Задача 5.(9+5)
На бесконечной во все стороны шахматной доске выделено некоторое множество клеток A. На всех клетках доски, кроме множества A, стоят короли. Все короли могут по команде одновременно сделать ход, заключающийся в том, что король либо остается на месте, либо занимает соседнее поле, то есть делает "ход короля". При этом он может занять и то поле, с которого сходит другой король, но в результате хода двум королям оказаться в одной клетке запрещается.
Существует ли такое K и такой способ движения королей, что после K ходов вся доска будет заполнена королями? Рассмотрите варианты:
а)(9) A есть множество всех клеток, у которых обе координаты кратны 100 (предполагается, что одна горизонтальная и одна вертикальная линии занумерованы всеми целыми числами от минус бесконечности до бесконечности и каждая клетка доски обозначается двумя числами - координатами по этим двум осям).
б)(5) A есть множество всех клеток, каждая из которых бьется хотя бы одним из 100 ферзей, расположенных каким-то фиксированным образом.
Фольклор

ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур, подготовительный вариант, Москва, 8 апреля 1984 г.
6-7-8 кл.

Задача 1.(3)
175 шалтаев стоят дороже, чем 125 болтаев, но дешевле, чем 126 болтаев (Подразумевается, что каждый шалтай и каждый болтай стоят целое число копеек - *Ред.*)
Доказать, что на покупку трёх шалтаев и одного болтая 80 коп. не хватит.
С. Фомин

Задача 2.(3)
В выпуклом пятиугольнике ABCDE
AE=AD, AB=AC, $\angle$CAD=$\angle$AEB+$\angle$ABE.
Доказать, что отрезок CD вдвое длиннее медианы AM треугольника ABE.
Фольклор

Задача 3.(2+3+4)
Рассматриваются 4(N-1) граничных клеток таблицы размером N*N. Нужно вписать в эти клетки последовательные 4(N-1) целых чисел (не обязательно положительных) так, чтобы сумма чисел в вершинах любого прямоугольника со сторонами, параллельными диагоналям таблицы, в том числе и в "вырожденных" прямоугольниках - диагоналях, равнялась одному и тому же числу (для прямоугольников суммируются 4 числа, для диагоналей - 2 числа).
Возможно ли это? Рассмотрите случаи:
а)(2) N=3;
б)(3) N=4;
в)(4) N=5.
В. Болтянский

Задача 4.
Через P(x) обозначается произведение всех цифр натурального числа x, через S(x) - сумма цифр числа x.
Сколько решений имеет уравнение:
P(P(x))+P(S(x))+S(P(x))+S(S(x))=1984 ?
Фольклор

Задача 5.(8)
Дана бесконечная клетчатая бумага со стороной клетки, равной единице. Расстоянием между двумя клетками называется длина кратчайшего пути ладьи от одной клетки до другой (считается путь центра ладьи). В какое наименьшее число красок нужно раскрасить доску (каждая клетка закрашивается одной краской), чтобы две клетки, находящиеся на расстоянии 6, были всегда окрашены разными красками?
Указать раскраску и доказать, что меньшим числом красок обойтись нельзя.
А. Печковский, И. Итенберг

ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур, основной вариант, 8 апреля 1984 г.
6-7-8 кл.

Задача 1.(8)
Дана бесконечная клетчатая бумага со стороной клетки, равной единице. Расстоянием между двумя клетками называется длина кратчайшего пути ладьи от одной клетки до другой (считается путь центра ладьи). В какое наименьшее число красок нужно раскрасить доску (каждая клетка закрашивается одной краской), чтобы две клетки, находящиеся на расстоянии 6, были всегда окрашены разными красками?
Указать раскраску и доказать, что меньшим числом красок обойтись нельзя.
А. Г. Печковский, И. В. Итенберг

Задача 2.(8)
На уроке танцев 15 мальчиков и 15 девочек построили двумя параллельными колоннами, так что образовалось 15 пар. В каждой паре измерили разницу роста мальчика и девочки (разница берётся по абсолютной величине, то-есть из большего вычитают меньшее). Максимальная разность оказалась 10 см. В другой раз перед образованием пар каждую колонну предварительно построили по росту. Докажите, что максимальная разность будет не больше 10 см.
А. Г. Печковский

Задача 3.(2+3+4)
Рассматриваются 4(N-1) граничных клеток таблицы размером N*N. Нужно вписать в эти клетки последовательные 4(N-1) целых чисел (не обязательно положительных) так, чтобы сумма чисел в вершинах любого прямоугольника со сторонами, параллельными диагоналям таблицы, в том числе и в "вырожденных" прямоугольниках - диагоналях, равнялась одному и тому же числу (для прямоугольников суммируются 4 числа, для диагоналей - 2 числа). Возможно ли это? Рассмотрите случаи:
а)(2) N=3;
б)(3) N=4;
в)(4) N=5.
В. Болтянский

Задача 4.(12)
Разрезать равнобедренный прямоугольный треугольник на несколько подобных ему треугольников, так чтобы любые два из них были различны по размерам.
А. Савкин

Задача 5.(12)
Докажите, что существует бесконечное число пар таких соседних атуральных чисел, что разложение каждого из них содержит любой простой сомножитель не менее, чем во второй степени. Примеры таких пар чисел: (8,9), (288,289).
А. Анджанс

ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур, подготовительный вариант, Москва, 8 апреля 1984 г.
9-10 кл.

Задача 1.(2+3)
175 шалтаев стоят дороже, чем 125 болтаев, но дешевле, чем 126 болтаев (Подразумевается, что каждый шалтай и каждый болтай стоят целое число копеек. - *Ред.*)
Доказать, что на покупку трёх шалтаев и одного болтая не хватит:
а)(2) 80 коп.;
б)(3) одного рубля.
С. Фомин

Задача 2.(9)
Из вершин основания тетраэдра в боковых гранях проводят высоты, и в каждой из боковых граней основания двух лежащих в ней высот соединяются прямой.
Докажите, что эти три прямые параллельны одной плоскости.
И. Шарыгин

Задача 3.(4)
Из листа клетчатой бумаги размером 29*29 клеточек вырезали 99 квадратиков 2*2 (режут по линиям). Доказать, что из оставшейся части листа можно вырезать ещё хотя бы один такой же квадратик.
С. Фомин

Задача 4.(8)
F(x) - возрастающая функция, определённая на отрезке [0;1]. Известно, что область её значений принадлежит отрезку [0;1]. Доказать, что, каково бы ни было натуральное N, график функции можно покрыть N прямоугольниками, стороны которых параллельны осям координат, так что площадь каждого равна $1/N^2$. Считайте функцию F(x) непрерывной, изменяющейся от 0 до 1.
Примечание:В прямоугольник мы включаем его внутренние точки и точки его границы.
А. Анджанс

Задача 5.(4+4)
а)(4) Во всех клетках квадрата 20*20 стоят солдатики. Ваня называет число D, а Петя переставляет солдатиков так, чтобы каждый передвинулся на расстояние не меньше D (расстояние берётся между центрами старой и новой клеток).
При каких D это возможно? (Указать наибольшее возможное D, доказать, что всех солдатиков можно передвинуть не меньше, чем на D, и доказать, что большее D взять нельзя.)
б)(4) Эта же задача для квадрата 21*21.
С. С. Кротов

ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур, основной вариант, 8 апреля 1984 г.
9-10 кл.

Задача 1.
а)(4) Во всех клетках квадрата 20*20 стоят солдатики. Ваня называет число D, а Петя переставляет солдатиков так, чтобы каждый передвинулся на расстояние не меньше D (расстояние берётся между центрами старой и новой клеток).
При каких D это возможно? Укажите наибольшее возможное D, покажите, что всех солдатиков можно передвинуть не меньше, чем на D, и докажите, что большее D взять нельзя.
б)(4) Эта же задача для квадрата 21*21.
С. Кротов

Задача 2.(9)
Из вершин основания тетраэдра в боковых гранях провели высоты, а затем в каждой из боковых граней основания двух лежащих в ней высот соединили прямой.
Докажите, что эти три прямые параллельны одной плоскости.
И. Шарыгин

Задача 3.(12)
По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное количество комнат, занумерованных числами от минус бесконечности до плюс бесконечности. В комнатах живут 9 пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов), кроме того, в каждой комнате находится по роялю. Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах (K-той и (K+1)-ой), приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в (K-1)-ую и (K+2)-ую комнаты.
Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся
(пианисты, живущие в одной комнате, друг другу не мешают).
В. Ильичёв

Задача 4.(9)
F(x) - возрастающая функция, определённая на отрезке [0;1]. Известно, что область её значений принадлежит отрезку [0;1]. Доказать, что, каково бы ни было натуральное N, график функции можно покрыть N прямоугольниками, стороны которых параллельны осям координат, так что площадь каждого равна $1/N^2$. Считайте функцию F(x) непрерывной, изменяющейся от 0 до 1.
<u>Примечание 1:</u>В прямоугольник мы включаем его внутренние точки и точки его границы.
<u>Примечание 2:</u>В задаче непрерывность F(x) не требуется. Если Вам для решения задачи удобно считать, что F(x) - непрерывная функция, пробегающая значения от 0 до 1, можете принять такое предположение; решение с такими предположениями оценивается в 8 баллов.
А. Анджанс

Задача 5.(9+3)
Для каждого натурального N обозначим через P(N) число разбиений N в сумму натуральных слагаемых (разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми; например, P(4)=5, потому что 4=4=1+3=2+2=1+1+2=1+1+1+1 - то-есть пять способов).
а)(9) Количество различных чисел в данном разбиении назовем его разбросом (например, разбиение 4=1+1+2 имеет разброс 2, потому что в этом разбиении два различных числа).
Докажите, что сумма разбросов всех разбиений числа N равна
1+P(1)+P(2)+...+P(N-1).
б)(3) Докажите, что это число не больше, чем $(2*N*P(N))^{1/2}$.
А. В. Зелевинский
(в другом месте было написано $2*N*(P(N))^{1/2}$. - *Ред.*)