Сава Гроздев, БАН, Софија

МИНИМАЛЕН ПРОСТ ДЕЛИТЕЛ

Согласно основната теорема на аритметиката, секој природен број n може да се претстави во облик:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \qquad (1)$$

каде што $p_1, p_2, \dots, p_k$ се сите различни прости делители на бројот n, а α_i е највисокиот степен на p_i така што $p_i^{\alpha_i}$ го дели n. Изразот (1) се нарекува канонично разложување на бројот n. Во теоријата на деливоста на природните броеви, која што популарно ја нарекуваме елементарна теорија на броеви, често се бара брзо наоѓање на остатокот од делењето на високи степени на природен број со друг природен број. Во такви случаи корисна е така наречената мала теорема на Ферма (Пјер Ферма (1601-1665)), според која

$$a^{p-1} \equiv 1 \,(\bmod\, p)\,, \qquad (2)$$

каде што p е прост број, а бројот a не се дели со p.

И покрај тоа што малата теорема на Ферма е корисна во многу конкретни ситуации, таа е недоволна за решавање на проблеми од таков тип. Поопшто тврдење од неа е така наречената теорема на Ојлер (Леонард Ојлер (1707-1783)). Ојлер забележал, дека степенот $p-1$ во (2) е точно бројката на броеви, кои се помали од p и се заемно прости со p. Ојлер за произволен природен број n тој број го означил со $\varphi(n)$, т.е. $\varphi(n)$ е бројката на броеви кои што се помали од n и се заемно прости со n. Ако n не е прост број, тогаш јасно е дека $\varphi(n) < n-1$. Јасно е исто така дека $\varphi(1) = 1$. На тој начин, φ станува функција определена на множеството природни броеви и која прима вредности исто така во множеството природни броеви. Општо прифатено е таа функција да се нарекува Ојлерова функција, според името на нејзиниот творец. Со помош на оваа функција, Ојлер ја обопштил малата теорема на Ферма, и обопштената теорема се нарекува теорема на Ојлер. Според таа теорема

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 (\bmod\, n) \qquad (3)$$

каде што a и n се заемно прости природни броеви.

Ојлеровата функција има многу интересни и важни својства. Некои од нив ќе ги спомeнеме во наредниот дел.

Теорема 1. Ојлеровата функција е мултипликативна, т.е.

$$\varphi(m \cdot n) = \varphi(m)\varphi(n)$$

за произволни заемно прости природни броеви n и m.

Доказот на ова тврдење нема да го разгледуваме, но ќе ја забележиме следната последица од неа, која лесно се докажува со индукција:

Последица 1. Ако $m_1, m_2, \dots, m_k$ се попарно заемно прости броеви, тогаш

$$\varphi(m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k) = \varphi(m_1)\varphi(m_2) \dots \varphi(m_k) \qquad (4)$$

Теорема 2. Ако n е природен број и $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ е неговото канонично разложување (1), тогаш

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_k}\right). \tag{5}$$

Доказ. Во случајот $n = p^{\alpha}$, каде што p е прост број, броевите $p, 2p, 3p, \dots, p^{\alpha-1}\cdot p$ се единствените кои не се взаемно прости со p^{α} и не се поголеми од него. Нивниот број е $p^{\alpha-1}$. Според тоа взаемно простите броеви со бројот p^{α} и кои се помали од него ги има $p^{\alpha} - p^{\alpha-1}$. Според тоа, во овој случај

$$\varphi(n) = \varphi(p^{\alpha}) = p^{\alpha} - p^{\alpha-1} = p^{\alpha}\left(1-\frac{1}{p}\right) = n\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

Со тоа во овој случај тврдењето од теоремата е докажано.

За доказот на општиот случај ќе ја искористиме последицата од теорема 1. Според неа:

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= \varphi(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\dots\cdot p_k^{\alpha_k}) = \varphi(p_1^{\alpha_1})\varphi(p_2^{\alpha_2})\dots\varphi(p_k^{\alpha_k}) \\
&= (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1})(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2-1})\dots(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}) \\
&= p_1^{\alpha_1}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)p_2^{\alpha_2}\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots p_k^{\alpha_k}\left(1-\frac{1}{p_k}\right) \\
&= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)
\end{aligned}$$

Со тоа (5) е докажано.

Во натамошниот тек на изложувањата ќе имаме потреба од следната дефиниција.

Дефиниција 1. Ако a и n се заемно прости броеви, тогаш најмалиот природен број k за кој $a^k \equiv 1 \pmod n$, се нарекува степен на a по модул n.

Да забележиме дека множеството од броеви m за кои $a^m \equiv 1 \pmod n$ не е празно. Од теоремата на Ојлер следува дека бројот $\varphi(n)$ припаѓа на тоа множество. Според тоа дефиницијата 1 е оправдана и коректна. Во специјален случај, кога n е прост број, коректноста следува од малата теорема на Ферма.

Теорема 3. Ако a и n се заемно прости природни броеви и k е степен на a по модул n, тогаш $a^m \equiv 1 \pmod n$ за некој природен број тогаш и само тогаш кога k го дели m.

Доказ. Ако k го дели m, тогаш $m = qk$ за некој природен број q. Бидејќи $a^k \equiv 1 \pmod n$, добиваме $a^{qk} \equiv 1^q \pmod n$ па според тоа $a^m \equiv 1 \pmod n$. Обратно, нека $a^m \equiv 1 \pmod n$ и $m = qk + r$, каде што r е остатокот од делењето на m со k. Според тоа $0 \le r \le k-1$. Бидејќи $a^{qk+r} \equiv 1 \pmod n$, добиваме $a^{qk}a^r \equiv 1 \pmod n$. Од условот на теоремата $a^k \equiv 1 \pmod n$, т.е. $a^{qk} \equiv 1 \pmod n$.

Според тоа $a^r \equiv 1 (\mod n)$. Конечно добиваме $r = 0$, бидејќи во спротивен случај добиваме контрадикција со минималноста на k. Значи, бројот k го дели бројот m.

Досегашните разгледувања се доволни за решавање на низа содржајни задачи.

Задача 1. Да се најдат сите природни броеви n, за кои бројот $\frac{n}{\varphi(n)}$ е исто така природен број.

Решение. Нека $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ е каноничната репрезентација (1) на n. Од (5) заклучуваме дека

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \frac{p_1 p_2 \cdots p_k}{(p_1 - 1)(p_2 - 1)...(p_k - 1)}.$$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $p_1 < p_2 < ... < p_k$. Ако $k \geq 3$, тогаш $p_2 \neq 2$ па според тоа бројот $p_2 - 1$ е парен број. Бидејќи $p_3, p_4, ..., p_k$ се прости броеви, секој од броевите $p_3 - 1, p_4 - 1, ..., p_k - 1$ се парни броеви. Значи именителот на $\frac{n}{\varphi(n)}$ се дели со 2^{k-1} и според тоа и со 2^2 бидејќи $k \geq 3$. Од друга страна броителот се дели најмногу со 2, и тоа во случај кога $p_1 = 2$. Според тоа, за бараните броеви n од задачата, $k = 1$ или $k = 2$.

При $k = 1$ мора да е исполнет условот $p_1 = 2$, бидејќи во спротивно именителот на $\frac{p_1}{p_1 - 1}$ се дели со 2, а броителот би бил непарен број. Според тоа $\frac{p_1}{p_1 - 1}$ не е цел број. Решение на задачата во случајот $k = 1$ се сите цели броеви n од облик $n = 2^\alpha$, каде α е произволен природен број.

При $k = 2$, со аналогни разгледувања како и во претходниот дел, се покажува дека $p_1 = 2$. Ќе покажеме дека $p_2 = 3$. Да претпоставиме спротивно, т.е. дека $p_2 > 3$. Тогаш $p_2 = 2q + 1$, каде $q > 1$. За количникот $\frac{n}{\varphi(n)}$ добиваме

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \frac{2 \cdot p_2}{1 \cdot 2 \cdot q} = \frac{p_2}{q}.$$

За да бројот $\frac{p_2}{q}$ биде цел број, мора да е исполнет $q = 1$ бидејќи p_2 е прост број поголем од 3 а $q < 1$. Во тој случај $p_2 = 3$ што е во спротивност со почетната претпоставка. Значи $p_2 = 3$.

Конечно, бараните броеви имаат облик $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta$, каде α и β се произволни природни броеви. Да напоменеме дека β може да прима вредност 0.

Во решението на претходната задача суштински е тоа што бројот 2 е минимален прост делител на бројот n. Во натамошните примери се користи идејата за минимален прост делител, од каде што доаѓа и насловот на оваа статија.

Задача 2. (Романска олимпијада). Да се најдат сите природни броеви n, за кои што $\frac{2^n-1}{n}$ е исто така природен.

Решение. Очигледно е дека $n=1$ не е решение. Нека $n\geq 2$. Случајот кога 2 го дели n не е можен, бидејќи броевите 2 и 2^n-1 се взаемно прости. Наместо 2, како што направивме во претходната задача, нека p е минималниот прост делител на n. Во тој случај, за да бројот $\frac{2^n-1}{n}$ е цел број, потребно е бројот p да го дели бројот 2^n-1. Нека k е степенот на 2 по модул p. Од теорема 3 добиваме дека k го дели n. Според малата теорема на Ферма, $2^{p-1}\equiv 1(\bmod\ p)$ и тогаш повторно според теорема 3, добиваме дека k го дели $p-1$. Значи заклучивме дека k ги дели броевите n и $p-1$, па според тоа и нивниот најголем заеднички делител.

Дефиниција 2. Ако a,b и n се природни броеви, за кои како a и n, така и b и n се заемно прости, тогаш најмалиот природен број k за кој $a^k\equiv b^k$ $(\bmod\ n)$ се нарекува степен на a и b по модул n.

Да забележиме дека, согласно теоремата на Ојлер $a^{\varphi(n)}\equiv 1(\bmod\ n)$ и $b^{\varphi(n)}\equiv 1(\bmod\ n)$, па според тоа $a^{\varphi(n)}-b^{\varphi(n)}\equiv 0(\bmod\ n)$. Значи, горната дефиниција е коректна. На аналоген начин се определува степен на повеќе броеви,кои се взаемно прости со даден природен број n.

Теорема 4. Ако a,b и n се природни броеви, за кои како a и n така и b и n се взаемно прости, k е степенот на a и b по модул n, тогаш $a^m\equiv b^m$ $(\bmod\ n)$ за некое m ако и само ако k го дели m.

Доказот е ист како во теорема 3.

Задача 3. Да се најдат сите природни броеви n за кои бројот $\frac{3^n-2^n}{n}$ е природен број.

Решение. Очигледно е дека $n=1$ е решение. Во наредниот дел ќе ги гледаме природните броеви кои поголеми или еднакви на 2. Нека p е минималниот прост делител на n. Ако $\frac{3^n-2^n}{n}$ е цел број, тогаш p го дели 3^n-2^n, па според тоа $p\neq 2$ и $p\neq 3$. Нека k е степенот на 2 и 3 по модул p. Според теорема 4 k го дели n. Од друга страна, според малата теорема на Ферма $3^{p-1}\equiv 1$ $(\bmod\ p)$ и $2^{p-1}\equiv 1$ $(\bmod\ p)$. Одново, со помош на теорема 4 добиваме дека k го дели $p-1$. Според тоа $k\leq p-1$ и k истовремено ги дели n и $p-1$. Од минималноста на p, добиваме $k=1$. Значи $3^1\equiv 2^1$ $(\bmod\ p)$, што не е можно.

Значи, единствено решение на задачата е $n=1$.

Задача 4. Да се најдат сите природни броеви m и n, за кои бројот $\frac{(m+1)^n - m^n}{n}$ е исто така природен.

Решение. Јасно е дека $n=1$ е решение на задачата, и заради тоа ќе разгледуваме случај $n \geq 2$. Нека p е минималниот прост делител на бројот n. Бројот $(m+1)^n - m^n$ е непарен како разлика на два броја со различна парност и ако бројот $\frac{(m+1)^n - m^n}{n}$ е цел, тогаш $p \neq 2$. Освен тоа броевите $m+1$ и m не се делат со p. Нека k е степенот на $m+1$ и m по модул p. Од теорема 4 добиваме дека k го дели n. Според малата теорема на Ферма $(m+1)^{p-1} \equiv 1(\bmod\ p)$ и $m^{p-1} \equiv 1(\bmod\ p)$, од каде што $(m+1)^{p-1} \equiv m^{p-1}(\bmod\ p)$ и повторно според теорема 4 добиваме дека k го дели $p-1$. Како и во задача 3 добиваме дека k е делител на n и на $p-1$. Според тоа $k \leq p-1$ и од минималноста на p добиваме $k=1$. Според тоа $m+1 \equiv m(\bmod\ p)$, кое што е невозможно заради претпоставката за p.

Значи, единствено решение на задачата е $n=1$.

Природно обопштување на горната задача е да се најдат сите природни броеви m, l и n за кои бројот $\frac{(m+l)^n - m^n}{n}$ е природен. Бројот $\frac{(m+l)^n - m^n}{n}$ очигледно е природен при $n=1$ и произволни броеви m и l. Ако $n \neq 1$ тоа очигледно не е точно. Во наредната задача ќе го разгледаме случајот $n \neq 1$.

Задача 5. Да се докаже дека ако $m, n \neq 1$ и l се природни броеви за кои бројот $\frac{(m+l)^n - m^n}{n}$ е природен, тогаш минималниот прост делител на n го дели l.

Решение. Нека p е минималниот прост делител на n и да претпоставиме дека p не го дели l. Според условот на задачата $\frac{(m+l)^n - m^n}{n}$ е природен. Значи, p не го дели m, бидејќи во спротивен случај p ќе го дели

$$(m+l)^n = m^n + n \cdot m^{n-1} \cdot l + \frac{n(n-1)}{2} m^{n-2} l^2 + \ldots + n \cdot m \cdot l^{n-1} + l^n,$$

од каде следува дека p го дели l^n, па според тоа p го дели l, што е во спротивност со претпоставката. Значи p не го дели m. Од истите причини p не го дели ни $m+l$. Значи, конечно p не е делител ни на m ни на $m+l$. Нека k е степенот на $m+l$ и m по модул p. Како и во претходната задача со помош на теорема 4 и малата теорема на Ферма заклучуваме дека $k=1$. Тогаш $m+l \equiv m(\bmod\ l)$, т.е. $l \equiv 0(\bmod\ l)$, кое противречи на претпоставката.

Задача 6. (Материјали на жирито од Меѓународната олимпијада од 1990) Да се најдат сите природни броеви n, за кои $\frac{2^n+1}{n^2}$ е исто така природен број.

Решение. Задачата е романски предлог и нејзин автор е раководителот на Романскиот национален комитет за Меѓународната олимпијада во Кина во 1990 г., проф. Јоан Томеску.

Јасно е дека $n=1$ е решение на задачата. Нека n е природен број поголем од еден и нека тој е решение на задачата. Ако p е минималниот прост делител на n, тогаш $p\neq 2$, бидејќи во спротивен случај $\frac{2^n+1}{p^2}$ е природен број што не е точно. Значи $p\geq 3$. Ако $\frac{2^n+1}{n^2}$ е природен број, тогаш бројот $\frac{2^n+1}{n}$ е исто така природен број. Значи, природниот број n го дели бројот 2^n+1. Во тој случај бројот n го дели и бројот $(2^n+1)(2^n-1)=4^n-1$, т.е. бројот $\frac{(1+3)^n-1}{n}$ е природен број. Од задача 5 добиваме дека p е делител на 3. Бидејќи p е прост број, добиваме $p=3$. Нека $n=3^m\cdot l$, каде m и l се природни броеви и 3 не го дели l. Јасно е дека $m\geq 1$. Ќе покажеме дека $m=1$.

Нека претпоставиме спротивно, т.е. дека $m\geq 2$. Тогаш

$$\begin{aligned}2^n+1&=2^{3^m\cdot l}+1=\left(2^{3^{m-1}\cdot l}\right)^3+1^3=\left(2^{3^{m-1}\cdot l}+1\right)\left(2^{2\cdot 3^{m-1}\cdot l}-2^{3^{m-1}\cdot l}+1\right)\\&=\left(\left(2^{3^{m-2}\cdot l}\right)^3+1^3\right)\left(2^{2\cdot 3^{m-1}\cdot l}-2^{3^{m-1}\cdot l}+1\right)\\&=\left(2^{3^{m-2}\cdot l}+1\right)\left(2^{2\cdot 3^{m-2}\cdot l}-2^{3^{m-2}\cdot l}+1\right)\left(2^{2\cdot 3^{m-1}\cdot l}-2^{3^{m-1}\cdot l}+1\right)\end{aligned}$$

и ако продолжиме на истиот начин ќе добиеме дека

$$2^n+1=(2^l+1)\prod_{j=0}^{m-1}\left(2^{2\cdot 3^j\cdot l}-2^{3^j\cdot l}+1\right) \tag{6}$$

Но $2^{2\cdot 3^j\cdot l}=4^{3^j\cdot l}=(3+1)^{3^j\cdot l}=3^{3^j\cdot l}+3^j\cdot l\cdot 3^{3^j\cdot l-1}+...+3^j\cdot l\cdot 3+1\equiv 1(\bmod\ 9)$ за секој $j=1,2,...,m-1$. Освен тоа, за секој $j=1,2,...,m-1$ имаме

$$2^{3^j\cdot l}=(3-1)^{3^j\cdot l}=3^{3^j\cdot l}-3^j\cdot l\cdot 3^{3^j\cdot l-1}+...+3^j\cdot l\cdot 3-1\equiv -1(\bmod\ 9)$$

бидејќи l е непарен. Значи $2^{2\cdot 3^j\cdot l}-2^{3^j\cdot l}+1\equiv 3(\bmod 9)$.

Аналогно како и претходно, за $j=0$, добиваме $2^{2l}-2^l+1\equiv 3(\bmod 9)$. Тогаш највисок степен на 3 во производот $\prod_{j=0}^{m-1}\left(2^{2\cdot 3^j\cdot l}-2^{3^j\cdot l}+1\right)$ е m. Значи, за да $(3^m l)^2$ го дели 2^n+1, потребно е 3^m да го дели 2^l+1. Ако $m\geq 2$, тогаш $4^l\equiv 1(\bmod\ 9)$. Но степенот на 4 по модул 9 е 3, и според теорема 3 добиваме дека 3 го дели l. Но тоа не е можно според почетната претпоставка од овој дел.

Значи $m=1$.

Нека $n = 3l$ и 3 не е делител на l. Најмалиот прост делител q на l, бидејќи $\frac{2^n+1}{n^2}$ е природен број е делител и на $2^n + 1$, па според тоа е делител и на $4^n - 1$. Ако s е степенот на 4 по модул q, т.е. $4^s \equiv 1(\bmod\ q)$, тогаш според теорема 3 добиваме дека s го дели n. Од друга страна, според малата теорема на Ферма $4^{q-1} \equiv 1(\bmod\ q)$ и повторно според теорема 3 добиваме дека s го дели $q-1$, $s \leq q-1$. Од минималноста на q добиваме дека s го дели 3. Според тоа за s имаме две можности и тоа $s = 1$ или $s = 3$.

Ако $s = 3$, тогаш $4^3 \equiv 1(\bmod\ q)$. За простите броеви кои се поголеми од 64, очигледно последното не е можно. За простите броеви кои се помали од 64 и се различни од 3, само за $q = 7$ е исполнето $64 \equiv 1(\bmod\ 7)$. Но со диеректна проверка добиваме дека 7 не го дели $2^{21i} + 1$.Непосредно се добива дека за секој природен број i, $2^{21i} + 1 \equiv 2(\bmod\ 7)$. Значи единствена можност е $s = 1$. Но $4^1 \equiv 1(\bmod\ q)$ е исполнето само при $q = 3$. Тоа не е можно бидејќи l не се дели со 3. Конечно $l = 1$.

Значи решенија на задачата се $n = 1$ и $n = 3$.

23 - ти ТУРНИР НА ГРАДОВИ

ОСНОВНА ВАРИЈАНТА

1. Дали постојат природни броеви $a_1 < a_2 < ... < a_{100}$, такви што

$$\text{НЗД}(a_1, a_2) > \text{НЗД}(a_1, a_2) > ... > \text{НЗД}(a_1, a_2).$$

Решение. Една низа која ги задоволува условите од задачата е

$$a_n = 2^{100} - 2^{100-n}.$$

Очигледно е дека оваа низа е растечка. Ќе покажеме дека

$$\text{НЗД}(a_n, a_{n+1}) = 2^{99-n}.$$

Јасно е дека

$$a_n = 2^{100-n}(2^n - 1) \quad \text{и} \quad a_{n+1} = 2^{100-n}(2^{n+1} - 1)$$

се деливи со 2^{99-n}.

Од друга страна броевите $2^n - 1$ и $2^{n+1} - 1$ се взаемно прости.

2. На кружница се поставени n црвени и n плави точки, кои се распоредени наизменично(на секоја црвена точка соседни и се две плави точки и обратно, на секоја плава точка соседни и се две црвени точки). Тие ја делат кружницата на $2n$ лаци, при што должините на два соседни лаци се различни. Секој од $2n-$те лаци има должина еднаква на еден од трите броеви a, b и c. Докажи дека $n-$аголникот со темиња во црвените точки и $n-$аголникот со темиња во плавите точки имаат еднакви плоштини и периметри.

Решение. Нека претпоставиме дека од $2n-$те лаци, на кои е разделена кружницата, k се со должина a, l се со должина b, а m се со должина c. Лаците на кои е разделена кружницата со црвените точки имаат должини $a+b, a+c$ и $b+c$. Ќе ги означиме бројот налаци со тие должини со x, y, z соодветно. Очигледно е дека

$$x+y=k, \quad x+z=l \quad \text{и} \quad y+z=m.$$

Значи, броевите x, y, z можеме да ги изразиме преку k, l, m.

Потполно аналогно, лаците на кои е разделена кружницата, што се наоѓаат меѓу две соседни плави точки, а кои имаат должини $a+b, a+c$, $b+c$ ги има x, y, z на број соодветно. Значи, $n-$аголникот со темиња во црвените точки и $n-$аголникот со темиња во плавите точки имаат исти должини на страни, само во различен редослед. Од тука следува дека тие имаат исти периметри и исти плоштини.

3. Дадена е правоаголна шема со димензии $(n-2)\times n$, $n>2$. Во секое нејзино квадратче е запишан еден цел број од множеството $\{1,2,3,...,n\}$, при што во секоја колона броевите се меѓу себе различни и во секоја редица броевите се меѓу себе исто така различни. Докажи дека правоаголната шема може да се дополни до квадратна шема $n\times n$ со допишување во секое ново поле на еден од броевите од множеството $\{1,2,3,...,n\}$, при што броевите во секоја колона се меѓу себе различни и исто така броевите во секоја редица се меѓу себе различни.

Решение. Во секоја колона на правоаголната шема се појавуваат по $n-2$ елементи. Ги формираме множествата A_i $(i=1,2,..,n)$ на тој начин што во A_i се наоѓаат оние два елементи кои не се во $i-$тата колона. Да забележиме дека секој од броевите $1,2,3,...,n$ се појавува точно во две од формираните множества. Потоа формираме низи

$$\{a_i \,/\, i\in\{1,2,...,n\}\} \quad \text{и} \quad \{b_i \,/\, i\in\{1,2,...,n\}\}$$

и тоа: $b_1=1$ и a_1 е индексот на на било кое од двете множества A_i во кои се јавува бројот 1, b_2 е другиот елемент од A_{a_1} ,а a_2 е индексот на другото множество во кое се јавува b_2 како елемент и.т.н. Значи, множеството A_{a_i} ги содржи елементите b_i и b_{i+1} (A_n ги содржи елементите b_n и b_1). Конечно, $(n-1)-$та редица ја пополнуваме на тој начин што во a_i-тото поле го запишуваме бројот b_i а $n-$тата редица ја пополнуваме на тој начин што во a_i-тото поле го запишуваме бројот b_{i+1}.

Забелешка. Ова е само специјален случај на теоремата на Хол. (Комбинаторика, М.Холл, Издательство “Мир“, Москва 1970.) Имено, систем на различни претставници на фамилијата множества $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ го нарекуваме множеството $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ од n различни елементи такви што $e_i\in A_i$, $i=1,2,..,n$. Теоремата на Хол вели дека фамилијата $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ има систем на различни претставници ако и само ако унијата на било кои k множества од таа фамилија има барем k елементи. Применувајќи ја прво таа теорема најпрво на множествата $A_1, A_2, ..., A_n$ од задачата, а потоа и на множествата B_i кои ги формираме отфрлајќи го од A_i елементот впишан во $i-$тото поле од $(n-1)-$та редица, директно го добиваме доказот.

4. Правилен $(2n+1)-$аголник е разбиен со дијагонали на $2n-1$ триаголници. Докажи дека меѓу нив има барем три рамокраки триаголници.

Решение. Секој од $(2n-1)$-те делбени триаголници на кој е разделен $(2n+1)$-аголникот, може да има најмногу две страни кои во исто време се и страни на $(2n+1)$-аголникот. Постојат најмалку два такви триаголници (точно два постојат само во случајот кога сите дијагонали почнуваат од исто теме на $(2n+1)-$аголникот). Нека претпоставиме дека тие триаголници се $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ и $A_{j-1}A_jA_{j+1}$. Тие два триаголници се рамнокраки. Да претпоставиме дека сите останати триаголници имаат точно една страна која е страна на $(2n+1)-$аголникот, а останатите две негови страни се дијагонали на $(2n+1)-$аголникот. Сите триаголници ги подредуваме во низа: T_1 е триаголникот $A_{i-1}A_iA_{i+1}$, T_2 е триаголникот кој има со T_1 има заедничка страна; општо T_{k+1} е триаголник кој со T_k има заедничка страна и е различен од T_{k-1}. T_{2n-1} е триаголникот $A_{j-1}A_jA_{j+1}$. Со d_i $(i=1,2,....,2n-2)$ ја означуваме заедничката страна на триаголниците T_i и T_{i+1}. Очигледно е дека низата должини $d_1, d_2, ..., d_{n-1}$ е строго растечка, па d_{n-1} е најголема дијагонала на $(2n+1)-$аголникот. Низата должини $d_n, d_{n+1}, ..., d_{2n-2}$ е строго опаѓачка, и d_n е должина на најдолгата дијагонала на $(2n+1)-$аголникот. Значи $d_n = d_{n-1}$, па според тоа T_n е рамнокрак триаголник.

5. Петар поставува топови на шаховска табла на следниот начин: првиот топ го поставува каде сака, а потоа секој нареден топ го поставува на таблата така што тој да напаѓа непарен број од претходно поставените топови. Одреди го максималниот број на топови кои може Петар да ги постави на таблата на претходно опишаниот начин.

Решение. Сите 64 топови не можат да се постават. Навистина, ако претпоставиме спротивно, тогаш во секој од аглите на таблата би бил поставен топ. Меѓутоа, последниот од тие топови кој треба да се постави ќе напаѓа точно два топа, што е во контрадикција со барањето од задачата. Ќе покажеме дека може да се постават 63 топа. Најпрво треба да се постават топови на полињата a_1, a_8 и h_8, потоа да се поставуваат топови на првата хоризонтала од полето b_1 до полето g_1 редоследно, потоа во последната вертикала од полето h_2 до полето h_7. Потоа ги пополнуваме вертикалите од првата до седмата, од долу нагоре: од поле a_2 до поле a_7, од поле b_2 до поле b_8, и така натаму.

6. Во редица се запишани неколку броеви. Секоја секунда робот бира пар соседни броеви од редицата таков што левиот број е поголем од десниот број во избраниот пар, им ги менува местата и ги множи со два. Докажи дека после некое време роботот нема да е во состојба да ја прави опишаната операција.

Решение. Ќе покажеме дека два елементи од редицата кои еднаш си ги замениле местата, повторно не може да си ги заменат местата и после конечен број наредни чекори што би се извршиле. Да претпоставиме спротивно, и нека тоа прв пат се случило со броевите A и B, т.е. A бил поголем од B и бил од негова лева страна. Потоа бројот B нека станал поголем од бројот A, неколку пати менувајќи го местото со броеви кои во некој последователен чекор се наоѓале од негова лева страна и биле поголеми од него, при тоа множејќи се со два. Во даден момент, ако дојде до ситуација изменетиот број B и бројот A, кој станал поголем од бројот A, да си ги сменат местата, тогаш меѓу нив не би имало броеви.

Броеви кои еднаш со бројот B си го промениле местото не би можеле со него уште еднаш да си го променат местото, тие морале и со бројот A да си го променат местото. Според тоа, бројот A, додека да стигне од десната страна на бројот B и меѓу нив да нема други броеви, ќе се дуплира најмалку онолку пати колку што се дуплирал и бројот B.

Значи бројот A е дуплиран барем онолку пати колку и бројот B, па според тоа бројот B не може да стане поголем од бројот A, после конечен број чекори за да тие се сретнат.

Бидејќи два броја од редицата можат најмногу еднаш да си ги заменат местата, бројот на проемни би бил конечен, и роботот без разлика на должината на редицата после конечен број на секунди мора да престане да работи.

7. Познато е дека бројот 2^{333} има 101 цифра и негова прва цифра е 1. Колку броеви во низата $2, 4, 6, ..., 2^{333}$ имаат прва цифра 4?

Решение. Очигледно е дека за секој природен број N постои единствен природен број k таков што $N \leq 2^k < 2N$. Применувајќи го последното на броевите 10^{n-1}, $2 \cdot 10^{n-1}$, $5 \cdot 10^{n-1}$ заклучуваме дека за секој природен број n:

- постои точно еден степен на бројот 2 кој има n цифри и кој почнува со цифрата еден

- постои точно еден степен на бројот 2 кој има n цифри и почнува со цифрата два или три.

- постои точно еден степен на бројот 2 кој има n цифри и кој почнува со цифрата $5, 6, 7, 8$ или 9.

Според тоа, точно 100 од дадените броеви почнуваат со цифрата 1, точно 100 почнуваат со цифрата 2 или 3, и 100 од нив почнуваат со една од цифрите $5, 6, 7, 8$ или 9. Значи, преостануваат точно 33 броја кои почнуваат со цифрата четири.

ПОЧИТУВАНИ ЧИТАТЕЛИ
ПРИЈАТЕН РАСПУСТ И ПОДОБАР УСПЕХ ВО СЛЕДНАТА УЧЕБНА ГОДИНА ВИ ПОЖЕЛУВА УРЕДНИШТВОТО НА СИГМА