

III и IV година

Секоја од задачите со реден број од 1 до 10 се вреднува со 3 поени

1. Од цртежот може да забележиме дека $1+3+5+7=4 \cdot 4$. Колку е вредноста на збирот $1+3+5+7+9+11+13+15+17$?

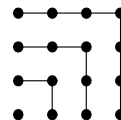
(A) $14 \cdot 14$ (B) $9 \cdot 9$ (C) $4 \cdot 4 \cdot 4$ (D) $16 \cdot 16$ (E) $7 \cdot 9$

Решение. Од цртежот можеме да забележиме дека бројот $1+3+5+7$ е еднаков на бројот на темиња на единични квадратчиња на кој е разделен квадрат со страна 4. Според тоа, збирот е еднаков на $4 \cdot 4 = 16$.

Аналогно, бројот $1+3+5+7+9+11+13+15+17$ е еднаков на бројот на темиња на единични квадратчиња на кои е разделен квадрат со страна

$$\frac{1}{2}(17-1)+1=8+1=9.$$

Бараниот збир е еднаков на $9 \cdot 9 = 81$.



2. Двете редици во квадратната шема

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2010
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	*

имаат ист збир на броевите запишани во нивните единичните квадратчиња. Кој е бројот запишан на местото на *?

(A) 1010

(B) 1020

(C) 1910

(D) 1990

(E) 2000

Решение. Збирот на броевите во првата редица е

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+2010 = \frac{10 \cdot 11}{2} + 2010 = 2065$$

Според тоа, треба да ја решиме равенката

$$11+12+13+14+15+16+17+18+19+20+x = 2065$$

$$155+x = 2065.$$

Бараниот број е 1910.

3. Две празни коцки имаат основи со плоштина 1 dm^2 и 4 dm^2 . Сакаме да ја наполниме поголемата коцка со изворска вода, а при тоа водата да ја носиме со помалата коцка. Колку најмалку пати треба да отидеме до изворот?

(A) 2 пати

(B) 4 пати

(C) 6 пати

(D) 8 пати

(E) 16 пати

Решение. Волуменот на малата коцка е 1 dm^3 , а волуменот на големата коцка е 8 dm^3 .

Со малата коцка со едно носење може да донесеме 1 dm^3 вода. За да ја наполниме големата коцка треба да донесеме 8 мали коцки полни со вода.

4. Колку четирицифрени броеви составени од непарни цифри се деливи со 5?

(A) 900

(B) 625

(C) 250

(D) 125

(E) 100

Решение. Непарни цифри се елементи на множеството $\{1,3,5,7,9\}$. За да еден четирицифрен број е делив со 5, а неговите цифри да се непарни броеви, мора да завршува на 5. Останатите цифри може да бидат било кои.

Според тоа, првите три цифри на бараните броеви се варијација на цифрите $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ со повторување. Нивниот број е

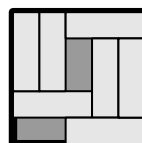
$$V_5^3 = 5^3 = 125$$

5. Директорот на компанијата изјавил: "Секој од нашите службеници има помалку од 25 години". Се покажало дека тој не е во право. Тоа значи дека:

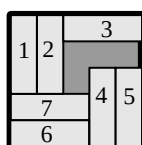
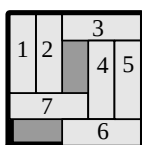
- (A) сите службеници во компанијата имаат по точно 25 години
- (B) сите службеници во компанијата имаат повеќе од 26 години
- (C) ни еден од службениците во компанијата сеуште нема 25 годни
- ☒ (D) некои службеници во компанијата имаат помалку од 25 години
- (E) некои службеници во компанијата имаат точно 26 години

Решение. Негација на исказот "секој наш службеник има помалку од 25 години" е "не секој наш службеник има помалку од 25 години". Тоа значи дека "некој службеник во компанијата има помалку од 25 години". Значи, точен одговор е D)

6. Седум плочки со димензии 3×1 поставени се во внатрешноста на квадратна рамка (види цртеж). Дозволено е правоаголните плочки да ги поместуваме со лизгање. Кој е најмалиот број на дозволени поместувања за да се направи место за уште една правоаголна плочка?



- (A) 2 ☒ (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) не е возможно

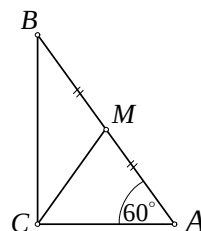


Решение. Седумте плочки ќе ги означиме со броевите од 1 до 7 како на цртежот. Јасно е дека единствена плочка која може да се помести е плочката со број 6. Потоа единствено плочките со редни броеви 4 и 5 може да се поместат, при што се добива крајниот цртеж десно. По третото поместување ќе се направи место за уште една плочка.

7. Триаголникот ABC е правоаголен, точката M е средина на хипотенузата AB и $\angle A = 60^\circ$. Колку е вредноста на $\angle BMC$?

- (A) 105° (B) 108° (C) 110° ☒ (D) 120° (E) 125°

Решение. Бидејќи триаголникот ABC е правоаголен и M е средина на хипотенузата AB , добиваме дека $\overline{AM} = \overline{CM}$, односно дека триаголникот CAM е рамнокрак со основа AC . Бидејќи еден негова агол е $\angle A = 60^\circ$, тој е рамнострани. Според тоа $\angle CMB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.



8. Избери го бројот кој може да е број на рабови на некоја призма!

- (A) 100 (B) 200 (C) 2008 (D) 2009 ☒ (E) 2010

Решение. Ако n е бројот на темиња на основата на призмата, тогаш бројот на рабови на основата е n и бројот на бочни рабови е исто така n . Според тоа, вкупниот број на рабови е

Зл. Единствен број од броевите 100, 200, 2008, 2009 и 2010 кој се дели со 3 е 2010. Според тоа, бројот кој е број на рабови на призма е 2010, а призмата е 670-аголна.

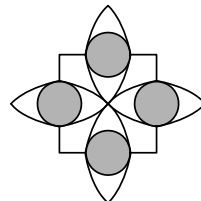
9. За колку двоцифрени броеви $\overline{xy}$ е исполнето равенството $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 0$

- (A) (B) 2 (C) 6 (D) 32 (E) нисден

Решение. Збирот на квадратите на два прирони броја е еднаков на нула, ако и само ако секој од броевите е нула. Според тоа $x-3=0$ и $y-2=0$, т.е. $x=3$, $y=2$.

Значи, има еден таков број 32.

10. На цртежот, должината на страната на квадратот е 2. Четирите полукружници минуваат низ центарот на квадратот и имаат центри во темињата во квадратот. Затемнетите кружници имаат центри на страните на квадратот и ги допираат соодветните полукружници. Колку е плоштината на затемнетиот дел од цртежот?



- (A) (B) $\sqrt{2}\pi$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$ (D) π (E) $\frac{1}{4}\pi$

Решение. Должината на дијагоналата на квадратот е

$$\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

па радиусите на полукружниците е $\sqrt{2}$. Според тоа дијаметарот на затемнетите кружници е $2 - 2(2 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$,

односно нивните радиуси се $r = \sqrt{2} - 1$. Сега, затемниот дел има плоштина

$$P = 4(\sqrt{2} - 1)^2 \pi = 4(3 - 2\sqrt{2})\pi.$$

Секоја од задачите со реден број од 11 до 20 се вреднува со 4 поени

11. Броевите $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{7}$ и $\sqrt[6]{7}$ се последователни членови на една геометријска прогресија. Наредниот член на прогресијата е

- (A) $\sqrt[9]{7}$ (B) $\sqrt[12]{7}$ (C) $\sqrt[5]{7}$ (D) $\sqrt[10]{7}$ (E)

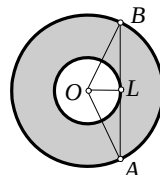
Решение. Бидејќи $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{7}$ и $\sqrt[6]{7}$ се последователни членови на геометријска прогресија, имаме

$$q = \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[4]{7}} = \frac{1}{\sqrt[6]{7}} = 7^{-\frac{1}{6}}.$$

Според тоа, наредниот член на прогресијата е

$$\sqrt[6]{7} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{7}} = 1.$$

12. Тетивата AB е тангентата на помалата од концентричните кружници (види цртеж). Ако $\overline{AB} = 16$, колку е плоштината на кружниот прстен?



- (A) 32π (B) 63π (C) (D) π

(E) зависи од радиусите на кружниците

Решение. Поголемата и помалата кружница ќе ги означиме со k_1 и k_2

соодветно, а нивните радиуси со R и r . Нека O е центарот на кружницата, а L подножјето на нормалата спуштена од O кон AB (види цртеж). Тогаш $OLA \cong OLB$ и тие се правоаголни триаголници со катети r и 8 и хипотенуза R . Тогаш

$$R^2 - r^2 = 8^2.$$

Сега плоштината на кружниот прстен е

$$P = (R^2 - r^2)\pi \text{ cm}^2 = 64\pi \text{ cm}^2.$$

13. Нека x и y се цели броеви за кои $2x = 5y$. Колку е вредноста на збирот $x + y$?

(A) 2011

(B) 2010

(C) 2009

(D) 2008

(E) 2007

Решение. Бидејќи x и y го задоволуваат равенството $2x = 5y$ и $(2,5) = 1$, добиваме $2 \mid y$ и $5 \mid x$. Значи, постојат единствени x_1, y_1 , такви што $x = 5x_1$ и $y = 2y_1$. Сега, равенството $2x = 5y$ го добива обликот

$$2 \cdot 5x_1 = 5 \cdot 2y_1$$

$$10x_1 = 10y_1$$

Значи, $x_1 = y_1$, од каде што добиваме

$$x + y = 5x_1 + 2y_1 = 5x_1 + 2x_1 = 7x_1.$$

Според тоа $7 \mid x + y$, а единствен од броевите 2007, 2008, 2009, 2010 и 2011 кој е делив со 7 е 2009.

14. Рамнострани триаголник е разделен на 36 рамнострани триаголници со плоштина 1 cm^2 . Колку е плоштината на триаголникот ABC (види цртеж).

(A) 11 cm^2

(B) 12 cm^2

(C) 13 cm^2

(D) 14 cm^2

(E) 15 cm^2

Решение. Ќе избереме точки O, M, P, Q како на цртежот. Тогаш

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta OAB} + P_{\Delta OBC} + P_{\Delta OCA}.$$

Но, од друга страна

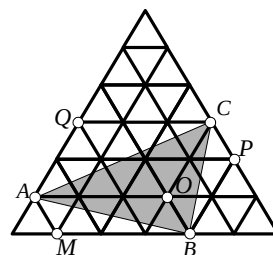
$$P_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} P_{\Delta OAMB} = \frac{1}{2} 6 = 3,$$

$$P_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} P_{\Delta OBPC} = \frac{1}{2} 4 = 2$$

$$P_{\Delta OCA} = \frac{1}{2} P_{\Delta OCQA} = \frac{1}{2} 12 = 6$$

Сега, јасно е дека

$$P_{\Delta ABC} = 6 + 3 + 2 = 11 \text{ cm}^2$$



15. Во една вреќа има топки: сини, залени и црвени. Од секоја боја има барем по една топка. При секое вадење на пет топки од вреќата, најмалку две се црвени и три од нив се со иста боја. Колку сини топки има во вреќата?

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) не е можно да се определи

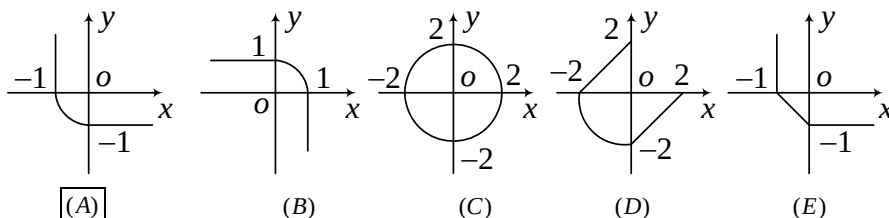
Решение. Во вреќата има барем две црвени, барем една сина и барем една зелена топка. Ако има уште една сина топка, тогаш во вреќата има барем две црвени, две сини и една

зелена. Тогаш во вреќата има пет топки од кои три се со иста боја. Според тоа, има точно една сина. Од исти причини, има точно една зелена топка.

Таков случај е кога има $n, n \geq 3$ црвени топки, една сина и една плава топка.

16. Кој од графичите соодветствува на множеството решенија на равенката

$$(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4.$$



Решение. Равенката можеме да ја запишеме во облик

$$(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 4, & x \geq 0, y \geq 0 \\ x^2 = 1, & x < 0, y \geq 0 \\ y^2 = 1, & x \geq 0, y < 0 \\ x^2 + y^2 = 1, & x < 0, y < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 = 1, & x < 0, y \geq 0 \\ y^2 = 1, & x \geq 0, y < 0 \\ x^2 + y^2 = 1, & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Сега јасно е дека точно решение е (A).

17. Даден е правилен 14-аголник. Колку има правоаголни триаголници чии темиња се и темиња на правилниот 14-аголник?

(A) 42

(B) 84

(C) 88

(D) 98

(E) 168

Решение. Околу четиринаесетаголникот може да се опише кружница (бидејќи тој е правилен). Секој правоаголен триаголник чии темиња се и темиња на четиринаесетаголникот има хипотенуза што е дијаметар на опишаната кружница околу четиринаесетаголникот. Хипотенузата спојува две темиња на четиринаесетаголникот кои се дијаметрално спротивни.

Од друга страна, секој пар на дијаметрално спротивни темиња на четиринаесетаголникот е хипотенуза на 12 правоаголни триаголници кои имаат темиња што се и темиња на четиринаесетаголникот.

Парови на дијаметрално спротивни темиња има 7, па според тоа, бројот на бараните правоаголни триаголници е

$$7 \cdot 12 = 84.$$

18. На местото на ѕвездите во $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10$ се запишува еден од знаците "+" или ".". Нека N е најголемата вредност што може да се добие на тој начин. Кој е најмалиот прост делител на N .

(A) 2

(B) 3

(C) 5

(D) 7

(E) некој друг број

Решение. Заради неравенството $xy > x + y$ кое е точно за било кои различни природни броеви x и y поголеми од 1, добивме дека $2*3*4*5*6*7*8*9*10$ има најголема вредност ако и само ако на местото на * ставиме знак за множење, т.е.

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \geq 2*3*4*5*6*7*8*9*10,$$

за било кои замени на * со знак за собирање и знак за множење. Сега е јасно дека најголема вредност за $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10$ е

$$1 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10.$$

Според тоа, точен одговор е под (E).

19. Должините на страните на еден триаголник во центиметри се природните броеви 13, x и y . Определи го периметарот на триаголникот, ако $xy = 105$.

(A) 35

(B) 39

(C) 51

(D) 69

(E) 119

Решение. Бројот 105 како производ на два природни броја може да се запише на следниот начин

$$105 = 1 \cdot 105 = 3 \cdot 35 = 21 \cdot 5 = 15 \cdot 7,$$

Решенија на равенката $xy = 105$ во множеството природни броеви се

$$x = 1, y = 105; \quad x = 105, y = 1; \quad x = 3, y = 35; \quad x = 35, y = 3;$$

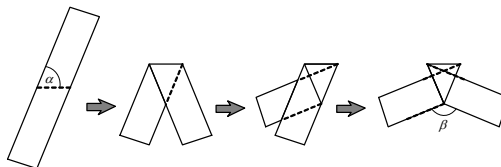
$$x = 21, y = 5; \quad x = 5, y = 21; \quad x = 15, y = 7; \quad x = 7, y = 15.$$

Триаголници со страни 13, 1, 105; 13, 3, 35; 13, 5, 21 не постојат, бидејќи има случај $a + b < c$, каде a, b, c се страни на триаголник.

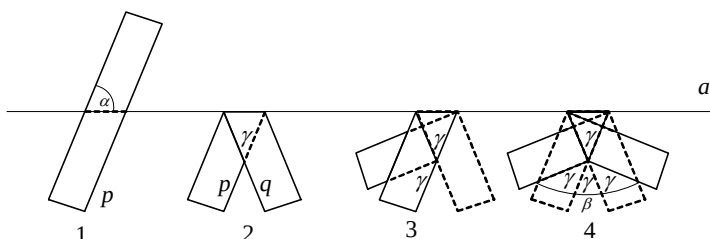
Според тоа, триаголникот има страни 13, 7 и 15, а неговиот периметар е

$$13 + 7 + 15 = 35.$$

20. Хартиена трака е превиткана три пати, како што е прикажано на цртежот. Ако $\alpha = 70^\circ$, колку е β ?

(A) 140° (B) 130° (C) 120° (D) 110° (E) 100° 

Решение. Со осна симетрија со оска на симетрија a , од цртежот 1 се добива цртежот 2. Означениот агол γ е агол во рамнокрак триаголник во кој аголот при основата е 70° . Според тоа, $\gamma = 40^\circ$. Ако сега десниот дел од



траката осносиметрично го пресликаме преку правата p се добива третиот цртеж. Конечно, крајниот цртеж се добива со уште една осна симетрија, при што оска на симетрија е правата q . Заради осните симетрии, големините на аглите се како на цртежот 4, при што

$$\beta = 3\gamma = 120^\circ.$$

Секоја од задачите со реден број од 21 до 30 се вреднува со 5 поени

21. Со прави, паралелни на основата, секоја од другите две страни на триаголникот се разделени на 10 еднакви дела.

Кој процент од површината на триаголникот е сива?

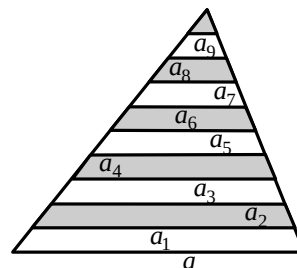
(A) 42,5%

(B) 45%

(C) 46%

(D) 47,5%

(E) 50%



Решение. Триаголникот е разделен на 9 трапези и еден триаголник. Нека основата на најголемиот трапез е a (должина на страна на триаголникот), основите на сивите трапези се $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$, а основата на делбениот триаголник е a_9 .

Тогаш збирот на плоштините на белите делбени трапези е

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{h}{10} (a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 + a_9),$$

а плоштината на сивиот дел е

$$P_2 = \frac{1}{2} \frac{h}{10} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 + a_9).$$

Бидејќи $P_1 + P_2 = P = \frac{1}{2} ah$, добиваме

$$\frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} \frac{h}{10} a + 2P_2,$$

$$P_2 = \frac{45}{100} \frac{ah}{2}$$

Па според тоа $P_2 = \frac{45}{100} P$. Значи, P_2 е 45% од плоштината на триаголникот.

22. На една трка учествувале 100 натпреварувачи. На целта сите стигнале во различно време. Подоцна секој од нив го прашале кое место го освоил на трката и сите одговориле со број од 1 до 100. Збирот на одговорените броеви е 4000.

Кој е најмалиот можен број на грешни одговори?

(A) 9

(B) 10

(C) 11

(D) 12

(E) 13

Решение. Бројот 4000 е збир на броеви што како одговори ги дале натпреварувачите. За да го определиме најмалиот можен број на натпреварувачи кои грешно би одговориле, доволно е да се определи најголем можен број на натпреварувачи кои би можеле точно да одговорат. Нека бројот на натпреварувачи кои точно оговориле е n . Тогаш јасно е дека $n \leq 100$. Бројот n е најголем ако и само ако точно одговориле првиот, вториот, третиот, ..., т.е. редослено по освоено место на трката, соодветниот натпреварувач точно одговорил. Според тоа

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \leq 4000,$$

т.е. $n(n+1) \leq 8000$. Сега јасно е дека најголема вредност на n е $n = 88$. Најмалиот број на натпреварувачи кои грешно одговориле е 12.

23. Една коцка ја фрламе три пати. Ако бројот што се добива при третото фрлање е еднаков на збирот на броевите што се добиваат при првите две фрлања, колку е веројатноста бројот 2 да се појави барем еднаш?

(A) $\frac{1}{6}$

(B) $\frac{91}{216}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{8}{15}$

(E) $\frac{7}{12}$.

Решение. Случаите кога во третото фрлање паднал $z = 1$ не е можен. Нека броевите кои паднале во x, y и z во првото, второто и третото фрлање соодветно. При тоа ги имаме слените можности:

$$\begin{array}{lll} & x=1 & \\ z=2 & y=1 & \\ & x=2 & x=1 \\ z=3 & y=1 & y=2 \end{array}$$

$z = 4$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$		
	$y = 3$	$y = 2$	$y = 1$		
$z = 5$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$	
	$y = 4$	$y = 3$	$y = 2$	$y = 1$	
$z = 6$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 5$
	$y = 5$	$y = 4$	$y = 3$	$y = 2$	$y = 1$

Сега јасно е дека бараната веројатност е $\frac{8}{15}$.

24. Еден бар код од тип како што е прикажано на цртежот е составен од бели и црни ленти, наизменично поставени. Секогаш почнува и завршува со црна лента. Секоја лента, бела или црна, има ширина 1 или 2. Вкупната ширина на бар кодот е 12. Колку различни кодови постојат, читајќи ги секогаш од лево кон десно?



- (A) 24 (B) 132 (C) 66 (D) 12 (E) 116

Решение. Доволно е да се определат сите решенија на равенките

$$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 + x_4 + y_4 + x_5 + y_5 + x_6 + y_6 + x_7 + y_7 + x_8 + y_8 + x_9 + y_9 + x_{10} + y_{10} = 10$$

$$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 + x_4 + y_4 + x_5 + y_5 + x_6 + y_6 + x_7 + y_7 + x_8 + y_8 + x_9 + y_9 = 9$$

$$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 + x_4 + y_4 + x_5 + y_5 + x_6 + y_6 + x_7 + y_7 + x_8 + y_8 = 8$$

Во секоја од равенките за секој пар x_i, y_i треба да е исполнето $x_i = 0$, $y_i \in \{0, 1, 2\}$ или $y_i = 0$, $x_i \in \{0, 1, 2\}$.

Бројот на такви решенија е 116.

25. Еден плоштад е поплочен со два вида на квадратни плочки, како што е прикажано на цртежот. Големите плочки имаат страна a , а малите плочки имаат страна b . Испрекинатите линии (хоризонталната и косата) зафаќаат агол од 30° . Колку е $a:b$.

- (A) $(2\sqrt{3}):1$ (B) $(2+\sqrt{3}):1$ (C) $(3+\sqrt{2}):1$ (D) $(2\sqrt{2}):1$ (E) $2:1$

Решение. Од условот на задачата и од ознаките на цртежот е јасно дека

$$\angle BOA_1 = \angle B_1OA_1 = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$$

Оттука

$$\angle D_1OC_1 = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$$

и

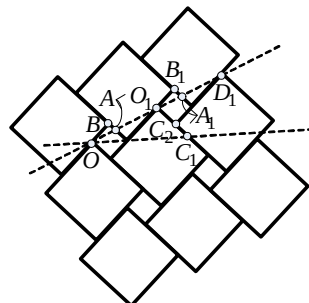
$$\angle O_1D_1C_2 = 15^\circ.$$

Сега,

$$a:b = \operatorname{ctg} 15^\circ = \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{1-\cos 30^\circ}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = 2+\sqrt{3}.$$

Според тоа,

$$a:b = (2+\sqrt{3}):1.$$



26. Броевите од 1 до 10 се запишани по 10 пати на една табла. Учениците од еден клас ја играат следната игра: еден ученик брише 2 од броевите што се запишани на таблата и го запишува нивниот збир намален

за 1; потоа друг ученик брише два од броевите што се на таблата и го запишува нивниот збир намален за 1, итн.

Играта завршува кога на таблата ќе остане само еден број. Кој е тој број?

- (A) помал од 440 (B) 451 (C) 460 (D) 488 (E) поголем од 500

Решение. Збирот на сите броеви запишани на таблата е

$$10(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) = 10 \cdot 55 = 550.$$

Во секој чекор од играта овој збир се намалува за 1. Има вкупно 99 чекори. Значи, на крајот ќе се запише бројот

$$550 - 99 = 451.$$

27. Вредноста на изразот

$$\frac{(2+3)(2^2+3^2)(2^4+3^4)(2^8+3^8)\dots(2^{2048}+3^{2048})+2^{4096}}{3^{2048}}$$

е еднаква на:

- (A) 2^{2048} (B) 2^{4096} (C) 3^{2048} (D) 3^{4096} (E) $2^{2048} + 3^{2048}$

Решение. Користејќи го идентитетот $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$, добиваме

$$\begin{aligned} \frac{(2+3)(2^2+3^2)(2^4+3^4)(2^8+3^8)\dots(2^{2048}+3^{2048})+2^{4096}}{3^{2048}} &= \frac{(3-2)(2+3)(2^2+3^2)(2^4+3^4)(2^8+3^8)\dots(2^{2048}+3^{2048})+2^{4096}}{3^{2048}} = \\ &= \frac{(3^2-2^2)(2^2+3^2)(2^4+3^4)(2^8+3^8)\dots(2^{2048}+3^{2048})+2^{4096}}{3^{2048}} = \frac{(3^4-2^4)(2^4+3^4)(2^8+3^8)\dots(2^{2048}+3^{2048})+2^{4096}}{3^{2048}} = \\ &= \frac{(3^8-2^8)(2^8+3^8)\dots(2^{2048}+3^{2048})+2^{4096}}{3^{2048}} = \frac{(3^{2048}-2^{2048})(2^{2048}+3^{2048})+2^{4096}}{3^{2048}} = \frac{(3^{2048})^2 - (2^{2048})^2 + 2^{4096}}{3^{2048}} = 3^{2048} \end{aligned}$$

28. Квадратниот корен $\sqrt{\underbrace{0,444\dots4}_{100\text{ пати}}}$ е запишан како бесконечен децимален

број. Која е 100 -тата цифра по децималната запирка?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

Решение. Бројот можеме да го запишеме во облик

$$\sqrt{\underbrace{0,444\dots4}_{100\text{ пати}}} = 2 \sqrt{\underbrace{0,11\dots1}_{100}}.$$

Сега со конечен принцип на математичка индукција за постапката за определување на корен се добива дека на стотото место по децималната запирка на $\sqrt{\underbrace{0,11\dots1}_{100}}$ ќе биде

цифрата 3, а на сто и првото ќе биде 1, од каде се добива дека на стотото место по децималната запирка во $\sqrt{\underbrace{0,444\dots4}_{100\text{ пати}}}$ ќе биде цифрата 6.

29. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x > 0$ и $2f(x) + 3f\left(\frac{2010}{x}\right) = 5x$.

$$f(6) = \dots$$

- (A) 993 (B) 1 (C) 2009 (D) 1013 (E) 923

Решение. Бројот 2010 може да се запише во облик $2010 = 6 \cdot 335$. Сега, ако замениме $x = 6$ во функционалната равенка, добиваме

$$2f(6) + 3f(335) = 30. \quad (1)$$

Ако замениме $x = 335$ добиваме

$$2f(335) + 3f(6) = 1675. \quad (2)$$

Со воведување на ознаки $f(6) = x$ и $f(335) = y$, во (1) и (2) го добиваме системот

$$\begin{cases} 2x + 3y = 30 \\ 3x + 2y = 1675 \end{cases}$$

Решение на последниот систем е $x = 993$ и $y = -652$. Значи,

$$f(6) = 993$$

30. Во една низа првите три члена се 1, 2 и 3 редоследно. Од третиот член па натаму, секој следен член се пресметува со претходните три и тоа: последниот запишан број се одзема од збирот на двата броја пред него; на пример 1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, ... Кој е 2010-от член на низата?

☒ (A) -2006

(B) 2008

(C) -2002

(D) -2004

(E) друг одговор

Решение. Не е тешко да се види дека бараната низа е

1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, -4, 9, -6, 11, -8, ... ,

Односно,

$$a_{2k} = -2k + 4$$

$$a_{k+1} = 2k + 1.$$

Јасно е дека,

$$a_{2010} = 4 - 2010 = -2006.$$
