Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ - Скопје
Машински факултет

Д-р Лазо А. Димов

МАТЕМАТИКА - 1

Скопје, 2006

Д-р Лазо А. Димов

МАТЕМАТИКА - 1

Рецензенти:
д-р Боро Пиперевски,
редовен професор на Електро-техничкиот факултет во Скопје
д-р Борко Илиевски,
редовен професор на Природно-математичкиот факултет во Скопје

Одобрено со одлука бр. 02-1671/1 од 25.05.2006 година на наставно научниот совет на Машинскиот факултет во Скопје како основен универзитетски учебник.

ПРЕДГОВОР

Оваа книга е напишана врз основа на содржини од предметите Линеарна алгебра и Математика 1, за кои јас имам повеќе години одржувано како вежби така и предавања на Машинскиот и Електротехничкиот факултет во Скопје како и предавања на предметот Математика за интердисциплинарните студии по ИСИЖС на универзитетот „СВ. Кирил и Методиј“ во Скопје. Може да се каже дека е преработување, проширување и подобрување на текстот на скриптите, напишани за интерна употреба за студентите на Машинскиот факултет и за студентите на ИСИЖС при универзитетот СВ. Кирил и Методиј во Скопје.

Содржината на оваа книга опфаќа стандардна материја која се изучува на сите светски технички факултети во почетниот курс по математика. Наменета е пред се за студентите на техничките факултети.

Книгата е поделена во осум глави кои секоја за себе содржат повеќе параграфи. Притоа во секоја глава има бројни решени примери кои помагаат за полесно совладување на материјалот. На крајот на секоја глава има зададено задачи за самостојно решавање. Верувам дека нивното успешно решавање ќе претставува знак за висок степен на совладаност на изложената материја.

Учебникот, пред се, наменет е за студентите на Машинскиот факултет а може да го користат и студентите на другите технички факултети.

Им изразувам голема благодарност на рецензентите проф. д-р Боро Пиперевски и проф. д-р Борко Илиевски кои ме бодреа при пишувањето на ракописот го прочитаа и ми дадоа многу корисни забелешки што придонесоа за подобрување на ракописот.

Сликите ги нацрта и направи конечна компјутерска обработка и подготовка за печатење м-р Ѓорѓи Маркоски, асистент на ПМФ Скопје.

Проф. д-р Лазо Димов — септември 2006, Скопје

1. ЕЛЕМЕНТИ ОД ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА

1.1. Детерминанти од втор ред

Деф.1. Квадратната шема од броеви:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

се вика детерминанта од втор ред и претставува број чија вредност изнесува

$$ad - bc.$$

Значи формулата

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, (1)$$

е формула за пресметување на детерминантите од втор ред.

Притоа за a, b, c, d велиме дека се елементи на детерминантата a и b се елементи од првата редица а c и d се елементи од втората редица. Елементите a, c се елементи од првата колона а b, d се елементи од втората колона.

Елементите a и d ја сочинуваат главната дијагонала а елементите b и c ја сочинуваат споредната дијагонала.

Детерминантите од втор ред ги имаат следните особини:

1. Вредноста на детерминантата не се менува ако редиците и колоните си ги заменат местата. Навистина

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} .$$

2. Ако две редици (колони) си ги заменат мстата Детерминантата го менува знакот.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = -(bc - ad) = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} .$$

3. Ако детерминантата има две исти редици (колони) нејзината вредност е нула .

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ba = 0 .$$

4. Ако елементите на една редица (колона) се помножат со некој број тогаш и детерминантата е помножена со тој број.

Навистина

$$m\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = m(ad - bc) = mad - mbc = \begin{vmatrix} ma & mb \\ c & d \end{vmatrix} .$$

Треба да забележиме дека оваа особина го овозможува правилото за вадење на множител пред детерминантата ако сите елементи од некоја редица (колона) го содржат тој множител.

5. Ако елементите од една редица (колона) се пропорционални со елементите на друга редица (колона), тогаш вредноста на детерминантата е еднаква на нула.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ ma & mb \end{vmatrix} = amb - bma = 0 \ .$$

6. Ако елементите на една редица (колона) се помножат со некој број и се додадат на елементите на друга редица (колона), тогаш вредноста на детерминантата не се менува .

Навистина

$$\begin{vmatrix} a+mc & b+md \\ c & d \end{vmatrix} = (a+mc)d-(b+md)c = ad+mcd-bc-mcd = ad-bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Пример 1. Да се пресметаат детерминантите

1.1 $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$, 1.2 $\begin{vmatrix} 2+\sqrt{2} & 4+\sqrt{3} \\ 4-\sqrt{3} & 2-\sqrt{2} \end{vmatrix}$, 1.3 $\begin{vmatrix} a-b & a+b \\ b-a & b+a \end{vmatrix}$

Показно решение за детерминантата 1.1.

$$\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix} = (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})-(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1-2-(1-3) = -1+2 = 1 .$$

Пример 2. Докажи ја точноста на равенствата :

2.1 $\begin{vmatrix} \log_3 9 & \log_2 8 \\ \log_8 2 & \log_9 3 \end{vmatrix} = 0$, 2.2 $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = \sin(\alpha-\beta)$.

1.2. Примена на детерминантите од втор ред

Пред да ја објасниме примената на детерминантите од втор ред да укажеме на фактот дека секоја линеарна равенка со една непозната се сведува на равенката :

$$Ax = B, (2) ,$$

за која важи следната дискусија

1. За $A \neq 0$ равенката има единствено рашение $x = \dfrac{B}{A}$.

2. За $A = 0$ и $B \neq 0$ равенката нема решение.

3. За $A = 0$ и $B = 0$ равенката има бесконечно многу решенија.

Детерминантите од втор ред се применуваат за решавање на системи од две линеарни равенки со две непознати. Затоа нека го разгледаме системот од двете равенки:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases} (3)$$

Ако првата од равенките ја помножиме со b_1 а втората со $-b$ и потоа така добиените равенки ги собереме ја добиваме равенката

$$(ab_1-a_1b)x=cb_1-c_1b\,.$$

Ако пак првата равенка ја помножиме со $-a_1$, а втората равенка ја помножиме со a и потоа ги собереме ја добиваме равенката

$$(ab_1-a_1b)x=ac_1-ca_1\,,$$

Односно го добиваме системот равенки

$$(ab_1-a_1b)x=cb_1-c_1b\,,$$

$$(ab_1-a_1b)x=cb_1-c_1b\,.$$

Ако сега за равенките во овој систем ги означиме детерминантите:

$$D=\begin{vmatrix} a & b\\ a_1 & b_1\end{vmatrix},\ D_x=\begin{vmatrix} c & b\\ c_1 & b_1\end{vmatrix},\ D_y=\begin{vmatrix} a & c\\ a_1 & c_1\end{vmatrix},(4)$$

тогаш тој преминува во системот:

$$Dx=D_x\,,\ Dy=D_y\,,\ (5)$$

кој директно е решлив, согласно равенката (2) и притоа важи следната дискусија за решавањето на системот:

1. За $D\neq 0$ системот има единствено рашение кое се добива со формулите:

$$x=\frac{D_x}{D}\cdot y=\frac{D_y}{D}\,.\ (6)$$

2. За $D=0$ и $D_x\neq 0$, или $D_y\neq 0$, системот нема решение.

3. За $D=0=D_x=D_y$, системот има бесконечно многу решенија.

Пример 3. Да се решат системите равенки:

$$3.1.\begin{cases}7x-6y=11\\ 5x+2y=33\end{cases},\qquad 3.2.\begin{cases}2x+y=5\\ 4x+2y=7\end{cases},\qquad 3.3.\begin{cases}2x-3y=4\\ 6x-9y=12\end{cases}.$$

Решение. 3.1. Соодветните детерминанти изнесуваат

$$D=\begin{vmatrix} 7 & -6\\ 5 & 2\end{vmatrix}=44\,,\ D_x=\begin{vmatrix} 11 & -6\\ 33 & 2\end{vmatrix}=220\,,\ D_y=\begin{vmatrix} 7 & 11\\ 5 & 33\end{vmatrix}=176\,.$$

Сега со замена во формулите (6) добиваме:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{220}{44}=5\,.\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{176}{44}=4\,.$$

3.2. За соодветните детерминанти добиваме:

$$D=\begin{vmatrix} 7 & -6\\ 5 & 2\end{vmatrix}=0\,,\ D_x=\begin{vmatrix} 11 & -6\\ 33 & 2\end{vmatrix}=3\,,\ D_y=\begin{vmatrix} 7 & 11\\ 5 & 33\end{vmatrix}=-6\,,$$

а тоа значи дека системот нема решение.

3.3. Сега за соодветните детерминанти се добива:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3\\ 6 & -9\end{vmatrix}=0\,,\ D_x=\begin{vmatrix} 4 & -3\\ 12 & -9\end{vmatrix}=0\,,\ D_y=\begin{vmatrix} 2 & 4\\ 6 & 12\end{vmatrix}=0\,,$$

а тоа значи дека системот има бесконечно многу решенија. Ако сега означиме $x=t$,добиваме $y=\frac{2t-4}{3}$, па за t било кој реален број се добива едно решение на системот равенки.

Забелешка 1. Со оглед на тоа што линеарната равенка со две непознати е аналитична репрезетација на права во рамнината добиваме дека геометриската интерпретација на решавањето на систем од две линеарни равенки со две непознати е следното:

1. Ако системот има единствено решение тогаш правите имаат една заедничка точка, односно се пресечни.

2. Ако системот има бесконечно многу решенија правите се поклопуваат.

3. Ако системот нема решение правите се паралелни.

Забелешка 2. Во практиката, посебно на техничките науки, често пати потребно е да се реши систем од три равенки со две непознати. Постапката за решавање на оваа задача е следната. Решаваме две било кои равенки како систем од две равенки со две непознати. Потоа, на таков начин добиеното решение, го заменуваме во третата равенка. Ако ја задоволува третата равенка тогаш тоа е решение на системот, ако пак не ја задовлува третата равенка тогаш системот нема решение.

Пример 4. За која вредност на параметарот k, системот од три равенки со две непознати има решение. Во потврден случај да се определи решението.

$$\begin{cases} 2x-3y=-1, \\ x+y=7, \\ x-y=k. \end{cases}$$

Решение. Решавајќи ги првите две равенки добиваме

$$x=4, y=3.$$

Со замена во третата равенка се добива $k=-1.$

Забелешка 3. Во математичката практика, а посебно низ практиката на техничките науки, често пати се бара да се реши систем од две равенки со три непознати.

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \end{cases}$$

Постапката за решавање на оваа задача е следната. Системот го решаваме како систем од две равенки со две непознати со тоа што третата непозната ја фиксираме (изедначуваме на t), а се во зависност од тоа која од следните три детерминанти од втор ред е различна од нула

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Притоа решението се добива во зависност од реалниот параметар t. Ако сите три детерминанти се еднакви на нула тогаш постои реален параметар m така што важи $a_{11} = ma_{21}, a_{12} = ma_{22}, a_{13} = ma_{23}$. Сега ако $b_1 = mb_2$, тогаш системот има бесконечно многу решенија кои се добиваат со формулите

$$x = u, \quad y = v, \quad z = \frac{b_1 - a_{11}u - a_{12}v}{a_{13}} \ .$$

Ако пак $b_1 \neq mb_2$, тогаш системот е противречен и нема решение.

Пример 5. Да се реши системот равенки:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5, \\ 5x - 2y - 5z = 3. \end{cases}$$

Решение. Ја проверуваме првата детерминанта $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 15 = -19 \neq 0$, значи системот има бесконечно многу решенија. СтаваЈќи $z = t$ го добиваме системот

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 + 2t, \\ 5x - 2y = 3 + 5t. \end{cases}$$

Со негово решавање добиваме

$$x = 1 + t, y = 1, z = t \ .$$

1.3. Детерминанти од трети ред

Нека се зададени деветте реални броеви (може да бидат и комплексни) наредени во низата

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} \, .$$

Деф.2. Бројот D, еднаков на

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{32}a_{21} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12} \, ,$$

а запишан во квадратната шема

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

се вика детерминанта од трети ред.

Броевите $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$, се елементи на детерминантата наредени во три редици и три колони. Првиот индекс ја означува редицата а вториот индекс ја означува колоната. Оската $a_{11} - a_{33}$ се вика главна дијагонала а оската $a_{13} - a_{31}$ се вика споредна дијагонала.

За погоре запишаниот број, вредност на детерминантата од трети ред, може да се забележи дека во секоја од тројките броеви (производи) од секоја редица (колона) има само по еден број и тие,производите, формирани се на следниот начин :

Со позитивен знак земени се прво производот на елементите од главната дијагонала, а потоа производите на елементите што се наоѓаат на темињата на триаголниците со едно теме во крајните елементи на споредната дијагонала останатите темиња во другите две редици. Со негативен знак се земени производот на елементите од споредната дијагонала и производите на елементите што се наоѓаат на темињата на триаголниците со едно теме во крајните елементи на главната дијагонала и останатите две темиња во другите две редици.

Да забележиме дека овој начин на пресметување на вредноста на детерминантата од трети ред познат е како правило на триаголници за пресметување на детерминантите од трети ред.

Ќе укажеме на уште еден начин за пресметување на детерминантите од трети ред познат како Сарусово правило. Тој се состои во следната постапка. На детерминантата одназад и се допишуваат првите две колони, потоа се сумираат производите на елементите кои лежат на линиите паралелни со главната дијагонала, со позитивен знак, а производите на елементите кои лежат на линиите паралелни со споредната дијагонала со негативен знак. На шемата подолу даваме илустрација на реализацијата на овоа правило.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{32}a_{21} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}\,.$$

Да забележиме дека за детерминантите од трети ред точни се шестте особини веќе докажани за детерминантите од втори ред. Подолу ќе докажеме уште две особини кои важат за детерминантите од трети ред формулирани како теореми. Прво ќе дефинираме една класа детерминанти од втори ред што се добива од детерминантата од трети ред.

Деф.3. Детерминантата од втори ред што се добива од детерминантата од трети ред со испуштање на елементите од i - тата редица и j- тата колона се вика минор за елементот a_{ij}, а бројот што се добива со множење на минорот за елементот a_{ij}, со $(-1)^{i+j}$, се вика алгебарски комплемент за елементот a_{ij} и се означува со A_{ij}.

Теорема 1. Елементите од една редица (колона) помножени со нивните алгебарски комплементи, а потоа тие производи собрани чинат збир еднаков на вредноста на детерминантата.

Доказ. Нека тргнеме од вредноста на детерминантата D зададена на почетокот и нека направиме групирање на собирците со цел да се извадат пред заграда елементите од првата редица. Имаме

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{32}a_{21} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}\,.$$

Ова значи точност на тврдењето за првата редица. На сличен начин се докажува точноста на тврдењето и за останатите две редици и три колони.

Теорема 2. Елементите од една редица (колона) помножени со соодветните алгебарски комплементи на елементите од друга редица (колона), потоа овие производи собрани чинат збир еднаков на нула.

Доказ. Нека елемнтите од првата редица ги помножиме со соодветните алгебарски комплементи на елементите од втората редица. Добиваме:

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} =$$

$$= a_{11}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= -\left[a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\right] =$$

$$= - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

од причини на особина 3. Слично се докажува точноста на тврдењето и во останатите единаесет случаи.

Забелешка 3. Теоремата 1 овозможува побрзо и полесно пресметување на детерминантите од трети ред а тоа е таканареченото правило за развивање на детерминантата по редица или колона притоа употребувајќи ја и особината 6 за добивање на две нули во некоја редица или колона.

Пример 6. Да се пресмета вредноста на детерминантата

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

Решение. За пресметување ќе ги искористиме особините 6 и 7. Имено со претходно додавање на елементите од првата редица на елементите од втората редица а потоа развивајќи ја новодобиената детерминанта по втората редица добиваме:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -2(5-8) = 6\,.$$

Пример 7. Да се докаже точноста на равенствата:

$$7.1)\quad \begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$7.2)\quad \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ a^2+x^2 & a^2+y^2 & a^2+z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = xy(y-x)+xz(x-z)+yz(y-z).$$

Упатство. За двете детерминанти прво една од колоните на пример третата да се помножи со -1 и да се додаде на другите две, а потоа да се реши новодобиената детерминанта согласно особината 7.

1.4. Примена на детерминантите од трети ред

Исто како и детерминантите од втор ред и детерминантите од трети ред се применуваат за решавање на линеарни системи од три равенки со три непознати. За таа цел да го разгледаме системот од три линеарни равенки со три непознати x, y, z.

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases} \quad (1)$$

Со D да ја означиме детерминантата од трети ред составена од коефициентите пред непознатите величини,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ако првата од равенките (1) ја помножиме со A_{11}, втората со A_{21}, а третата со A_{31} и потоа ги собереме новодобиените равенки се добива

$$(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31})x+(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31})y+$$
$$+(a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31})z=b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}.$$

Сега забележуваме дека збирот на производите пред непознатата x е согласен со особината 7 а збировите пред непознатите y и z се согласни со особината 8, па последната равенка, имајќи ја предвид ознаката

$$D_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

може да се запише како

$$Dx=D_x.$$

На сличен начин ако равенките ги помножиме со A_{12}, A_{22}, A_{23}, редоследно, а потоа ги собереме добиваме:

$$(a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32})x+(a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32})y+$$
$$+(a_{13}A_{12}+a_{23}A_{22}+a_{33}A_{32})z=b_1A_{12}+b_2A_{22}+b_3A_{32}.$$

За последната равенка применливи се причините од особините 7 и 8 па означувајќи

$$D_y=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},$$

ја добиваме равенката

$$Dy=D_y\,.$$

Ако постапката ја повториме уште еднаш множејќи ги равенките (1) соодветно со A_{13},A_{23},A_{33}, а потоа равенките ги собереме добиваме:

$$(a_{11}A_{13}+a_{21}A_{23}+a_{31}A_{33})x+(a_{12}A_{13}+a_{22}A_{23}+a_{32}A_{33})y+$$
$$+(a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33})z=b_1A_{13}+b_2A_{23}+b_3A_{33}$$

Односно ако означиме

$$D_z=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix},$$

ја добиваме равенката

$$Dz=D_z\,.$$

Со трите последнодобиени равенки системот (1) заправо е запишан во облик на три разрешиви равенки со иста величина D пред непознатата,

$$Dx=D_x\,,Dy=D_y\,,Dz=D_z\,.$$

За на ваков начин трансформираниот систем равенки ќе направиме слична дискусија како и за веќе разгледаниот систем од две равенки со две непознати величини. Да нагласиме дека вообичаено за D велиме дека е детерминанта на системот, а за D_x,D_y,D_z, велиме дека се детерминанти за непознатите x,y,z, соодветно.

Дискусија. 1) Ако $D\neq 0$, тогаш системот има единствено решение кое се добива со формулите :

$$x=\frac{D_x}{D},y=\frac{D_y}{D},z=\frac{D_z}{D}\,, \qquad (2)$$

познати како Крамерови правила.

2) Ако $D=0$ и барем една од детерминантите D_x,D_y,D_z, е различна од нула тогаш системот нема решение.

3) Ако $D=D_x=D_y=D_z=0$, и барем еден минор на детерминантата на системот е различен од нула тогаш една од равенките е последица на другите две односно се добива со множење на двете равенки со некои броеви и нивно собирање. За таквиот систем велиме дека е неопределен и

има бсконечно многу решенија кои се добиваат како решние на систем од две равенки со три непознати.

Без да се намали општоста овде ќе докажеме дека првата равенка е последица на втората и третата ако $A_{11} \neq 0$. За таа цел нека втората равенка ја помночиме со A_{21}, а третата со A_{31} и потоа нека ги собереме новодобиени те равенки. Имаме:

$$(a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31})x+(a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31})y+(a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31})z=b_2A_{21}+b_3A_{31}.$$

Последната равенка може да се запише во облик:

$$(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}-a_{11}A_{11})x+(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31}-a_{12}A_{11})y+$$
$$+(a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31}-a_{13}A_{11})=b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}-b_1A_{11}.$$

Од последната равенка со примена на особините 7 и 8 добиваме

$$-a_{11}A_{11}x-a_{12}A_{11}y\ \ -a_{13}A_{11}z=-b_1A_{11}.$$

Последната равенка заправо е првата помножена со $-A_{11}$, со што тврдењето го докажавме.

Сега, со оглед на направената претпоставка дека $A_{11} \neq 0$,фиксирајќи го $x=t$,можеме да го решиме системот како систем од две равенки со две непознати

$$\begin{cases} x=t, \\ a_{22}y+a_{23}z=b_2-a_{21}t, \\ a_{32}y+a_{33}z=b_{32}-a_{31}t. \end{cases}$$

4) Нека $D=D_x=D_y=D_z=0$, и сите минори на детерминантата на системот се еднакви на нула. Ако $a_{11} \neq 0$, постојат константи m и n така да важи

$$a_{21}=ma_{11}, a_{31}=na_{11}.$$

Разглдувајќи ги минорите што обврзно содржат елементи од првата колона на детерминантата на системот и имајќи го предвид фактот дека сите се еднакви на нула

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=0,$$

имајќи ги предвид последните релации добиваме:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ma_{11} & a_{22} \end{vmatrix}=0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ na_{11} & a_{32} \end{vmatrix}=0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ ma_{11} & a_{23} \end{vmatrix}=0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ na_{11} & a_{33} \end{vmatrix}=0,$$

односно се добива

$$a_{22}=ma_{12}, a_{23}=ma_{13}, a_{32}=na_{11}, a_{33}=na_{11},$$

што значи дека коефициентите пред непознатите величини од втората и тре тата равенка се пропорционални со соодветните коефициенти на првата равенка. Сега во зависност од коефициентите $b_1, b_2, b_3,$ има две можности за системот равенки:

4.1. Ако важи $b_2=mb_1$ и $b_3=nb_1$, тогаш втората и третата равенка се последици на првата равенка, односно добиени се од првата равенка со множење соодветно со коефициент m односно n. Јасно системот има бесконечно многу решенија кои се добиваат со формулите:

$$y=u, z=v, x=\frac{b_1-a_{12}u-a_{13}v}{a_{11}}. \quad (3)$$

каде u и v се реални параметри.

4.1. Ако пак важи $b_2 \neq mb_1$ или $b_3 \neq nb_1$, тогаш системот е противречен и нема решение.

Пример 8. Да се решат системите равенки:

$$7.1.\ \begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y+2z=5 \\ x+2y-z=2 \end{cases}, \qquad 7.2.\ \begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+2y+2z=5 \\ x+2y-z=2 \end{cases}.$$

Решение. За детерминантите на секој од системите равенки добиваме:

$$8.1.\ D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=1(1-4)-1(-1-2)+1(2+1)=3,$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=6(1-4)-1(-5-4)+1(10+2)=3,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=1(-5-4)-6(-1-2)+1(2-5)=6,$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=1(-2-10)-1(2-5)+6(2+1)=9,$$

следователно за непознатите добиваме $x=1, y=2, z=3$.

$$8.2.\ D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=1(-2-4)-1(-2-2)+1(4-2)=0,$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=6(-2-4)-1(-5-4)+1(10-4)=-21 \neq 0,$$

значи системот нема решение.

Пример 9. Да се реши и да се дискутира решавањето на системот од три линеарни равенки со три непознати ,

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+ay+(2a-2)z=a \\ 3x+(2a-1)y+7z=5 \end{cases},$$

по реалниот параметар a.

Решение. $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & a & 2a-2\\ 3 & 2a-1 & 7\end{vmatrix}=$

$=7a+6a-6+4a-2-3a-4a^2+6a-2-14=-4(a-2)(a-3)$,

$D_x=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & a & 2a-2\\ 5 & 2a-1 & 7\end{vmatrix}=$

$=7a+10a-10+2a^2-a-5a-7a-4a^2+6a-2=-2(a-2)(a-3)$,

$D_y=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & a & 2a-2\\ 3 & 5 & 7\end{vmatrix}=7a+6a-6+10-3a-14-10a+10=0$,

$D_z=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & a & a\\ 3 & 2a-1 & 5\end{vmatrix}=5a+4a-2+3a-3a-10-2a^2+a=-2(a-2)(a-3)$.

Сега јасно е дека детерминантата на системот различна е од нула ако $a\neq 2$ и $a\neq 3$, па во тој случај системот го има единственото решение $(x=\frac{1}{2}, y=0, z=\frac{1}{2})$.

За $a=2$, втората равенка се добива со множење на првата со 2 па во тој случај системот станува

$$\begin{cases}x+y+z=1\\ 3x+3y+7z=5\end{cases}$$

и има бесконечно многу решенија кои се добиваат со фиксирање на $x=t$, а потоа решавајќи како систем од две равенки со две непознати. Решението е

$$x=t, y=\frac{1-2t}{2}, z=\frac{1}{2}.$$

За $a=3$ го добиваме системот $\begin{cases}x+y+z=1\\ 2x+3y+4z=3\\ 3x+5y+7z=5\end{cases}$ за кој е очигледно дека минорот $A_{11}\neq 0$, па според тоа има бесконечно многу решенија. Фиксирајќи $x=t$, од првите две равенки добиваме

$$\begin{cases}y+z=1-t\\ 3y+4z=3-2t\end{cases}$$

односно $(x=t, y=1-2t, z=t)$.

Посебен интерес претставува системот равенки во кој десните страни се еднакви на нула познат како хомоген систем равенки

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=0 \end{cases} \quad (4)$$

за него јасно е дека $D_x = D_y = D_z = 0,$ па за $D \neq 0$, системот има единствено решение $x = y = z = 0$, познато како тривијално решение. Ако пак $D = 0$, тогаш системот има бесконечно многу решенија.

Пример 10 . Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+4y+2z=0 \\ 3x+7y+3z=0 \end{cases}.$$

Со проверка лесно утврдуваме дека $D = 0$, па фиксирајќи $z = t$, и решавајќи го системот по првите две равенки ги добиваме сите решенија на системот со $x = \frac{2}{5}t, y = -\frac{3}{5}t, z = t.$

1.5. Задачи за самостојно решавање

1. Да се докажат равенствата:

$a)\begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix} = (c-b)(a-d)$, $\quad b)\begin{vmatrix} x+1 & x+2 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix} = 2x+1$,

$c)\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x \\ \sin^2 y & \cos^2 y \end{vmatrix} = \sin(x+y)\sin(x-y)$, $\quad d)\begin{vmatrix} \sin\frac{x}{2} & -\sin\frac{x}{2} \\ \cos\frac{x}{2} & \cos\frac{x}{2} \end{vmatrix} = \sin x$.

2. Да се определат решенијата на равенките:

$a)\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$, $\quad b)\begin{vmatrix} x & 1 \\ x+1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$, $\quad c)\begin{vmatrix} 2\log x & 1-\log x \\ \log x & 1 \end{vmatrix} = 0$,

$d)\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$, $\quad e)\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 2 & x^2 \\ 1 & 3 & x^3 \end{vmatrix} = 0$, $\quad f)\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

3. Со помош на детерминанти да се решат следните системи линеарни равенки со две непознати и да се дискутираат во однос на фигурирачкиот параметар:

$a)\begin{cases} mx+y=1 \\ 4x+my=2 \end{cases}$, $\quad b)\begin{cases} (k+2)x+(k-7)y=7 \\ 4x-5y=8+k \end{cases}$.

4. Да се определат решенијата на линеарните системи од три равенки со три непознати:

$a)\begin{cases} 2x+3y+z=6 \\ 3x-y+z=3 \\ -x+2y+4z=5 \end{cases}$, $\quad b)\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+y+2z=3 \\ 3x+y-4z=-1 \end{cases}$, $\quad c)\begin{cases} 2x+3y+z=6 \\ 6x+9y+3z=6 \\ 2x+3y+z=6 \end{cases}$.

5. За која вредности на реалниот параметар k системот равенки има бесконечно многу решенија.

$$\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=k \\ x+y+kz=k^2 \end{cases}.$$

6. За кои вредности на реалниот параметар m системот равенки има решение различно од тривијалното.

$$a)\begin{cases} (4-m)x+2y=0 \\ 2x+(2-m)y=0 \end{cases}, \qquad b)\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+my+(2m-2)z=0 \\ 3x+(2m-1)y+13z=0 \end{cases}.$$

7. Да се реши системот равенки а потоа да се дискутира во зависност од реалниот параметар m.

$$a)\begin{cases} (4-m)x+2y=1 \\ 2x+(2-m)y=2 \end{cases}, \qquad b)\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 3x+my-mz=2m \\ x+(3m-2)y+(2m+1)z=0 \end{cases}.$$

2. ВЕКТОРСКА АЛГЕБРА

Математичката дисциплина која ги дефинира и изучува векторите, алгебарските операции со нив како и други операции, произлезени од потребите на физиката и техниката, се вика **Векторска алгебра** .

Во физиката и техниката воопшто се среќаваат величини за чие определување доволно е да се знае еден број кој го покажува односот на таа величина спрема прифатената единична мерка за неа. Таквите величини се викаат скаларни величини. Како примери за скаларни величини можеме да гиземеме должината на отсечка, плоштината на рамнинска геометриска фигура, волумен на геометриско тело, температурата на тело во даден момент, поминат пат што за одредено време го изминува пешак во движење и т.н.

2.1. Поим за вектор

Деф.1. Величините кои не можат да се определат со еден број, а за чие наполно определување се потребни уште два податоци, односно познавање на нивниот правец и насока, се викаат векторски величини, односно, вектори.

Такви се на пример сила која дејствува на тело , брзина со која се движи телото, забрзување и т.н.

Најдобрата претстава за векторите се добива преку нивната геометриска интерпретација како ориентирана отсечка $\overline{AB}$, а ги означуваме со $\overrightarrow{AB}$ ако се знае почетната и крајната точка или со $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и т.н.

Да кажеме нешто за тоа како е определен векторот на овој начин односно да ги опишеме неговите три карактеристики.

1) Големината на векторот $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ е растојанието од точката A до точката B и се означува со $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$ и се вика интензитет на векторот $\overrightarrow{AB}$.

2) правецот на векторот е зададен со правата (p) која минува низ точките A и B и се вика носач на векторот.

3) насоката на векторот е определена со стрелка што е поставена во завршната точка B на векторот $\overrightarrow{AB}$.

Вектор чиј интензитет е 1 се вика единичен вектор или орт, а векторот чиј интензитет е 0 се вика нулти вектор и неговиот правец е произволен, односно, тој е паралелен со секој вектор.

Единичниот вектор со еднакви правец и насока со векторот $\vec{a}$ обично се означува со $\overrightarrow{a_0}$, а нултиот вектор со $\vec{0}$.

Деф.2. За два вектори се вели дека се еднакви ако имаат еднакви интензитети, правци и насоки. Ако имаат само спротивни насоки тогаш велиме дека векторите се спротивни и пишуваме $\vec{a} = -\vec{b}$.

Во врска со дефиницијата за еднаквост на векторите тие можат да бидат слободни вектори, вектори врзани за права и вектори врзани за точка.

1) Слободни се векторите што имаат паралални носачи. Два такви вектори се еднакви ако правите што ги поврзуваат почетните точки и крајните точки се паралелни.

2) Врзани за права се векторите што имаат ист (заеднички) носач. Два такви вектори се едначви ако кога ќе ги доведеме векторите на ист почеток им се поклопуваат и завршоците. Овие вектори се викаат колинеарни вектори.

3) Вектори врзани за точка се со сит почеток. Два такви вектори се еднакви ако им се поклопуваат и завршоците.

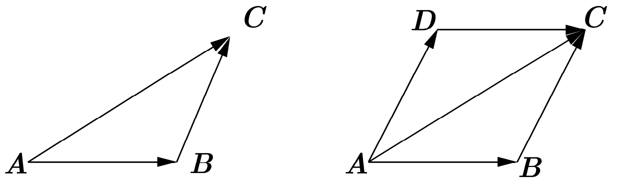
Понатаму векторите што ќе ги разгледуваме ќе бидат слободни вектори освен ако не е поинаку речено.

2.2. Собирање на вектори

Деф.3. Ако завршокот на векторот $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ се поклопува со почетокот на векторот $\vec{b}$, тогаш велиме дека векторот $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, со почеток во точката A на векторот $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и завршок во точката C на векторот $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, претставува збир на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и пишуваме

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Овој начин за собирање на вектори е познат како правило на триаголник. Илустрација сл.1.



сл.1 сл. 2

Од дефиницијата за еднаквост на слободните вектори можеме да забележиме (илустрација сл.2) дека векторот $\vec{c}$ е вектор дијагонала на паралелограмот $ABCD$.

Деф.4. Збирот на три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ кои не се од иста рамнина доведени на заеднички почеток O, значи $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, е векторот дијагонала $\vec{d} = \overrightarrow{OM}$, на паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$.

Деф.5. Под разлика на два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ може да се смета збирот на векторот $\vec{a}$ со векторот $-\vec{b}$ односно

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Теорема 1. За собирањето на вектори точни се особините:

1) Комутативност на собирањето: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

2) Асоцијативност на собирањето: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;

3) Нулата (нула векторот) е неутрален елемант на собирањето на вектори:

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a};$$

4) Спротивниот вектор е спротивен елемент на векторското собирање:

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}.$$

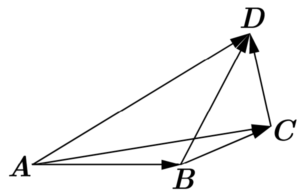
Доказ на 1). Согласно сл.2 имаме $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. Согласно правилото за собирање на вектори по триаголник од триаголниците ABC и ADC имаме:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b},\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{b}+\vec{a}.$$

А тоа значи точност на равенството 1).

Доказ на 2). Нека согласно сл.3 имаме $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$,

$$\vec{b}=\overrightarrow{BC},\ \vec{c}=\overrightarrow{CD}.$$



сл. 3

За левата страна на равенството 2) имаме:

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$$

За десната страна на равенството 2) имаме:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}.$$

А тоа значи точност на равенството 2).

Доказ на 3). Нека тргнеме од левата страна на равенството 3). Имаме:

$$\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}.$$

Што значи точност и на равенството 3).

Доказ на 4). Тргаме од левата страна:

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$$

Со што доказот е завршен.

2.3. Множење на вектор со скалар

Деф.6. Производ на вектор $\vec{a}$ со скалар λ претставува вектор $\vec{b}$ определен на следниот начин:

1) Векторот $\vec{b}$ има ист правец со векторот $\vec{a}$.

2) Интензитетот на векторот $\vec{b}$ е еднаков на производот $|\lambda||\vec{a}|$.

3) Насоката на векторот $\vec{b}$ еднаква е со насоката на векторот $\vec{a}$ за $\lambda>0$ и спротивна од насоката на векторот $\vec{a}$ за $\lambda<0$.

Забелешка 1. Делењето на векторот $\vec{a}$ со скаларот λ се сведува на множење на векторот $\vec{a}$ со скаларот $\frac{1}{\lambda}$, односно

$$\vec{a}:\lambda=\frac{1}{\lambda}\vec{a} \qquad (1)$$

За единичниот вектор $\overrightarrow{a_0}$ паралелен и со иста насока со векторот $\vec{a}$ сега можеме да докажеме дека се пресметува со формулата

$$\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} \qquad (2)$$

Имено согласно деф.6 имаме $\vec{a} = \lambda\overrightarrow{a_0}$ каде што $\lambda > 0$ и $|\vec{a}| = \lambda|\overrightarrow{a_0}|$ односно добиваме $\lambda = |\vec{a}|$, па во склад со равенството (1) се добива формулата (2).

Теорема 2. Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се паралелни вектори тогаш важи:

$$\vec{a} = \lambda\vec{b} \qquad (3)$$

Доказ. За секој вектор $\vec{b}$ согласно (2) важи:

$$\vec{b} = |\vec{b}|\overrightarrow{b_0} \qquad (\mathrm{I})$$

А од $\vec{a}$ паралелно со $\vec{b}$ следува дека $\vec{a}$ паралелно со $\overrightarrow{b_o}$, односно

$$\vec{a} = \pm|\vec{a}|\overrightarrow{b_0} \qquad (\mathrm{II})$$

Од равенствата (I) и (II) следува точност на равенството (3) при што за λ добиваме дека $\lambda = \pm\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$.

Теорема 3. За множење на вектор со скалар точни се следниве особини:

1) Особина за множење на вектор со два скалари:

$$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a};$$

2) Особина за множење на вектор со збир на два скалари:

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a};$$

3) Особина за множење на збир на два вектори со скалар:

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}.$$

Доказ на 1). Точноста на равенството е очигледна ако еден од скаларите λ или μ е нула или векторот $\vec{a}$ е нула вектор. Затоа нека претпоставиме дека сите се различни од нула и нека левата и десната страна на равенството ги означиме:

$$\overrightarrow{d_1} = \lambda(\mu\vec{a}),\ \overrightarrow{d_2} = (\lambda\mu)\vec{a}$$

Векторот $\overrightarrow{d_1}$ е определен со: $\left|\overrightarrow{d_1}\right| = |\lambda||\mu||\vec{a}|$, а правецот му е ист со правецот на $\vec{a}$, а за насоката треба да се разгледаат четирите можности:

1) за $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\overrightarrow{d_1}$ има иста насока со $\vec{a}$;

2) за $\lambda > 0$, $\mu < 0$, $\mu\vec{a}$ има спротивна насока со $\vec{a}$ па и $\overrightarrow{d_1}$ има спротивна насока со $\vec{a}$;

3) за $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\mu\vec{a}$ има иста насока со $\vec{a}$, а $\overrightarrow{d_1}$ има спротивна насока со $\vec{a}$;

4) за $\lambda < 0$, $\mu < 0$, $\mu\vec{a}$ има спротивна насока со $\vec{a}$, а $\overrightarrow{d_1}$ има спротивна насока со $\mu\vec{a}$, значи има иста насока со $\vec{a}$.

Значи насоката на $\overrightarrow{d_1}$ е иста со насоката на $\vec{a}$ ако λ и μ се со ист знак, а спротивна од насоката на $\vec{a}$ ако λ и μ се со спротивен знак.

Векторот $\overrightarrow{d_2}$ е определен со: $\left|\overrightarrow{d_2}\right|=|\lambda||\mu||\vec{a}|$, правецот му е еднаков со правецот на $\vec{a}$, а за насоката можеме да кажеме дека е иста со насоката на $\vec{a}$ ако $\lambda\mu>0$, а спротивна од насоката на $\vec{a}$ ако $\lambda\mu<0$. Од спроведената дисксија евидентно е дека векторите $\overrightarrow{d_1}$ и $\overrightarrow{d_2}$ се еднакви, односно дека е точно равенството 1).

Со слична дискусија се докажува и равенството **2)**.

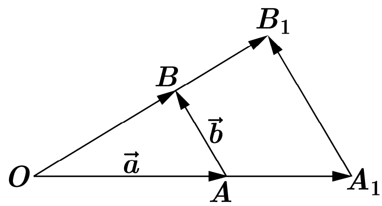
Доказ на 3). Очигледно дека ова равенство е точно ако еден од векторите $\vec{a}$ или $\vec{b}$ е нула вектор или ако скаларот $\lambda=0$. Затоа нека претпоставиме дека сите три величини се различни од нула. Има две можности: векторите да бидат колинеарни или да не се колинеарни. Ако векторите се колинеарни, тогаш имаме $\vec{b}=\mu\vec{a}$, па тргнувајќи од левата страна постепено добиваме:

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda(\vec{a}+\mu\vec{a})=\lambda(1+\mu)\vec{a}=(\lambda+\lambda\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+(\lambda\mu)\vec{a}=$$
$$=\lambda\vec{a}+\lambda(\mu\vec{a})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}.$$

Што значи точност на равенството во случај кога векторите се колинеарни.

Нека претпоставиме дека векторите не се колинеарни и дека $\lambda>0$. (Слично се постапува и за $\lambda<0$).

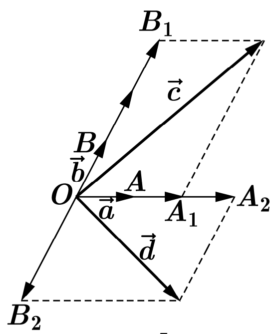
Нека означиме согласно сл. 4 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA_1}=\lambda\vec{a}$, $\overrightarrow{A_1B_1}=\lambda\vec{b}$. Од пропорцијата $\overline{OA_1}:\overline{OA}=\overline{A_1B_1}:\overline{AB}$ следува дела точките O,B и B_1 се колинеарни и согласно Талесовата теорема важи: $\overline{OB_1}=\lambda\overline{OB}$, односно важи равенството $\overrightarrow{OB_1}=\lambda\overrightarrow{OB}$, а од правилото за собирање на вектори по триаголник $\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}$. Со изедначување на десните страни на двете последни равенства добиваме $\lambda\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}$, односно добиваме $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$, со што доказот е завршен.



сл.4

Пример 1. Нека се зададени векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Да се определат векторите $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{d}=3\vec{a}-2\vec{b}$.

Решение. Нека е согласно сл.5 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. На правата OA ги определуваме векторите $2\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}$ и $3\vec{a}=\overrightarrow{OA_2}$, а на правата OB векторите $3\vec{b}=\overrightarrow{OB_1}$ и $-2\vec{b}=\overrightarrow{OB_2}$. Сега користејќи го правилото за собирање на вектори по паралелограм ги добиваме векторите $\vec{c}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}$ и $\vec{d}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OB_2}$.



сл. 5

Пример 2. Да се подели векторот $\vec{a}$ со векторот $\vec{b}$.

Решение. Согласно дефиницијата за множење на вектор со скалар делењето на векторите ќе биде можна операција ако тие два се колинеарни, односно ако $\vec{a} = m\vec{b}$ и во тој случај $\vec{a} : \vec{b} = m$. Ако векторите не се колинеарни, не може да се дели.

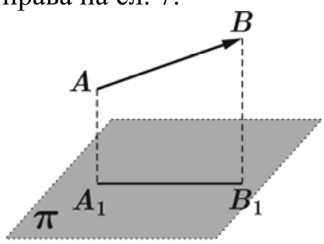
2.4. Проекција на вектор

Од причини пред сè на физика во смисла на определување на компоненти на сила, како за рамнинските, така и за просторните вектори, потребно е прецизно дефинирање на поимот проекција на вектор како врз рамнина така и врз права. Во таа смисла е следната дефиниција.

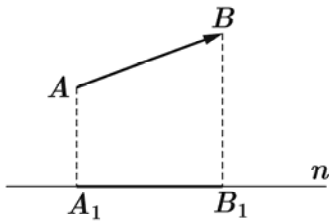
Деф.7. Проекција од векторот $\overrightarrow{AB}$ паралелно со правецот на векторот $\vec{a}$, врз рамнината π (правата p) претставува векторот $\overrightarrow{A_1B_1}$, чиј почеток е проекцијата од почетокот на векторот $\overrightarrow{AB}$, а завршок е проекцијата од завршокот на векторот $\overrightarrow{AB}$ и означуваме

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \text{ПР}_{\pi}\overrightarrow{AB} \,||\, \vec{a}\,,\ \overrightarrow{A_1B_1} = \text{ПР}_{p}\overrightarrow{AB} \,||\, \vec{a}\,.$$

Забелешка 2. Ортогонална проекција е проекцијата при која правецот на проектирањето е нормален на рамнината π (правата p). Понатаму ако поинаку не биде речено под проекција на вектор ќе подразбираме ортогонална проекција. Илустрација на дефиницијата за ортогонална проекција дадена е за рамнина на сл.6, а за права на сл. 7.

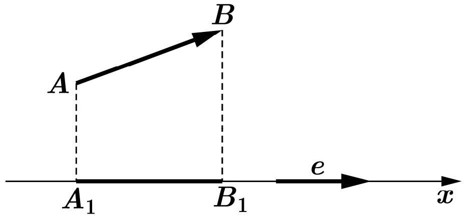


сл. 6



сл. 7

Ако сме во состојба за една права да кажеме која од две точки е претходна, а која наредна тогаш таа се вика ориентирана права или оска. Обично ориентираната права (оска) се окарактеризирува со еден единичен вектор $\vec{e}$.



сл. 8

Нека разгледаме еден вектор $\overrightarrow{AB}$ и дадена оска x чија насока е определана со единичниот вектор $\vec{e}$. Векторот $\overrightarrow{A_1B_1}$ кој е проекција од векторот $\overrightarrow{AB}$ врз оската x обично се вика компонента на векторот $\overrightarrow{AB}$ по x-оската. (Илустрација сл.8).

Јасно е дека компонентата може да има како иста така и спротивна насока со x-оската.

Деф.8. Проекција на векторот $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ на x-оската или проекција на векторот $\vec{a}$ врз векторот $\vec{e}$ се вика бројот определен со $\pm\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$ и означуваме $\mathbf{\Pi P}_{\vec{e}}\overrightarrow{AB}=\pm\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, при што се зема знакот + ако векторите $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\vec{e}$ имаат иста насока, а знакот – ако овие вектори имаат спротивна насока.

Деф.9. Под агол меѓу два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$, доведени на заеднички почеток, се подразбира помалиот од двата агли што тие ги образуваат.

Јасно е дека важи $\mathbf{\Pi P}_{\vec{e}}\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi$, кадешто $\varphi=\angle(\overrightarrow{AB},\vec{e})$ (Илустрација сл.8).

За $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$, векторите $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\vec{e}$ имаат иста насока .

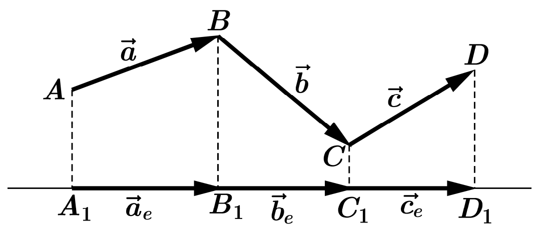
За $\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\pi$, векторите $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\vec{e}$ имаат спротивни насоки .

За $\varphi=\frac{\pi}{2}$, векторите $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\vec{e}$ се заемно нормални па $\mathbf{\Pi P}_{\vec{e}}\overrightarrow{AB}=0$, односно проекцијата е точка.

Теорема 4. Проекција од збир на вектори е збир од проекциите на векторите, односно точна е формулата:

$$\mathbf{\Pi P}_{\vec{e}}(\vec{a}+\vec{b}+....+\vec{c})=\mathbf{\Pi P}_{\vec{e}}\vec{a}+\mathbf{\Pi P}_{\vec{e}}\vec{b}+....+\mathbf{\Pi P}_{\vec{e}}\vec{c} \qquad (4)$$

Доказ. (геометриска илустрација за три вектори сл.9) Нека се дадени векторите $\vec{a},\vec{b},...,\vec{c}$ и оската x окарактеризирана со векторот $\vec{e}$. Векторите $\vec{a},\vec{b},...,\vec{c}$ и $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+...+\vec{c}$ имаат, во однос на векторот $\vec{e}$ компоненти соодветно $\vec{a}_e,\vec{b}_e,...,\vec{c}_e$ и $\vec{d}_e$ и притоа од дефиницијата за собирање на вектори важи



сл. 9

$\vec{d}_e=\vec{a}_e+\vec{b}_e+...+\vec{c}_e$, односно $\pm|\vec{d}_e|\vec{e}=(\pm|\vec{a}_e|\vec{e})+(\pm|\vec{b}_e|\vec{e})+...+(\pm|\vec{c}_e|\vec{e}$.

Последното равенство ако се подели со векторот $\vec{e}$ се добива скаларната равенка

$$\pm|\vec{d}_e|=(\pm|\vec{a}_e|)+(\pm|\vec{b}_e|)+...+(\pm|\vec{c}_e|),$$

којашто заправо е формулата (4) напишана со запис $\mathbf{\Pi P}_{\vec{e}}\vec{a}=\pm|\vec{a}|$.

2.5. Линеарна комбинација на вектори

Деф.10. Нека се дадени $n-$те вектори $\vec{a}_1, \overrightarrow{a_2},..., \overrightarrow{a_n}$ и $n-$те скалари $m_1, m_2, ..., m_n$, тогаш збирот

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\overrightarrow{a_2} + ... + m_n\overrightarrow{a_n}, \quad (5)$$

се вика линеарна комбинација на векторите $\vec{a}_1, \overrightarrow{a_2},..., \overrightarrow{a_n}$. А за даден вектор $\vec{a}$ кој може да се запише во видот

$$\vec{a} = m_1\vec{a}_1 + m_2\overrightarrow{a_2} + ... + m_n\overrightarrow{a_n}, \quad (6)$$

велиме дека е линеарна комбинација од векторите $\vec{a}_1, \overrightarrow{a_2},..., \overrightarrow{a_n}$.

Деф.11. Системот вектори $\vec{a}_1, \overrightarrow{a_2},..., \overrightarrow{a_n}$ велиме дека е линеарно зависен ако постојат скалари $m_1, m_2, ..., m_n$, не сите еднакви на нула такашто важи

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\overrightarrow{a_2} + ... + m_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0}. \quad (7)$$

Во спротивно за системот вектори велиме дека е линеарно независен.

Теорема 5. Два вектори се линеарно зависни тогаш и само тогаш кога се колинеарни.

Доказ. Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се линеарно зависни вектори, а тоа значи постојат скалари m и n така што важи $m\vec{a}+n\vec{b}=0$, при што еден од скаларите, на пример, $m \neq 0$. Тогаш делејќи со m добиваме: $\vec{a} = -\frac{n}{m}\vec{b}$. Последното равенство всушност е условот за колинеарност на двата вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

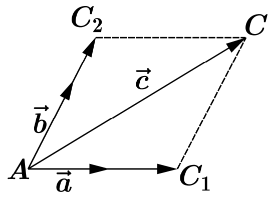
Обратно, нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни вектори. Односно важи $\vec{a} = \lambda\vec{b}$. Од последното равенство следува: $1\vec{a}+(-\lambda)\vec{b}=0$, кое всушност претставува равенството (7) за линеарна зависност на двата вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Со што теоремата е докажана.

Теорема 6. Три вектори се линеарно зависни ако се компланарни, односно ако лежат во иста рамнина.

Доказ. Нека векторите $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарно зависни, односно важи $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}=0$ и нека $\lambda \neq 0$, тогаш делејќи со λ добиваме: $\vec{a} = m\vec{b}+n\vec{c}$, каде што имаме означено $m = -\frac{\mu}{\lambda}$, $n = -\frac{\nu}{\lambda}$. Ако векторите $\vec{b}$ и $\vec{c}$ ги доведеме до заеднички почеток и ако низ нив повлечеме рамнина, тогаш и векторите $m\vec{b}$ и $n\vec{c}$ лежат во истата рамнина, па според тоа и нивниот збир т.е. векторот $\vec{a}$ ќе лежи во истата рамнина.

Обратно, нека векторите $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ се компланарни и нека ги доведеме до заеднички почеток во иста точка O. (Илустрација сл.10). Нека е согласно сл.10 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Ако е $\overrightarrow{OC_1} = \mathbf{\Pi P}_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OC} \,||\, \overrightarrow{OB}$ и

$\overrightarrow{OC_2}=\text{ПР}_{\overline{OB}}\overrightarrow{OC}\,||\,\overrightarrow{OA}$, тогаш по правилото за собирање на вектори по паралелограм добиваме $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OC_2}$, а од теорема 2 имаме $\overrightarrow{OC_1}=\alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{OC_2}=\beta\vec{b}$. Сега заменувајќи во погорното равенство добиваме $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, а тоа поинаку запишано е $1\vec{c}+(-\alpha)\vec{a}+(-\beta)\vec{b}=\mathbf{0}$, а тоа е всушност равенството (7) за линеарна зависност на три вектори.



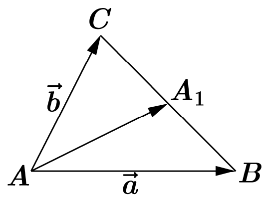
сл. 10

Забелешка 3. Оваа теорема ја обезбедува можноста секој вектор од рамнината да може да се запише како линеарна комбинација од било кои два неколинеарни вектори.

Пример 3. Векторот положен на тежишната линија AA_1 на триаголникот ABC да се напише како линеарна комбинација на векторите $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

Решение. (Илустрација сл.11) За векторите положени на страните и делови од страните на триаголникот имаме

$$\overrightarrow{BA_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a}),$$
$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1}=\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{a}).$$

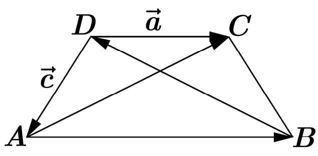


сл. 11

Пример 4. На страните и дијагоналите на рамнокрак трапез со должина на кракот c и помала основа со должина a и поголема основа со должина $2a$ положени се вектори. Ако се познати векторот поставен на помалата основа и на еден од краците, тогаш преостанатите вектори да се напишат како линеарни комбинации од овие два вектори.

Решение. (Илустрација сл.12) Нека се зададени векторите $\overrightarrow{DC}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{DA}=\vec{c}$. Сега за останатите вектори согласно сл.12 добиваме:

$$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}=2\vec{a},\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=-\vec{c}+\vec{a},$$
$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=-2\vec{a}-\vec{c}$$
$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-2\vec{a}-\vec{c}+\vec{a}=-\vec{a}-\vec{c}$$



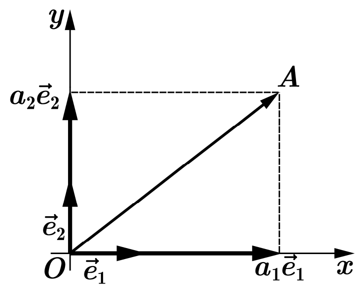
сл. 12

Забелешка 4. Претходната теорема овозможува дефинирање на координатен систем во рамнината. Тоа се прави на следниот начин.

Нека $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ се два взаемно нормални единични вектори што ги окарактеризуваат оските x и y кои се сечат во точката O.

Јасно е дека векторот $\overrightarrow{OA}$ (види сл.13) може да се запише како линеарна комбинација од векторите $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$, односно $\overrightarrow{OA}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$, при што a_1 и

a_2 се компоненти на векторот $\vec{a}$ во однос на x-оската и y-оската соодветно. Исто така a_1 и a_2 ги викаме координати на векторот $\overrightarrow{OA}$ во однос на координатниот систем Oxy. Векторот $\overrightarrow{OA}$ се вика радиус вектор (вектор на положбата) на точката A. Јасно е дека точката A за координати ги има координатите на својот радиус вектор. Единичните вектори што определуваат еден координатен систем во рамнина обично се означуваат со $\vec{i}$ за x-оската и $\vec{j}$ за y-оската.



сл. 13

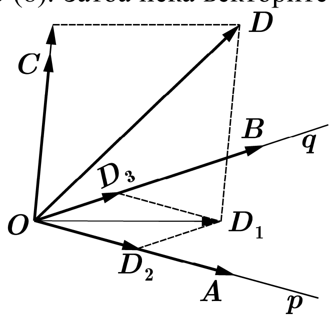
Деф.12. Координатниот систем се вика со десна ориентација ако при ротација на x-оската, спротивно од движењето на часовната стрелка, до поклопување со y-оската помине агол од 90^o.

Теорема 7. Четири вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ секогаш се линеарно зависни, односно четвртиот вектор може да се запише како линеарна комбинација од останатите три. На пример,

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \qquad (8)$$

Доказ. Ако векторите се компланарни, јасно дека се линеарно зависни (тоа е согласно теорема 6) и дека е задоволено равенството (8). Затоа нека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се некомпланарни и нека четирите вектори ги доведеме до заеднички почеток O. Сега нека е $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ и $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$. (Илустрација сл.14)

Со π да ја означиме рамнината определена со векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и со p и q носачите на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ако точките D_1, D_2 и D_3 се определени со $\overrightarrow{OD_1} = \Pi\text{P}_\pi \overrightarrow{OD} \,||\, \vec{c}$, $\overrightarrow{OD_2} = \Pi\text{P}_p \overrightarrow{OD_1} \,||\, \vec{b}$, $\overrightarrow{OD_3} = \Pi\text{P}_q \overrightarrow{OD_1} \,||\, \vec{a}$, тогаш согласно дефиницијата



сл. 14

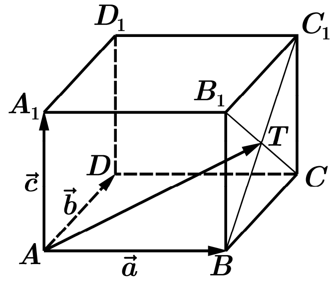
за колинеарност важи $\overrightarrow{OD_2} = \lambda\vec{a}$, $\overrightarrow{OD_3} = \mu\vec{b}$, $\overrightarrow{D_1D} = \nu\vec{c}$ и во согласност со деф.3 се добива $\overrightarrow{OD} = \vec{d} = \overrightarrow{OD_2} + \overrightarrow{OD_3} + \overrightarrow{D_1D} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$. Што значи точност на равенството (8).

Останува да докажеме дека разложувањето на векторот $\vec{d}$ со равенството (8) е единствено. За таа цел нека претпоставиме дека има две такви разложувања $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ и $\vec{d} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c}$. Со изедначување на десните страни се добива $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c}$, од што следува $(\alpha - \alpha_1)\vec{a} + (\beta - \beta_1)\vec{b} + (\gamma - \gamma_1)\vec{c} = 0$ што значи линеарна зависност на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, но тоа не е можно со оглед на тоа што $\alpha-\alpha_1\neq 0$. Со тоа теоремата е докажана.

Забелешка 5. Теоремата всушност овозможува секој вектор од просторот да се претстави како линеарна комбинација на било кои три некомпланарни вектори.

Пример 5. На квадарот $ABCDA_1B_1C_1D_1$ положени се векторите $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AA_1}$. Ако T е пресекот на BC_1 и B_1C да се претстави векторот $\overrightarrow{AT}$ како линеарна комбинација од векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Решение. (Илустрација сл.15)

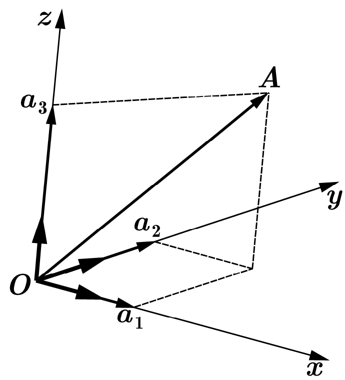


сл. 15

Да забележиме дека $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $2\overrightarrow{BT}=\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}=\vec{b}+\vec{c}$. Сега за векторот $\overrightarrow{AT}$ добиваме $\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BT}=\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

Забелешка 6. Претходната теорема овозможува дефинирање на координатен систем во просторот. Тоа ќе го направиме на следниот начин. Нека $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ се заемно нормални ортови кои ги окарактеризираат оските x, y, z, а кои се сечат во точката O. За било кој вектор $\overrightarrow{OA}$ во согласност со равенството (8) добиваме: (илустрација на сл.16)

$$\overrightarrow{OA}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k} \qquad (9)$$



сл. 16

Притоа за компонентите a_1, a_2, a_3 на векторот $\overrightarrow{OA}$ во однос на оските x, y и z соодветно велиме дека се координати на векторот $\overrightarrow{OA}$ во координатниот систем $Oxyz$. За векторот $\overrightarrow{OA}$ велиме дека е радиус вектор, односно вектор на положбата на точката A. Од дефиницијата за еднаквост на векторите врзани за точка јасно е дека векторите на положбата се единствени и дека координатите на точката A се координатите на нејзиниот радиус вектор. Освен записот (9) за векторот $\overrightarrow{OA}$, зададен со неговите координати, ќе го користиме и записот:

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a}=(a_1,a_2,a_3) \qquad (9^*)$$

За точката A дадена со координатите ќе го користиме записот $A(a_1,a_2,a_3)$.

Теорема 8.

а) Два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ зададени со своите координати се собираат на тој начин што се собираат нивните координати.

б) Вектор се множи со скалар ако се помножат неговите координати.

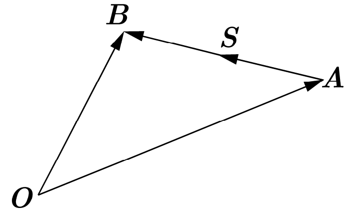
Доказ. Нека $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, тогаш за збирот на векторите имаме:

$$\vec{a}+\vec{b}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}+b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}=(a_1+b_1)\vec{i}+(a_2+b_2)\vec{j}+(a_3+b_3)\vec{k}=$$
$$=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$$

За производот се добива:

$$\lambda\vec{a}=\lambda(a_1,a_2,a_3)=\lambda(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})=\lambda a_1\vec{i}+\lambda a_2\vec{j}+\lambda a_3\vec{k}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$$

Забелешка 7. Координатите на векторот со почеток во точката $A(a_1,a_2,a_3)$ и завршок во точката $B(b_1,b_2,b_3)$ може да се определат како координати на векторот разлика од радиус векторот на точката A и радиус векторот на точката B. (Илустрација сл.17)



сл. 17

Добиваме $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$

Забелешка 8. Во смисла на еднаквост на два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ зададени со своите координати $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ забележуваме дека се:

а) Еднакви ако им се еднакви соодветните координати:

$$a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3.$$

б) Колинеарни ако соодветните координати им се пропорционални:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3} \qquad (10)$$

Деф.13. За координатниот систем $Oxyz$ велиме дека е со десна ориентација ако, при ротација на x-оската околу z-оската до поклопување со y-оската, поминеме агол од 90^o, а притоа гледано од позитивната насока на z-оската се движиме спротивно од движењето на часовната стрелка.

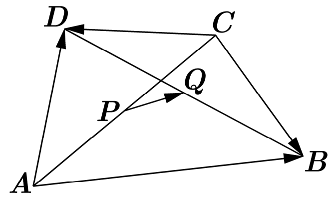
Пример 6. Нека за четириаголникот $ABCD$ точките P и Q се средини на дијагоналите $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ соодветно. Да се провери точноста на равенството:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{PQ}$$

Решение. Од илустрацијата на сл.18 за векторите од левата страна на равенството имаме:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QD}\,,\ \ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QB}\,,$$
$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QD}\,,\ \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QD}\,.$$

Имајќи во предвид дека $\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{CP}$ и $\overrightarrow{QB}=-\overrightarrow{QD}$ со собирање на добиените равенки се добива точноста на равенството.



сл. 18

Пример 7. Да се определат координатите на средната точка S на отсечката $\overline{AB}$: $[A(3,6,8),B(-1,2,-4)]$.

Решение. Нека $S(x,y,z)$ согласно сл.17 и забелешката 8 за еднаквост на два вектори имаме: $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{SB}$ односно

$$(x-3,y-6,z-8)=(-1-x,2-y,-4-z)\,,$$
$$x-3=-1-x\,,\ y-6=2-y\,,\ z-8=-4-z$$
$$2x=2\,,\ 2y=8\,,\ 2z=4\,,\ (x=1,y=4,z=2)\,.$$

Пример 8. Векторот $\vec{d}=(0,8,3)$ да се напише како линеарна комбинација од векторите $\vec{a}=(1,2,-1)$, $\vec{b}=(2,-2,3)$ и $\vec{c}=(-2,3,1)$.

Решение. Да се реши оваа задача значи да се определат скаларите x, y и z така што ќе важи

$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{d}\,,$$

од што следува

$$x(1,2,-1)+y(2,-2,3)+z(-2,3,1)=(0,8,3)\,.$$

Согласно теорема 8 се добива

$$(x+2y-2z,2x-2y+3z,-x+3y+z)=(0,8,3)\,,$$

а од еднаквоста на векторите следува системот од трите равенки

$$x+2y-2z=0\,,\ 2x-2y+3z=8\,,\ -x+3y+z=3\,.$$

Решение на системот е

$$(x=2,y=1,z=2)\,.$$

Пример 9. Провери дали системот вектори $\vec{a}=(-3,2,5)$, $\vec{b}=(4,-6,-2)$, $\vec{c}=(-2,2,8)$ е линеарно зависен. Во потврден случај определи ја линеарната зависност.

Решение. За системот вектори да биде линеарно зависен треба да постојат скалари x, y, z, не сите еднакви на нула така што важи

$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=0$$

од што следува

$$x(-3,2,5)+y(4,-6,-2)+z(-2,-2,8)=(0,0,0)\,,$$
$$(-3x+4y-2z,2x-6y-2z,5x-2y+8z)=(0,0,0)\,,$$

а од еднаквоста на векторите следува хомогениот систем од трите равенки

$$-3x+4y-2z=0\,,\ 2x-6y-2z=0\,,\ 5x-2y+8z=0\,.$$

За тој да има нетривијално решение треба детерминантата на системот да биде еднаква на нула, односно

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 2 & -6 & -2 \\ 5 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 0\,,\ -3(-48-4)-4(16+10)-2(-4+30)=156-156=0$$

За определување на едно нетривијално решение можеме да фиксираме $z=1$, па системот станува $-3x+4y=2$, $2x-6y=2$. Негово решение е $x=-2, y=-1$, па линеарната зависност гласи

$$-2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=0\,.$$

2.6. Скаларен производ

Во физиката се среќеваат случаи кога при определена постапка од две векторски величини се добива скаларна или векторска величина. Таквата постапка обично се вика скаларен производ ако новодобиената величина е скаларна, или векторски производ ако новодобиената величина е векторска.

Деф.14. Под агол меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ доведени до заеднички почеток, се подразбира помалиот од аглите што ги образуваат овие два вектори и пишуваме

$$\varphi = \angle(\vec{a},\vec{b})\,.$$

Од дефиницијата е јасно дека $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \angle(\vec{b},\vec{a})$ и дека $0 \le \varphi \le \pi$.

Деф.15. Скаларен производ меѓу два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ претставува скаларот $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$.

Обично се означува со $(\vec{a},\vec{b})$ или $\vec{a}\vec{b}$. Овде ќе ја користиме втората ознака. Значи имаме:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \qquad (11)$$

Бидејќи $|\vec{b}|\cos\varphi = \mathbf{\Pi P}_{\vec{a}}\vec{b}$ и $|\vec{a}|\cos\varphi = \mathbf{\Pi P}_{\vec{b}}\vec{a}$ за скаларниот производ ги имаме и следните формули:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\mathbf{\Pi P}_{\vec{a}}\vec{b} \text{ и } \vec{a}\vec{b} = |\vec{b}|\mathbf{\Pi P}_{\vec{b}}\vec{a}$$

Како директна последица од дефиницијата на скаларниот производ за него важи:

1) $-|\vec{a}||\vec{b}| \le \vec{a}\vec{b} \le |\vec{a}||\vec{b}|$, затоа што $-1 \le \cos\varphi \le 1$;

2) Ако $\vec{a}=\vec{b}$ тогаш добиваме $|\vec{a}|^2 = \vec{a}\vec{a}$, односно $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}}$;

3) Скаларниот производ е нула ако еден од векторите $\vec{a}$ или $\vec{b}$ е нула или ако векторите се заемно нормални.

Доказ. Од $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = 0$ следува дека $|\vec{a}| = 0$ или $|\vec{b}| = 0$ или $\cos\varphi = 0$, односно $\varphi = 90^o$.

Понатаму како услов за нормалност на два вектори ќе важи нивниот скаларен производ да е нула, односно $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = 0$.

4) Скаларното множење на вектори е комутативно, односно скаларниот производ е комутативна операција: $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$. Точноста на тврдењето следува од фактот $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \angle(\vec{b},\vec{a})$.

5) Множењето со скалар е асоцојативно односно

$$\lambda(\vec{a}\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\lambda\vec{b})$$

Доказ. Доволно е да го докажеме првото равенство бидејќи $\angle(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \angle(\vec{a},\lambda\vec{b}) = \varphi_1$. За овој агол имаме:

За $\lambda > 0$, $\varphi_1 = \varphi$, па јасно дека за овој случај равенството е точно.

За $\lambda < 0$, $\varphi_1 = \pi - \varphi$, па за средниот скаларен производ добиваме:

$(\lambda\vec{a})\vec{b} = |\lambda||\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi-\varphi) = -|\lambda||\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = \lambda|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = \lambda(\vec{a}\vec{b})$.

6) Скаларното множење на вектори е дистрибутивна операција во однос на собирањето, односно

$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}.$$

Доказ. Нека тргнеме од левата страна на равенството

$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\,\mathbf{ПР}_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|(\mathbf{ПР}_{\vec{a}}\vec{b} + \mathbf{ПР}_{\vec{a}}\vec{c}) = |\vec{a}|\,\mathbf{ПР}_{\vec{a}}\vec{b} + |\vec{a}|\,\mathbf{ПР}_{\vec{a}}\vec{c} = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$.

7) За скаларниот производ на ортовите $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, согласно дефиницијата за скаларен производ добиваме: $\vec{i}\vec{i} = \vec{j}\vec{j} = \vec{k}\vec{k} = 1$, $\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{i} = 0$.

8) Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се зададени со своите координати $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ тогаш точни се формулите:

а) $\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ (12)

Скаларниот производ е збир од производите на соодветните координати (аналитичен израз на скаларниот производ).

б) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ (13)

Интензитетот н векторот е еднаков на квадратен корен од збирот на квадратите на неговите координати.

Доказ.

а) Имаме $\vec{a}\vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})\,(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) =$

$= a_1b_1\vec{i}\vec{i} + a_1b_2\vec{i}\vec{j} + a_1b_3\vec{i}\vec{k} + a_2b_1\vec{j}\vec{i} + a_2b_2\vec{j}\vec{j} + a_2b_3\vec{j}\vec{k} + a_3b_1\vec{k}\vec{i} + a_3b_2\vec{k}\vec{j} +$

$+ a_3b_3\vec{k}\vec{k} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

б) е директна последица на случајот а) ако замениме $\vec{b} = \vec{a}$.

Посебно да забележиме дека условот за нормалност на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ зададени со нивните координати со оглед на формулата (12) ќе биде:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0 \qquad (14)$$

9) За определување на аголот меѓу два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ од дефиницијата на скаларниот производ добиваме:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \qquad (15)$$

Со оглед на претходната особина имаме:

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \qquad (15^*)$$

10) Ако α, β и γ се аглите што векторот $\vec{a}$ ги гради со координатните оски, тогаш точна е формулата:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (16)$$

Доказ. Ако во релацијата (15*) наместо координатите на векторот $\vec{b}$ последователно ги замениме координатите на единичните вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, ги добиваме косинусите од аглите α, β и γ соодветно:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},\ \cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},\ \cos\gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Со замена на последните вредности за косинусите во левата страна на (16) се добива десната страна.

Пример 10. Нека за векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се знае дека $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ и $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 60^o$. Да се пресмета скаларниот производ на векторите $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{d} = -\vec{a} + 2\vec{b}$.

Решение. $\vec{c}\vec{d} = (2\vec{a} + 3\vec{b})\,(-\vec{a} + 2\vec{b}) = -2\vec{a}\vec{a} - 3\vec{b}\vec{a} + 4\vec{a}\vec{b} + 6\vec{b}\vec{b} =$

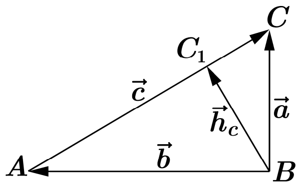
$$= -2|\vec{a}|^2 + 6|\vec{b}|^2 + |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^o = -2 + 24 + 1 = 23$$

Пример 11. Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се зададени со $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n} + \alpha\vec{p}$. За која вредност на реалниот параметар α векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се заемно нормални ако $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$, $|\vec{p}| = 3$ и векторите $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$ се заемно нормални.

Решение. Бидејќи $\vec{m} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{m}\vec{n} = 0$, $\vec{m} \perp \vec{p} \Rightarrow \vec{m}\vec{p} = 0$, $\vec{n} \perp \vec{p} \Rightarrow \vec{n}\vec{p} = 0$

Од $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = 0$, односно $(\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p})(\,2\vec{m} - \vec{n} + \alpha\vec{p}) = 0$. Од тука следува: $2|\vec{m}|^2 - 2|\vec{n}|^2 - 3\alpha|\vec{p}|^2 = 0$, 2-8-27$\alpha = 0$, $\alpha = -\frac{2}{9}$.

Пример 12. На катетите на еден правоаголен триаголник положени се векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Векторот положен на висината на овој триаголник да се напише како линеарна комбинација од овие два вектори.



сл. 19

Решение. (Илустрација сл.19). Нека означиме $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BA}=\vec{b}$. Јасно е дека $\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\vec{b}=0$, $\overrightarrow{h_c}\perp\vec{c}\Rightarrow\overrightarrow{h_c}\vec{c}=0$ и $\vec{c}=\overrightarrow{CA}=\vec{b}-\vec{a}$. За векторот $\overrightarrow{h_c}$ точна е репрезентацијата $\overrightarrow{h_c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ за не-кои вредности на реалните параметри m и n. Бидејќи $\overrightarrow{h_c}=\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{a}+\lambda\overrightarrow{CA}=\vec{a}+\lambda(\vec{b}-\vec{a})=(1-\lambda)\vec{a}+\lambda\vec{b}$ значи $m=1-\lambda$, $n=\lambda$.

Од $\overrightarrow{h_c}\perp\vec{c}\Rightarrow\big((1-\lambda)\vec{a}+\lambda\vec{b}\big)(\vec{b}-\vec{a})=0$, $-(1-\lambda)a^2+\lambda b^2=0$.

Добиваме $\lambda=\dfrac{a^2}{a^2+b^2}$, односно $\overrightarrow{h_c}=\dfrac{b^2}{a^2+b^2}\vec{a}+\dfrac{a^2}{a^2+b^2}\vec{b}$.

2.7. Векторски производ

Деф.16. Векторски производ на два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ претставува векторот $\vec{c}$ определен со:

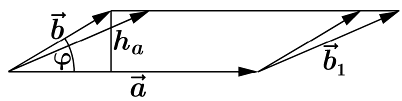
1) Има интензитет $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$ (17)

2) Правецот на векторот $\vec{c}$ е таков што тој е нормален на двата вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) Насоката на векторот $\vec{c}$ е определена со тоа што тројката вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е десна тројка вектори.

Векторскиот производ вообичаено е да се означува со $\vec{a}\times\vec{b}$ или $[\vec{a},\vec{b}]$. Ние овде ќе ја користиме првата ознака.

Да ги одбележиме прво оние особини на векторскиот производ кои се директна последица на дефиницијата. Имено, ако го имаме во вид паралелограмот формиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (види сл. 20) односно $\vec{a}$ и $\overrightarrow{b_1}$, а со оглед на тоа што $h_a=|\vec{b}|\sin\varphi$ и $h_a=|\overrightarrow{b_1}|\sin\varphi_1$, ја добиваме точноста на особините:



сл. 20

1) Плоштината на паралелограмот формиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ еднаква е на интензитетот на векторскиот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Доказ. Имаме $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=|\vec{a}|h_a=P$

2) Вредноста на векторскиот производ $|\vec{a}\times\vec{b}|$ не се менува ако наместо векторот $\vec{b}$ се земе друг вектор $\vec{b_1}$ чиј завршок се наоѓа на правата која е паралелна со векторот $\vec{a}$ и минува низ завршокот на векторот $\vec{b}$, т.е.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{b_1}=\vec{a}\times\vec{h_a}.$$

Доказ. Нека е $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{c_1}=\vec{a}\times\vec{b_1}$, $\vec{c_2}=\vec{a}\times\vec{h_a}$. Бидејќи векторите $\vec{a},\vec{b},\vec{b_1},\vec{h_a}$, се компланарни следува дека векторите $\vec{c},\vec{c_1},\vec{c_2}$, се нормални на рамнината во која лежат векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, односно се паралелни, имаат ист носач. Понатаму од тоа што тројките вектори $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, $(\vec{a},\vec{b},\vec{c_1})$, $(\vec{a},\vec{b},\vec{c_2})$ се десни тројки вектори следува дека векторите $\vec{c},\vec{c_1},\vec{c_2}$, имаат иста насока . За интензитетите на овие вектори добиваме: $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=|\vec{a}|h_a=|\vec{c_2}|$, $|\vec{c_1}|=|\vec{a}||\vec{b_1}|\sin\varphi_1=|\vec{a}|h_a=|\vec{c_2}|$. Значи добивме $\vec{c},\vec{c_1},\vec{c_2}$, се еднакви вектори.

3) Векторскиот производ на ненултите вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е нула ако тие се колинеарни.

Доказ. Од $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b_1}|\sin\varphi=0$ следува $|\vec{a}|=0$ или $|\vec{b}|=0$ или $\sin\varphi=0$. Бидејќи $|\vec{a}|\neq 0$ и $|\vec{b}|\neq 0$, останува $\sin\varphi=0$, односно $\varphi=0$ или $\varphi=\pi$. А тоа значи колинеарност на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4) За векторскиот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ точен е законот за алтерација т.е. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

Доказ. Нека $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$ и $-\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{c_1}$.

Тогаш $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=|\vec{b}||\vec{a}|\sin\varphi=|\vec{b}\times\vec{a}|=|c_1|$, а бидејкки и двата се нормални на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следува дека имаат ист правец. Тројката вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ е со десна ориентација, а исто така и тројката вектори $\vec{b},\vec{a},\vec{c_1}$. Додека тројката вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c_1}$ е со лева ориентација значи $\vec{c}$ и $\vec{c_1}$ имаат спротивни насоки, односно $\vec{c}=-\vec{c}_1$.

5) За векторскиот производ важи таканаречен асоцијативен закон за множење со скалар:

$$\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b}),$$

односно скаларот множител на еден од векторите може да се извади предзнакот за векторски производ.

Доказ. Треба да докажеме дека векторите $\vec{c_1}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$, $\vec{c_2}=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$, $\vec{c_3}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$, имаат еднакви правци, интензитети и насоки.

- Дискусија за правците. Векторите $\vec{a}, \vec{b}, \lambda\vec{a}, \lambda\vec{b}$ се компланарни, па според тоа векторите $\vec{c_1}, \vec{c_2}, \vec{c_3}$, како векторски производ од нив се паралелни, односно имаат еднакви правци.

- Дискусија за интензитетите. Нека $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$. За $\lambda > 0$ векторите $\vec{a}$ и $\lambda\vec{a}$ односно $\vec{b}$ и $\lambda\vec{b}$ имаат иста насока, па според тоа и за аглите меѓу нив важи $\angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{a}, \lambda\vec{b}) = \varphi$. А за $\lambda < 0$ векторите $\vec{a}$ и $\lambda\vec{a}$ односно $\vec{b}$ и $\lambda\vec{b}$ имаат спротивни насоки, па според тоа и за аглите меѓу нив важи $\angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{a}, \lambda\vec{b}) = \pi - \varphi$. Сега за интензитетите на овие три вектори, со оглед на равенството $\sin\varphi = \sin(\pi - \varphi)$:

  а) За $\lambda > 0$, $|\vec{c_1}| = |\lambda(\vec{a} \times \vec{b})| = \lambda|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, $|\vec{c_2}| = |(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}| = \lambda|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, $|\vec{c_3}| = |\vec{a} \times (\lambda\vec{b})| = \lambda|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$. Значи за овој случај интензитетите на овие три вектори се еднакви.

  б) За $\lambda < 0$, $|\vec{c_1}| = |\lambda(\vec{a} \times \vec{b})| = |\lambda||\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$,

$$|\vec{c_2}| = |(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}| = |\lambda||\vec{a}||\vec{b}|\sin(\pi - \varphi) = |\lambda||\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi,$$

$$|\vec{c_3}| = |\vec{a} \times (\lambda\vec{b})| = |\lambda||\vec{a}||\vec{b}|\sin(\pi - \varphi) = |\lambda||\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi.$$

И за овој случај интензитетите се еднакви, па според тоа трите вектори имаат еднакви интензитети.

- Дискусија за насоките.

  а) За $\lambda > 0$ тројките вектори $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c_1})$, $(\lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{c_2})$, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c_2})$, $(\vec{a}, \lambda\vec{b}, \vec{c_3})$, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c_3})$ се со десна ориентација. Значи за $\lambda > 0$ векторите $\vec{c_1}, \vec{c_2}, \vec{c_3}$ имаат иста насока.

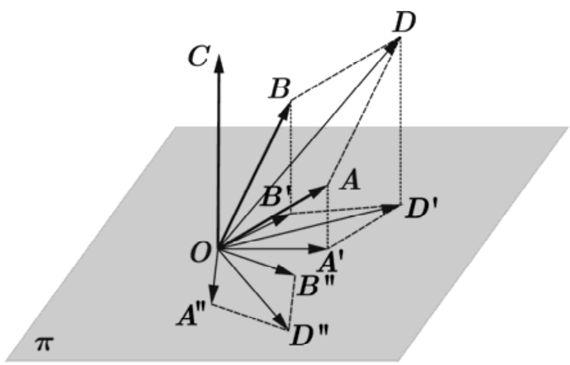
  б) За $\lambda < 0$ тројките вектори $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$, $(\lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{c_2})$, $(\vec{a}, \lambda\vec{b}, \vec{c_3})$ се со десна ориентација, а тројките вектори $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c_1})$, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c_2})$, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c_3})$ се со лева ориентација, од што следува дека векторите $\vec{c_1}, \vec{c_2}, \vec{c_3}$ имаат иста насока.

6) Векторскиот производ е дистрибутивен во однос на операцијата собирање на вектори, т.е. точни се формулите:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c},$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Доказ. Ќе ја докажеме точноста на првата формула. За таа цел (сл.21) нека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ ги доведеме до заеднички



сл. 21

почеток O и притоа нека $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$, $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OD}$. Со π да ја означиме рамнината што минува низ O и е нормална на правецот на векторот $\vec{c}$. Нека $OA'B'D'$ е ортогонална проекција на паралелограмот $OABD$ врз рамнината π и нека $\overrightarrow{OA'}=\vec{a'}$, $\overrightarrow{OB'}=\vec{b'}$, $\overrightarrow{OD'}=\vec{a'}+\vec{b'}$. Сега во согласност со особина 2) имаме:

$$\vec{a}\times\vec{c} = \vec{a'}\times\vec{c}\,,\ \vec{b}\times\vec{c} = \vec{b'}\times\vec{c}\,,\ (\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a'}+\vec{b'})\times\vec{c}$$

и притоа векторите $\vec{a'}\times\vec{c}$, $\vec{b'}\times\vec{c}$, $(\vec{a'}+\vec{b'})\times\vec{c}$ се од истата рамнина π, нормални на векторите $\vec{a'}$, $\vec{b'}$, $\vec{a'}+\vec{b'}$, а со смер во согласност со дефиницијата за векторски производ и со интензитети пропорционални со интензитетите на овие вектори со коефициент на пропорционалност $|\vec{c}|$. Ако ставиме $(\vec{a'}+\vec{b'})\times\vec{c}=\overrightarrow{OD}''$, $\vec{a'}\times\vec{c}=\overrightarrow{OA}''$, $\vec{b'}\times\vec{c}=\overrightarrow{OB}''$, тогаш јасно дека четириаголникот $OA''B''D''$ е паралелограм сличен со паралелограмот $OA'B'D'$, со коефициент на сличност $|\vec{c}|$ и при тоа важи $\overrightarrow{OD}''=\overrightarrow{OA}''+\overrightarrow{OB}''$, односно

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a'}+\vec{b'})\times\vec{c} = \vec{a'}\times\vec{c} + \vec{b'}\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}\,,$$

со што доказот е завршен.

7) За векторските производи на векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, што го карактеризираат десниот координатен систем $Oxyz$ согласно со дефиницијата и особините 3) и 4) имаме:

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0\,,\ \vec{i}\times\vec{j} = k\,,\ \vec{k}\times\vec{i} = j\,,$$
$$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}\,,\ \vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k},\ \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}\,,\ \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}\,.$$

8) Аналитичен израз за векторскиот производ на два вектори зададени со своите координати. Точна е формулата:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (18)$$

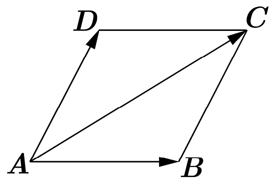
Доказ. Нека е $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, тогаш за нивниот векторски производ добиваме:

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}) = \\ &= a_1b_1\vec{i}\times\vec{i}+ a_1b_2\vec{i}\times\vec{j}+ a_1b_3\vec{i}\times\vec{k}+ a_2b_1\vec{j}\times\vec{i}+ a_2b_2\vec{j}\times\vec{j}+ a_2b_3\vec{j}\times\vec{k}+ \\ &+a_3b_1\vec{k}\times\vec{i}+ a_3b_2\vec{k}\times\vec{j}+ a_3b_3\vec{k}\times\vec{k} = \\ &= a_1b_2\vec{k}-a_1b_3\vec{j}-a_2b_1\vec{k}+a_2b_3\vec{i}+a_3b_1\vec{j}-a_3b_2\vec{i} = \\ &= (a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}-(a_1b_3-a_3b_1)\vec{j}+(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i} = \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

9) Како директна последица од особина 3) и особина 8), услов за колинеарност на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ зададени со своите координати, добиваме дека $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$, а тоа е условот 10).

Пример 13. Нека единичните вектори $\vec{m}$ и $\vec{n}$ образуваат агол $\frac{\pi}{6}$. Да се пресмета плоштината на паралелограмот $ABCD$ ако на страната AB и дијагоналата AC се положени векторите

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{m} + 3\vec{n} \text{ и } \overrightarrow{AC} = 4\vec{m} + \vec{n}.$$



сл. 22

Решение. Од сл.22 се гледа дека $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ од што следува $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\vec{m} - 2\vec{n}$, $P = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (2\vec{m} + 3\vec{n}) \times (2\vec{m} - 2\vec{n}) = 4\vec{m} \times \vec{m} + 6\vec{m} \times \vec{n} - 4\vec{m} \times \vec{n} - 6\vec{n} \times \vec{n}$$

Со оглед на 3) и 4) добиваме $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = 10\vec{n} \times \vec{m}$, односно

$$P = 10|\vec{n}||\vec{m}|\sin\frac{\pi}{6} = 5.$$

Пример 14. Нека $A(-1,2,0)$, $B(2,2,1)$ и $C(2,4,5)$ се три последователни темиња на паралелограмот $ABCD$. Да се определат координатите на темето D и плоштината на овој паралелограм.

Решение. Нека означиме (сл.22) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (3,0,1)$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC} = (3,2,5)$. Ако $D(x,y,z)$, тогаш од $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ следува

$$(x+1, y-2, z) = (3,2,5)$$

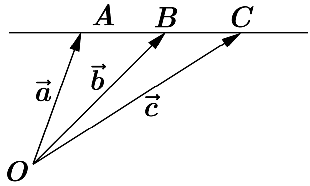
односно $x = 2, y = 4, z = 5$. А за плоштината на паралелограмот добиваме:

$$P = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-12)^2 + 6^2} = 2\sqrt{46}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 12\vec{j} + 6\vec{k}$$

Пример 15. Нека точките A, B и C имаат радиус вектори соодветно $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$. Ако овие три точки се колинеарни тогаш важи

$$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = 0.$$



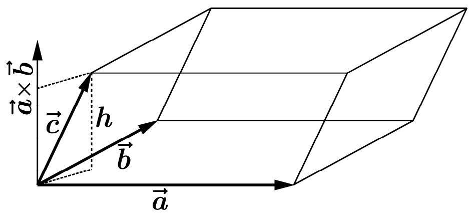
сл. 23

Решение. (Илустрација сл.23) Согласно сл. 23 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \vec{c} = \overrightarrow{OC}$, па сега добиваме $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$. Очигледно е дека $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ се колинеарни од што следува $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 0$, односно $(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a}) = 0$,

$\vec{b}\times\vec{c}-\vec{a}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{a}=\mathbf{0}$. Од каде согласно законот за алтернација се добива бараното равенство.

2.8. Мешан производ

Деф.17. Ако векторскиот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ го помножиме скаларно со векторот $\vec{c}$ се добива скалар кој се вика мешан производ на векторите $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ односно $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$.



сл. 24

Најнапред да ја објасниме геометриската смисла на мешаниот производ. Нека ги имаме векторите $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ нанесено на заеднички почеток (види сл.24). Односно нанесени на три соседни раба на еден паралелопипед. Тогаш имаме $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\mathbf{ПР}_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}$. Сега бидејќи $\mathbf{ПР}_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}=h$, ако $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ е десна тројка вектори и $\mathbf{ПР}_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}=-h$, ако $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ е лева тројка вектори за мешаниот производ добиваме $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=\pm V$. Добивме дека вредноста на мешаниот производ на векторите $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ е поврзана со волуменот на паралелопипедот на чии три соседни рабови се положени овие три вектори.

Ако тројката вектори $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ е десна тројка вектори тогаш такви се и тројките $(\vec{b},\vec{c},\vec{a}),(\vec{c},\vec{a},\vec{b})$, односно бидејќи станува збор за истиот паралелопипед добиваме $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\vec{b}=\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$. А од ова следува дека знакот за векторски производ не е битно меѓу кои два вектори ќе се стави, односно може и да се изостави. Па во таа смисла вообичаени ознаки, што се во употреба, за мешаниот производ се $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ и $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$. Ние овде ќе ја користиме првата ознака бидејќи втората ја резервиравме за означување на десна тројка вектори.

Од погоре направената дискусија ја добиваме точноста на особините:

1) Волуменот на паралелопипедот образуван над трите вектори $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ еднаков е на апсолутната вредност од мешаниот производ на тие три вектори, односно точна е формулата

$$V_P=(\vec{a}\ \ \vec{b}\ \vec{c}).$$

2) Ако трите ненулти вектори $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ се компланарни тогаш мешаниот производ е еднаков на нула, односно $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})=0$, е услов за компланарност на трите вектори $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$.

3) Законот за алтернација кој важеше за векторскиот производ, со оглед на дефиницијата на мешаниот производ, добиваме дека важи и за мешаниот производ, односно ако два вектори во мешаниот производ си ги заменат местата тогаш мешаниот производ си го менува знакот т.е. важи

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})=-(\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c})=(\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}).$$

4) Аналитичен израз за мешаниот производ.

Нека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се зададени со своите координати $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$, $\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$, тогаш за мешаниот производ добиваме:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=[(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})]\,(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k})=$$

$$=\left[\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}\right](c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k})=$$

$$=\left[\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}c_1-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}c_2+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}c_3\right]=\begin{vmatrix}c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

Сега имајќи во предвид дека детерминантата го менува знакот ако две редици си ги заменат местата за пресметување на мешаниот производ ја добиваме формулата

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} \qquad (20)$$

која е позната како аналитичен израз на мешаниот производ.

5) Ако означиме $B=|\vec{a}\times\vec{b}|$ и H е висината на паралелопипедот која што одговара на страната определена со векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, добиваме формула за пресметување на висината на паралелопипедот на чии три соседни раба се положени векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

$$H=\frac{|(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})|}{|\vec{a}\times\vec{b}|} \qquad (21)$$

Пример 16. Да се пресметаат волуменот (V_T) и висината на тетраедарот со темиња $A(-1,0,4)$, $B(3,-2,7)$, $C(0,2,-5)$ и $D(2,8,3)$, а која е спуштена од темето D.

Решение. Нека $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(4,-2,3)$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}=(1,2,-9)$ и $\vec{c}=\overrightarrow{AD}=(3,8,-1)$. Јасно е дека овие три вектори се наоѓаат на три соседни рабови на еден паралелопипед што ги содржи траедарот и со него има иста висина, па во склад со формулата (20) добиваме

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})=\begin{vmatrix}4 & -2 & 3\\ 1 & 2 & -9\\ 3 & 8 & -1\end{vmatrix}=4(-2+72)+2(-1+27)+3(8-6)=338$$

односно за волуменот на тетраедарот се добива

$$V_T=\frac{1}{6}V_P=\frac{338}{6}=\frac{169}{3}.$$

За пресметување на висината на тетраедарот, која е еднаква со висината на паралелопипедот, ќе ја искористиме формулата (21):

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -2 & 3\\ 1 & 2 & -9\end{vmatrix}=\vec{i}(18+6)-\vec{j}(3-36)+\vec{k}(8+2)$$, добиваме

$\vec{a}\times\vec{b}=24i+33j+10k$, $|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{24^2+33^2+10^2}=\sqrt{1765}$,

односно за висината H добиваме $H=\dfrac{338}{\sqrt{1765}}$.

Пример 17. Нека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарни комбинации од заемно нормалните вектори $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$, за кои $|\vec{m}|=1$, $|\vec{n}|=2$ и $|\vec{p}|=3$, односно:

$\vec{a}=a_1\vec{m}+a_2\vec{n}+a_3\vec{p}$, $\vec{b}=b_1\vec{m}+b_2\vec{n}+b_3\vec{p}$, $\vec{c}=c_1\vec{m}+c_2\vec{n}+c_3\vec{p}$. Да се пресмета мешаниот производ $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

Решение. Имаме $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=$

$$=[(a_1\vec{m}+a_2\vec{n}+a_3\vec{p})\times(b_1\vec{m}+b_2\vec{n}+b_3\vec{p})]\,(c_1\vec{m}+c_2\vec{n}+c_3\vec{p})=$$

$$=[a_2b_1\vec{n}\times\vec{m}+a_3b_1\vec{p}\times\vec{n}+a_1b_2\vec{m}\times\vec{n}+a_3b_2\vec{p}\times\vec{n}+a_1b_3\vec{m}\times\vec{p}+a_2b_3\vec{n}\times\vec{p}](c_1\vec{m}+$$

$$+c_2\vec{n}+c_3\vec{p})=$$

$$=[(a_1b_2-a_2b_1)\vec{m}\times\vec{n}+(a_1b_3-a_3b_1)\vec{m}\times\vec{p}+(a_2b_3-a_3b_2)\vec{n}\times\vec{p}]\,(c_1\vec{m}+c_2\vec{n}+$$

$$+c_3\vec{p})=(a_1b_2-a_2b_1)c_3\,(\vec{m}\ \vec{n}\ \vec{p})+(a_1b_3-a_3b_1)c_2\,(\vec{m}\ \vec{n}\ \vec{p})+$$

$$+(a_2b_3-a_3b_2)c_1\,(\vec{m}\ \vec{n}\ \vec{p})=$$

$$=\left[\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}c_1-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}c_2+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}c_3\right](\vec{m}\ \vec{n}\ \vec{p})=\begin{vmatrix}c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}(\vec{m}\ \vec{n}\ \vec{p}).$$

Значи мешаниот производ на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, претставени како линеарни комбинации на векторите $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$, е еднаков на производот од детерминантата D, чии редици се компонентите на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, во однос на оските окарактеризирани со векторите $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$ и мешаниот производ на векотрите $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$.

Во конкретниот пример $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})=(\pm 6)D$, во зависност од тоа дали $(\vec{m},\vec{n},\vec{p})$ е десна или лева тројка вектори.

Пример 18. За која вредност на m векторите $\vec{a}=(m,3,2)$, $\vec{b}=(2,-3,4m)$, $\vec{c}=(-3,12,6)$ се компланарни. За едно m од така најдените, векторот $\vec{c}$ да се разложи по правците на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. За векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ да бидат компланарни треба $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})=0$, односно

$$\begin{vmatrix}m & 3 & 2\\ 2 & -3 & 4m\\ -3 & 12 & 6\end{vmatrix}=m\begin{vmatrix}-3 & 4m\\ 12 & 6\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2 & 4m\\ -3 & 12\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & -3\\ -3 & 12\end{vmatrix}=-48m^2-54m-6,$$

односно $8m^2+9m+1=0$, па $m_1=-1$ и $m_2=-\frac{1}{8}$.

За $m=1$, векторите стануваат $\vec{a}=(1,3,2)$, $\vec{b}=(2,-3,4)$, $\vec{c}=(-3,12,6)$ и од $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ добиваме

$$(-3,12,6)=\lambda(-1,3,2)+\mu(2,3,-),$$

односно $-\lambda+2\mu=-3$, $3\lambda+3\mu=12$, $2\lambda-4\mu=6$. Со решавање на првите две равенки од овој линеарен систем добиваме $\lambda=\frac{11}{3}$ и $\mu=\frac{1}{3}$. Лесно се проверува дека ова е решение и на третата равенка, односно решение на системот. Значи $\vec{c}=\frac{11}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$.

2.9. Задачи за самостојно решавање

1. Векторот $\vec{a}=(2,3)$ да се напише како линеарна комбинација од векторите $\vec{b}=(-1,2)$ и $\vec{a}=(2,-3)$. Да се даде геометриска илустрација.

2. За која вредност на параметарот m векторите $\vec{a}=(m,2,-1)$, $\vec{b}=(3,-2,1)$ и $\vec{c}=(0,2,-2)$ се линеарно зависни. За најдената вредност на m да се напише векторот $\vec{c}$ како линеарна комбинација од векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Нека на страните на триаголникот ABC се положени векторите $\vec{a}=\overrightarrow{CB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$. Векторот $\vec{t_c}$ положен на тежишната линија што минува низ темето C да се напише како линеарна комбинација од векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4. Нека за рамнокракиот трапез $ABCD$ се знае дека $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ и $\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=60^o$. Да се определат векторите $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ како линеарни комбинации од векторите $\vec{a}=2\vec{m}+3\vec{n}$.

5. Во триаголникот ABC на страните AB и AC дадени се очките C_1 и B_1 со особина $\overline{CA}=3\overline{CB_1}$, $\overline{BA}=3\overline{BA_1}$. Точката S нека е пресек на правите BB_1 и CC_1. Векторите $\overrightarrow{CS}$ и $\overrightarrow{BS}$ да се напишат како линеарни комбинации од векторите $\overrightarrow{CB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$.

6. Нека на странитње на триаголникот ABC се положени векторите $\overrightarrow{CB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$. Векторот $\vec{s_c}$, положен на симетралата на аголот при темето C да се напише како линеарна комбинација од векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

7. Во правоаголникот $ABCD$ правата што минува низ темето B и средината на страната CD е нормална на на дијагоналата AC. Да се определи $\overline{BC}$ ако се знае дека $\overline{AB}=20cm$.

8. За која вредност на параметарот m векторите $\vec{a}=(2m,3,-1)$ и $\vec{b}=(m,m,5)$ се заемно нормални.

9. Нека на две соседни страни на еден паралелограм се положени векторите $\vec{a}=2\vec{m}+3\vec{n}$ и $\vec{b}=-\vec{m}-\vec{n}$, каде $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$, а $\angle(\vec{m},\vec{n})=60^0$. Да се пресметаат должините на дијагоналите на паралелограмот и аголот меѓу дијагоналите.

10. Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се зададени со $\vec{a}=2\vec{m}+3\vec{n}+2\vec{p}$ и $\vec{b}=-\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$, каде $|\vec{m}|=|\vec{n}|=|\vec{p}|=1$,
а $\angle(\vec{m},\vec{n})=\angle(\vec{m},\vec{p})=90^o, \angle(\vec{n},\vec{p})=60^0$. Да се пресмета $\vec{a}\vec{b}, |\vec{a}|, |\vec{b}|, \angle(\vec{a},\vec{b})$.

11. Во триаголникот ABC се знае дека $a=5, b=6, \gamma=\frac{\pi}{3}$. Да се пресмета:

а) должината на тежишната линија што минува низ темето C;
б) должината на симетралата на аголот при темето C;
в) должината на третата страна c.

12. Да се пресмета вредноста на скаларот
$$\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a},$$
ако се знае дека векторите $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ имаат еднакви интензитети и го задоволуваат равенството $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$.

13. Да се определи аголот меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ако се знае дека векторот $\overrightarrow{d_1}=2\vec{a}-\vec{b}$, е нормален на векторот $\overrightarrow{d_2}=\vec{a}+\vec{b}$, а векторот $\overrightarrow{d_3}=\vec{a}-3\vec{b}$, е нормален на векторот $\overrightarrow{d_4}=2\vec{a}+\vec{b}$.

14. Во триаголникот ABC тежишните линии повлечени од темињата A и B се заемно нормални. Која релација ја задоволуваат страните a, b и c на овој триаголник.

15. Во триаголникот познати се должините на неговите страни. Да се пресмета збирот од квадратите на должините на неговите тежишни линии.

16. Ако за векторите $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ важи $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$ и $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$, тогаш векторите $\vec{a}-\vec{d}$ и $\vec{b}-\vec{c}$ се колинеарни.

17. Темињата на рамностраниот триаголник нека се определени со радиус векторите $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ односно $A(\vec{a}), B(\vec{b})$ и $C(\vec{c})$. Да се пресмета интензитетот на векторот $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}$, ако се знае дека должината на неговата страна е r.

18. Триаголникот е зададен со неговите темиња $A(4,-1,2)$, $B(-8,0,4)$ и $C(8,2,3)$. Да се пресмета плоштината на овој триаголник, а потоа и неговата висина спуштена од темето C.

19. Да се пресмета мешаниот производ $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ ако се знае дека $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$ и $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се заемно нормални вектори.

20. Нека $\overrightarrow{d_1}=\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$, $\overrightarrow{d_2}=\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{d_3}=\vec{a}-\vec{c}$, каде што $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се компланарни вектори. Докажи дека $(\overrightarrow{d_1}\ \overrightarrow{d_2}\ \overrightarrow{d_3})=2(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$.

21. Докажи дека точките $A(4,-1,2)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$ и $D(3,1,3)$ не се комланарни. Да се пресмета волуленот на тетраедарот образуван од овие четири точки, како и висината на овој тетраедар спуштана од темето D.

22. За која вредност на параметарот m векторите $\vec{a}=(1,2m,1)$, $\vec{b}=(2,m,m)$ и $\vec{c}=(3m,2,-m)$ се компланарни.

4. РЕАЛНИ БРОЕВИ

4.1. Воведни забелешки

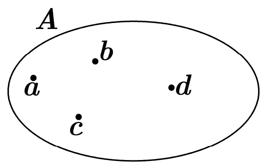
Поимот множество е еден од основните во математиката и како таков не се дефинира. Обично множеството се сфаќа како нешто што зафаќа одредена просторнина и има своја содржина. Содржината, составните делови, ги викаме елементи на множеството. Во математичката анализа ќе се среќаваме со множества од броеви, множества од функции итн. Множествата обично ги означуваме со големите букви од латиницата и ќе велиме дека множеството S е зададено ако се знае прописот , ограничувањето, својството според кое можат да се определат сите негови елементи. Елементите ќе ги означуваме со малите букви од латиницата освен ако поинаку не биде речено. Со $\varnothing$ ќе го означиме множеството кое нема ниеден елемент.

За претставување на множествата во математиката се користат три начини;

1) Записот $A=\{x \mid x$ го има својството $p\}$ е т.н. аналитички запис на множеството A и ни покажува дека множеството A се состои од елементите коишто го имаат својството p .

2) Записот $A=\{a,b,c,\ldots,d\}$ се користи во случај кога се знаат сите елементи на множеството A и се вика табеларен начин за претставување на множеството.

3) Со Венов дијаграм, а тоа е затворена линија до која стои буквената ознака на множеството а во внатрешноста со точки до кои има буквени ознаки се прикажани елементите. (види сл.1)



сл. 1

Записот $a \in A$ значи дека елементот a му припаѓа на множеството A, а записот $a \notin A$ значи дека елементот a не му припаѓа на множеството A. Ако елементите a и b му припаѓаат на множеството A, ќе означуваме $a,b \in A.$ Ќе дадеме неколку примери за множества.

Пример 1. Броевите $1,2,3,\ldots$ се викаат природни броеви и тие го образуваат множеството $\mathbb{N}$ на природните броеви кое во горниот запис изгледа $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$. Притоа јасен е прописот по кој се определуваат елементите на $\mathbb{N}$, односно по 3 следува 4 итн. Да забележиме дека овој запис на множеството на природните броеви е описен (аналитичен) а не табеларен.

Пример 2. Броевите $0,1,-1,2,-2,\ldots$ се викаат цели броеви и тие го сочинуваат множеството $\mathbb{Z}=\{0,1,-1,2,-2,\ldots\}$ на целите броеви. И овде определувачкиот пропис е јасен: по -2 е 3 , па -3 итн.

Пример 3. Бројот со облик $\frac{m}{n}$, каде m е цел број, а n е природен број, се вика рационален број, а множеството $\mathbb{Q}$ дадено со $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n} \mid m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\right\}$, се вика множество на рациналните броеви.

Доказ. Дека со $\mathbb{Q}$ не се исцрпени сите броеви потврдува фактот што $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ кое нешто и ќе го докажеме. Нека тргнеме од спротивното односно $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$. Тогаш $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$ и m и n се заемно прости броеви. Сега со квадрирање се добива $m^2=2n^2$ од каде следува дека $m=2p$, па со замена во претходното равенство добиваме $n=2k$, од што следува дека m и n не се заемно прости броеви, односно не е точна направената претпоставка $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$. Да напоменеме дека множеството $\mathbb{Q}$ од рационалните броеви ја има особината меѓу секои два рационални броеви се наоѓа барем еден рациоанлен број. За множеството кое ја има таа особина велиме дека е густо множество.

Деф.1а. Ако се A и B две множества и ако секој елемент од множеството A е елемент и на множеството B тогаш велиме дека множеството A е подмножество на множеството B и ова го означуваме со:

$$(a\in A)\Rightarrow(a\in B), \forall a\in A\Rightarrow A\subseteq B.$$

Така на пример $(n\in N)\Rightarrow(n\in Z), \forall n\in N\Rightarrow N\subseteq Z$.

Деф.1б. Ако важи множеството A е подмножество на множеството B и ако постои барем еден елемент b од множеството B таков што b не припаѓа на множеството A тогаш велиме дека множеството A е вистинско подмножество на множеството B. Математичкиот запис за ова е следниот:

$$(a\in A)\Rightarrow(a\in B), \forall a\in A, (\exists b\in B), (b\notin A)\Rightarrow A\subset B.$$

Деф.2. За две множества A и B велиме дека се еднакви ако се составени од едни те исти елементи, односно ако важи:

$$A\subseteq B \text{ и } B\subseteq A.$$

Многу е тешко да се утврди дека две множества се еднакви, поготово ако се бесконечни. Ќе наведеме една особина на природните броеви која овозможува од одредени особини на множеството $M\subseteq\mathbb{N}$ да извлечеме заклучок дека $M=\mathbb{N}$. А тоа е така наречената аксиома за математичката индукција која гласи:

Нека $M\subseteq\mathbb{N}$ ако M ги има особините

$(i): 1\in M$;

$(ii):$ од $n\in M\Rightarrow n+1\in M$;

тогаш $M=\mathbb{N}$.

Пример 1. Нека $M\subseteq\mathbb{N}$ е множеството на оние природни броеви за кои е точно равенството

$$1+a+a^2+a^3+...+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}. \quad (1)$$

Да се докаже дека $M=\mathbb{N}$.

Доказ. За да докажеме дека $M=\mathbb{N}$ ќе ги воведеме следните ознаки: со $L(n)$ ја означуваме левата страна на равенството значи

$$L(n)=1+a+a^2+a^3+...+a^n,$$

со $D(n)$ ја означуваме десната страна на равенството значи

$$D(n)=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Сега за $n=1$ добиваме $L(1)=1+a$, $D(1)=\frac{1-a^2}{1-a}=1+a$. Значи $1\in M$.

Нека претпоставиме дека $n\in M$, односно точно е равенството (1). Сега за $n+1$ за левата страна добиваме

$$L(n+1)=1+a+a^2+a^3+...+a^n+a^{n+1}=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}+a^{n+1}=$$

$$=\frac{1-a^{n+1}+a^{n+1}-a^{n+2}}{1-a}=\frac{1-a^{n+2}}{1-a}.$$

А за десната страна се добива $D(n+1)=\frac{1-a^{n+2}}{1-a}$.

Значи $L(n+1)=D(n+1)$, односно $n+1\in M$. Од направената дискусија согласно аксиомата за математичка индукција следува $M=\mathbb{N}$.

Да забележиме дека оваа аксиома, запишана во следната формулација: Ако исказот $A(n)$ е точен за $n=1$ и ако од претпоставката дека е точен за $n=k$ следува дека е точен за $n=k+1$, тогаш исказот $A(n)$ е точен за секој природен број n; во нашата натамошна практика ќе ја користиме при изведувањето на доказите како Принцип на математичката индукција (скратена ознака ПМИ), а практициран во следната применлива форма

1) Проверуваме дали исказот $A(n)$ е точен за $n=1$, односно дали е точно $A(1)$.

2) Претпоставуваме дека исказот $A(n)$ е точен за $n=k$, односно важи $A(k)$.

3) Користејќи ја направената претпоставка проверуваме дали исказот $A(n)$ е точен за $n=k+1$. Ако е точен тогаш согласно ПМИ исказот $A(n)$ е точен за секој природен број n.

4.2. Важни својства на множествата

Овде ќе опишеме повеќе својства на множествата кои понатаму често ќе ги применуваме во излагањето, а да нагласиме дека имаат голема примена како во математика и техника, така и низ практиката на општествените науки.

Нека се зададени множествата A и B. Со нивна помош ги формираме множествата унија, пресек, разлика, симетрична разлика.

Деф.3а. Множеството чиј што секој елемент припаѓа на барем едно од множествата A и B се вика унија на множествата A и B и се означува со $A \bigcup B$. Значи $A \bigcup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

Деф.3б. Множеството чиј што секој елемент припаѓа на секое од двете множествата A и B се вика пресек на множествата A и B и се означува со $A \bigcap B$. Значи $A \bigcap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

Деф.3в. Множеството чиј што секој елемент припаѓа на првото множество A, а не припаѓа на второто множество B од множествата A и B се вика разлика на множествата A и B, се означува со $A \setminus B$ и се чита A разлика B. Значи $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

Деф.3г. Множеството чиј што секој елемент припаѓа или на множеството A или на множеството B се вика симетрична разлика на множествата A и B и се означува со $A \Delta B$. Значи

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A \veebar x \in B\}.$$

Деф.4а. Двојката од објектите (елементите) a и b, каде е укажано дека a е прв а b е втор објект (елемент), се вика подредена двојка и се означува со (a,b). Притоа по дефиниција $(a,b) = (c,d)$ ако и само ако $a = c$ и $b = d$.

Деф.4б. Нека A и B се две непразни множества. Множеството составено од сите подредени двојки (x,y) каде $x \in A$ и $y \in B$ се вика Декартов производ на множествата A и B и се означува со :

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$$

Ако множеството A се множи само со себе тогаш наместо $A \times A$ обично пишуваме A^2 и велиме дека е тоа декартов квадрат. Според тоа

$$A^2 = \{(x,y) \mid x,y \in A\}.$$

Воопшто за Декартовиот производ на било кои $n-$ множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$ по дефиниција имаме

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\},$$

а за $n-$тиот степен на било кое множество A имаме

$$A^n = \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) \mid a_i \in A, \text{ за } i = 1,2,\ldots,n\}.$$

Деф.5. Нека на подредените двојки од елементи на множеството A можеме да му припишеме извесно својство ρ така што подредената двојка (x,y) или го има својството ρ или го нема тоа својство. Тогаш велиме дека во множеството A е зададена бинарна релација ρ. Ако двојката (x,y) го има својството ρ, велиме дека x е во релација ρ со y и тоа го означуваме со $x \rho y$.

Да забележиме дека релацијата ρ зададена во множеството A заправо е подмножество од A^2, односно $\rho \subseteq A \times A = A^2$.

Од посебен интерес се релациите што ги имаат следните особини:
а) Ако $\forall a \in A \Rightarrow a\rho a$, тогаш за релацијата ρ велиме дека е рефлексивна.
б) Ако од $a\rho b \Rightarrow b\rho a$, за релацијата ρ велиме дека е симетрична.
в) Ако од $a\rho b$ и $b\rho a \Rightarrow a=b$, за релацијата велиме дека е антисиметрична.
г) Ако од $a\rho b$ и $b\rho c \Rightarrow a\rho c$, за релацијата велиме дека е транзитивна.

Пример 2. Нека $A=\{a \mid a$ е жител на село Русиново$\}$ и нека во множеството A е зададена релацијата ρ (роднинска врска) со: a е прв братучед на b. Да се воочат особините на оваа релација.

Јасно дека релацијата ρ е вистинско подмножество од A.

1) a не е во релација сам со себе, значи ρ не е рефлексивна.

2) Ако $a\rho b \Rightarrow b\rho a$ (ако a е прв братучед на b,тогаш и b е прв братучед на a) значи релацијата е симетрична .

3) Од $a\rho b$ и $b\rho c$ не мора да следува $a\rho c$.(ако a е прв братучед на b по татко, а b е прв братучед на c по мајка, тогаш a и c не се први братучеди), значи релацијата не е транзитивна.

Деф.6. За релацијата ρ во множеството A која истовремено е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна релација велиме дека е релација за подредување на множеството A. За подредувањето ρ во A велиме дека е потполно ако за секои $a,b \in A$ еден од условите $a\rho b$ и $b\rho a$ обврзно е исполнет. Во тој случај за множеството A велиме дека е подредено множество.

Деф.7. За подмножеството S од подреденото множество A велиме дека е ограничено од горе (мајорирано) ако постои елемент $M \in A$ таков што $(\forall a \in S),\ a \le M,$ а е ограничено од доле (минорирано) ако постои елемент $m \in A$ таков што $(\forall a \in S),\ m \le a.$ Елементите m и M се викаат соодветно мајорант и минорант за множеството S. Најмалиот мајорант M_o се вика супремум за множеството S во множеството A, а најголемиот минорант m_o се вика инфимум за множеството S во множеството A. Ова нешто соодветно се означува $M_o = \sup_A S$ и $m_o = \inf_A S.$

4.3. Пресликувања

Ако $f \subseteq X \times Y$, тогаш по аналогија со претходната дискусија би рекле дека f е релација од множеството X во множеството Y. Ваквите релации се викаат и коресподенции. Понатаму ќе разгледаме некои специјални коресподенции.

Деф.8. Нека се дадени две непразни множества X и Y и нека на секој елемант $x \in X$ му е кореспондиран на некој начин еден елемент $f(x)$ од множеството Y (или пресликувањето f на множеството X во множеството

Y). Ако множествата X и Y се претходно споменати ќе велиме просто функцијата f (пресликувањето f) скратувајќи го исказот (функцијата f од X во Y).

Согласно самата дефиниција за секој $x \in X$ постои единствен $y \in Y$ таков што $y = f(x)$. Множеството X се вика дефиниционо подрачје (или област) на фунцијата f (се вели исто така дека функцијата f е дефинирана на множеството X) и се означува со D_f. Наместо $x \in X$ ќе велиме f е дефинирана во точката x. За секој $x \in X$ елементот $f(x)$ на множеството Y се вика вредност на функцијата (пресликувањето) f во точката x. Множеството од сите вредности на функцијата f се вика нејзино подрачје (или област) од вредности и се означува со $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$. Воопшто ако $E \subset X$ тогаш $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$ се вика слика на множеството E при пресликувањето f. Очевидно е дека $f(X) \subset Y$. Ако $f(X) = Y$ (т.е. ако за секој $y \in Y$ постои $x \in X$ така што $f(x) = y$) тогаш велиме дека f го пресликува множеството X на множеството Y.

Паралелно со термините пресликување и функција за истиот поим се употребуваат и термините оператор и трансформација особено кога $X = Y$ односно $f: X \to X$.

Деф.9. За функцијата $f: X \to Y$ и функцијата $g: X_1 \to Y_1$ велиме дека се еднакви ако важи $X = X_1$, $Y = Y_1$ и $f(x) = g(x)$, $\forall x \in X$.

Од дефиницијата е јасно дека функциите со различно дефиниционо подрачје не можат да бидат еднакви.

Деф.10. За функцијата $g: X_1 \to Y$ велиме дека е рестрикција (ограничување) на функцијата $f: X \to Y$ на множеството X_1, ако важи $X_1 \subset X$ и $g(x) = f(x)$, за $x \in X_1$. Притоа означуваме $g = f \mid X_1$.

За функцијата f велиме дека е екстензија (проширување) за функцијата $g: X_1 \to Y$ на множеството X.

Деф.11. Нека $f: X \to Y$ го пресликува множеството X на множеството Y и нека $f(x_1) \neq f(x_2)$ за $x_1 \neq x_2$ или со други зборови ако за секој $y \in Y$ постои единствен $x \in X$ така што $f(x) = y$, тогаш велиме дека f е обратно еднозначно пресликување од X на Y или дека меѓу множествата X и Y може да се воспостави обратно еднозначна кореспонденција или дека мнжествата X и Y се еквивалентни и пишуваме $X \sim Y$.

Деф.12. Ако постои природен број n таков што множеството $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ е еквивалентно со множеството A тогаш велиме дека A е конечно множество. Празното множество исто така го сметаме за конечно множество.

Деф.13. Нека R е непразно множество и нека $*$ го пресликува множеството $R^2 = R \times R = \{(x,y) \mid x,y \in R\}$ во R т.е. на секој елемент $(x,y) \in R \times R$ му е кореспондиран елементот $*((x,y)) \in R$. Вообичаено е функцијата $*: R^2 \to R$ да се вика бинарна операција во R и притоа наместо $*((x,y))$ пишуваме $x * y$.

4.4. Поле на реалните броеви

Деф.14. Нека R е непразно множество во кое се дадени две бинарни операции $(+)$ и $(\cdot)$ и една релација за подредување $<$. Четворката $(R,+,\cdot,<)$ се вика поле на реалните броеви ако се задоволени следните аксиоми:

А1. Комутативност на собирањето:
$$a+b=b+a.$$
А2. Асоцијативност на собирањето:
$$(a+b)+c=a+(b+c).$$
А3. Постои неутрален елемент за собирањето 0 така што
$$a+0=0+a=a.$$
А4. За секој елемент $a \in R$ постои елемент $-a \in R$ таков што
$$a+(-a)=(-a)+a=0$$
и се вика спротивен елемент на a.

А5. Комутативност на множењето:
$$ab=ba.$$
Да забележиме дека наместо aa пишуваме a^2.

А6. Асоцијативност на множењето:
$$a(bc)=(ab)c.$$
Да забележиме дека ова значи бришење на заградите односно наместо елементот a сам со себе да го помножиме $n-$ пати пишуваме $a^n = aa\cdots a$.

А7. Во R постои елемент кој се вика единица и се означува со 1, а за кој важи
$$a\cdot 1 = 1\cdot a = a.$$
А8. За кои и да било $a \in R$ и $a \neq 0$ постои елемент од R кој се означува со $\frac{1}{a}$ или со a^{-1} и се вика обратен на a и за него важи
$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$
А9. За кои и да било три броеви $a,b,c \in R$ важат дистрибутивните закони на множењето во однос на собирањето
$$a(b+c)=ab+ac,\ (a+b)c=ac+bc.$$
А10. Кои и да било два елементи $a,b \in R$ се наоѓаат во една и само една од релациите
$$a<b,\ a=b,\ a>b.$$

A11. Ако $a<b$ и $b<c$, тогаш $a<c$.

A12. Ако $a,b,c\in R$ и ако важи $a<b$ тогаш важи

$$a+c<b+c.$$

A13. Ако $a,b,c\in R$ и ако важи $a<b$ и $c>0$, тогаш важи и

$$ac<bc.$$

A14. За кој и да било реален број x постои цел број n таков што $x<n$. Ова е познатото Архимедово својство.

A15. За секое непразно ограничено од горе подмножество од R постои горна меѓа.

Забелешка. Натаму, полето од реални броеви ќе го означуваме со $\mathbb{R}$ и ќе го нарекуваме множетвото од реални броеви.

Деф15. Нека $a\in\mathbb{R}$, бројот $|a|$ дефиниран со

$$|a|=\begin{cases}-a, \text{ за } a<0\\ a, \text{ за } a>0\end{cases}$$

се вика апсолутна вредност.

Од самата дефиниција следува дека $|a|\geq 0$, односно $|a|=0$, ако и само ако $a=0$.

Нека е $\alpha>0$, тогаш условот $|a|\leq\alpha$ е еквивалентен со $-\alpha\leq a\leq\alpha$.

Навистина ако $a>0$ тогаш $a\geq-\alpha$ и $|a|=a\leq\alpha$. Ако пак $a<0$, тогаш $a\leq\alpha$ и $|a|=-a$, па имаме $-a\leq\alpha$ односно $a\geq-\alpha$.

Теорема 1. За апсолутна вредност точни се неравенствата:

а) $|a+b|\leq|a|+|b|$;

б) $||a|-|b||\leq|a-b|$;

в) $|ab|=|a||b|$;

г) за $b\neq 0$ $\left|\frac{a}{b}\right|=-\left|\frac{a}{b}\right|$.

Доказ. а) Јасно е дека $-a\leq|a|$ и $-b\leq|b|$. Со собирање на двете неравенки добиваме

$$-(a+b)\leq|a|+|b|. \qquad (1)$$

Исто така важи $a\leq|a|$ и $b\leq|b|$. Па со собирање на овие две неравенки добиваме

$$a+b\leq|a|+|b|. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува точноста на неравенството а).

б) Од $|a|=|a-b+b|\leq|a-b|+|b|$ значи

$$|a|-|b|\leq|a-b|,$$

а од $|b|=|b-a+a|\leq|a-b|+|a|$, значи

$$-(|a|-|b|)\leq|a-b|,$$

па од двете неравенства следува точноста на б).

в) Нека $a>0$ и $b>0$ тогаш $|ab|=ab=|a||b|$.
Ако е $a>0$ и $b<0$ тогаш $|ab|=-ab=a(-b)=|a||b|$.
Ако е $a<0$ и $b>0$ тогаш $|ab|=-ab=(-a)b=|a||b|$.
Ако е $a<0$ и $b<0$ тогаш $|ab|=ab=(-a)(-b)=|a||b|$.

г) Може да се разгледа како последица на в) имајќи во предвид точноста на равенството $\frac{a}{b}=a\frac{1}{b}$.

Пример 1. Да се решат равенките:

а) $|2x-6|=7$, б) $x^2+2|x|-3=0$, в) $|2x+8|+|6-3x|=10$.

Решение. а) Согласно деф.15. $|2x-6|=\begin{cases}6-2x, x<3\\2x-6, x>3\end{cases}$, па равенката станува $6-2x=7$, за $x<3$. Нејзино решение е $x=-\frac{1}{2}$. Односно $2x-6=7$,за $x>3$. Нејзино решение е $x=\frac{1}{2}$.

б) За $x>0$ равенката е $x^2+2x-3=0$ и нејзини решенија се $x_1=-3$ и $x_2=1$. Поголемо од нула е $x_2=1$. А за $x<0$ равенката станува $x^2-2x-3=0$ и нејзини решенија се $x_1=-1$ и $x_2=3$. Помало од нула е $x_1=-1$. Значи решенија на нашата равенка се $x_1=-1$ и $x_2=1$.

в) Имајќи в предвид дека

$$|2x+8|=\begin{cases}-2x-8, x<-4\\ 2x+8, x>-4\end{cases} \text{ и } |6-3x|=\begin{cases}3x-6, x<2\\6-3x, x>2\end{cases},$$

равенката се трансформира:

за $x<-4$, во равенката $-2x-8+3x-6=10$. Нејзино решение е $x=24>-4$, па не е решение на нашата равенка.

за $-4<x<2$,во равенката $2x+8+3x-6=10$. Нејзино решение е $x=\frac{12}{5}>2$, па не е решение на нашата равенка.

за $x>2$, $2x+8+6-3x=10$. Нејзино решение е $x=-24<2$, па не е решение на нашата равенка. Значи равенката нема решение.

Пример 2. Да се решат неравенките:

а) $|5x-6|\leq 9$, б) $2x^2+3|x|-5\geq 0$, в) $|x+8|+|6-x|<11$.

Да забележиме дека постапката за решавање на неравенки е иста со постапката за решавање на равенки.

Деф.16. Множеството $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ се вика проширено множество на реалните броеви ако се задоволени аксиомите:

а) $-\infty<a<+\infty$, за секој реален број a.

б) $a+(+\infty)=+\infty$ и $a+(-\infty)=-\infty$, за секој реален број a.

в) $a\cdot(+\infty)=+\infty$ и $a\cdot(-\infty)=-\infty$, за секој реален број $a>0$ и

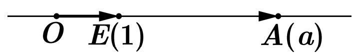
$a\cdot(+\infty)=-\infty$ и $a\cdot(-\infty)=+\infty$, за секој реален број $a<0$.

г) $\frac{1}{+\infty}=\frac{1}{-\infty}=0.$

Јасно дека $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$, $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$, $(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$, $(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$, а изразите $(+\infty)+(-\infty)$, $0\cdot(\pm\infty), \frac{\infty}{\infty}$, не се определени.

4.5. Геометриски особини на реалните броеви

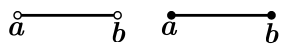
Нека правата (p) е окарактеризирана со единичниот вектор $\vec{e}=\overrightarrow{OE}$, тогаш за било која точка A од правата (p) имавме $\overrightarrow{OA}=a\vec{e}$. Притоа за a велевме дека е компонента (координата) на векторот $\overrightarrow{OA}$. На ваков начин на секоја точка од правата (p) и припишавме по еден реален број. Важи и обратното за секој реален број a може да се најде единствена точка A од правата (p) такашто $\overrightarrow{OA}=a\vec{e}$. Значи постои обратно еднозначно пресликување меѓу реалните броеви и точките од една окарактеризирана права (бројна оска).



сл. 2

Деф.17. Нека a и b се реални броеви такви што $a<b$, тогаш множеството на реални броеви такви што $a<x<b$ се вика отворен интервал и се означува со (a,b), а ако кон ова множество се додадени и броевите a и b, тогаш се вика затворен интервал или сегмент и се означува со $[a,b]$.

Да забележиме дека геометриски сегментот $[a,b]$ е отсечка со должина $b-a$, а интервалот отсечка без крајните точки со истата должина.



сл. 3

Посебно да ги нагласиме <u>геометриските фигури</u> :

$(a,b]=\{x\,|\,a<x\le b\}$, полузатворен интервал од десно, отсечка без левата крајна точка.

$[a,b)=\{x\,|\,a\le x<b\}$, полузатворен интервал од лево, отсечка без десната крајна точка.

$(-\infty,a)=\{x\,|\,x<a\}$, од лево бесконечен интервал, лева полуправа без рабната точка.

$(a,+\infty)=\{x\,|\,a<x\}$, од десно бесконечен интервал, десна полуправа без рабната точка.

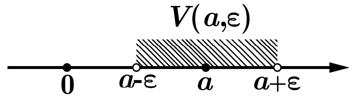
$(-\infty,a]=\{x\,|\,x\le a\}$, $[a,+\infty)=\{x\,|\,a\le x\}$, полузатворени бесконечни интервали, лева и десна полуправа.

сл. 4

Деф.18. Нека $a\in\mathbb{R}$ и нека реалниот број $\varepsilon>0$, тогаш интервалот

$$(a-\varepsilon,a+\varepsilon),$$

се вика $\varepsilon-$ околина на точката a и обично се означува со $V(a,\varepsilon)$ и тоа заправо е отсечка, без крајните точки, со должина 2ε и средна точка a.



сл. 5

4.6. Биномна формула

Од порано познати ни се формулите:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\ ,\ (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

познати како бином на квадрат, односно бином на куб. Понатаму со математичка индукција ќе ја докажеме формулата за развиената форма на десната страна на $n-$тиот степен на биномот, односно

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

позната како биномна формула.

Да забележиме дека бројот

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k,$$

се вика $(k+1)-$ви член од развојот на биномот, а броевите $\binom{n}{k}$ дефинирани со

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!},\ \binom{n}{0}=1,$$

се викаат биномни коефициенти. Притоа $k!$ се чита ка факториел и ни го означува производот на сите природни броеви помали од природниот број k. По дефиниција $0!=1$. За величината (бројот) $a^{n-k}b^k$ велиме дека е главна количина на општиот член. Значи

$$GK=a^{n-k}b^k.$$

Доказ. Нека левата и десната страна на биномната формула ги означиме соодветно со

$L(n)=(a+b)^n$,

$$D(n)=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

Сега за $n=1$ добиваме

$L(1)=(a+b)^1=a+b$, $D(1)=\binom{1}{0}a^1+\binom{1}{1}a^{1-1}b=a+b$, значи $L(1)=D(1)$.

Нека претпоставиме дека биномната формула е точна за n. Сега за $n+1$ добиваме

$$D(n+1)=$$
$$=\binom{n+1}{0}a^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^{n}b+\binom{n+1}{2}a^{n-1}b^{2}+\ldots+\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^{k}+\ldots$$
$$\ldots+\binom{n+1}{n}ab^{n}+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1},$$

$$L(n+1)=(a+b)^{n+1}=(a+b)^{n}(a+b)=$$
$$=\left\{\binom{n}{0}a^{n}+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^{n}\right\}(a+b)=$$
$$=\binom{n}{0}a^{n+1}+\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right]a^{n}b+\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right]a^{n-1}b^{2}+\ldots+\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}\right]a^{n+1-k}b^{k}+\ldots$$
$$\ldots+\left[\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right]ab^{n}+\binom{n}{n}b^{n+1}=(*)=$$

Забележуваме дека во сите средни загради се збировите на биномните коефициенти на два соседни членови, па определувајќи го збирот во заградата пред општиот член ќе извлечеме заклучок за ситењ збирови

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}\left[1+\frac{n-k}{k+1}\right]=$$
$$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{(k+1)!}=\binom{n+1}{k+1}.$$

Сега јасно дека добиваме

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{1},\ \binom{n}{1}+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{2},\ldots,\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n},$$

а кое нешто заменето при прекинот $(*)$ дава

$$=\binom{n+1}{0}a^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^{n}b+\binom{n+1}{2}a^{n-1}b^{2}+\ldots+\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^{k}+\ldots$$
$$\ldots+\binom{n+1}{n}ab^{n}+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}=D(n+1).$$

Согласно ПМИ добиваме точност на биномната формула.

Пример 3. Биномниот коефициент на третиот член од развојот на биномот $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{n}$ е еднаков на 21. Кој член од развојот на овој бином содржи x^{5} како главна количина.

Решение. Биномниот коефициент на третиот член е $\frac{n(n-1)}{2}$, па затоа ја добиваме равенката $n^2-n-42=0$. Нејзино позитивно решение е $n=7$. Сега главната количина на произволен член изнесува

$$\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{7-k}\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{k}=x^{\frac{3}{2}(7-k)-\frac{k}{3}}.$$

Од тоа што главната количина треба да биде x^5 ја добиваме равенката $\frac{3}{2}(7-k)-\frac{k}{3}=5$. Нејзино решение е $k=3$. Значи четвртиот член од развиениот бином го задоволува бараниот услов.

Пример 4. Третиот член од развојот на биномот $\left(x^{\log x}+x\right)^5$ за некои вредности на x е еднаков на 100. За кои?

Решение. Бидејќи третиот член треба да биде еднаков на 100 добиваме $T_3=T_{2+1}=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\left(x^{\log x}\right)^{5-2}x^2=100$, односно $x^{3\log x+2}=10$. Од овде со логаритмирање се добива $3(\log x)^2+2\log x-1=0$. Нејзини решенија се $\log x=-1$, односно $x=\frac{1}{10}$ и $\log x=\frac{1}{3}$, односно $x=\sqrt[3]{10}$.

4.7. Задачи за самостојно решавање

1. Нека множеството A е дефинирано на следниот начин

а) $A=\{x \mid x$ е решение на равенката $|2x+3|=x^2\}$,

б) $A=\{x \mid x$ е решение на равенката $|2x+1|+|x+3|=|x+6|\}$,

в) $A=\{x \mid x$ е решение на равенката $x^4+2x^3+x^2-2x-2=0\}$,

г) $A=\{x \mid x$ е решение на равенката $x^5-5x^2+4=0\}$.

Да се определат сите подмножества на множеството A во сите четири случаи.

2. Да се решат неравенките

а) $|x-6|<2$; б) $|3x-1|+|3-x|\leq|x+6|$;

в) $\frac{3x+1}{3-2x}<0$; г) $\left|\frac{3-3x}{x+1}\right|<2$;

д) $|x^2+x-2|+|x^2-x-2|\leq 2$.

3. Да се определат природните броеви n за кои дропката

а) $\frac{3n^2-3n+10}{n-1}$; б) $\frac{2n^2+3n+16}{n+1}$

добива вредност цел број.

4. Нека реалниот број y е дефиниран со $y=\sqrt{8x^2-2x-3}$.

а) За кои цели броеви x и y ќе биде цел број;

б) За кои рационални броеви x и y ќе биде рационален број?

5. Со математичка индукција да се докаже точноста на равенствата

а) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

б) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

в) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$;

г) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

д) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

ѓ) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$;

е) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

ж) $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\ldots+n(n+2)=\dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$;

з) $1+3+3^2+3^3+\ldots+3^n=3^{n+1}-1$;

ѕ) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}+\dfrac{4}{3^4}+\ldots+\dfrac{n}{3^n}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{4\cdot 3^n}$;

и) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$;

ј) $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\dfrac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$;

к) $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\dfrac{3^2}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

л) $1+4+7+10+\ldots+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$;

м) $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$;

н) $1\cdot 5+5\cdot 7+7\cdot 9+\ldots+(4n-3)(4n+1)=\dfrac{4n(n+1)(4n-1)}{3}-3$.

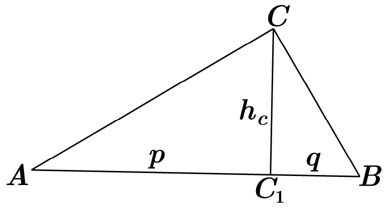
6. Со математичка индукција да се докажат неравенствата:

а) $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)>1+x_1+x_2+\ldots+x_n$

Неравенството е точно ако x_i за $i=1,2,\ldots,n$ се со ист знак и сите се поголеми од -1. Познато е како Бернулиево неравенство.

б) $(1+h)^n>1+nh$;

в) $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}$. Притоа броевите $a_i>0$ за $i=1,2,\ldots,n$. Левата страна на неравенката позната е како аритметичка средина и е воопштување на поимот средна вредност на броевите a и b: $x_s=\dfrac{a+b}{2}$. А десната страна е позната како геометриска средина и е воопштување на поимот средна геометриска пропорционала: $a:h=h:b$, $h^2=ab$, $h=\sqrt{ab}$. Во геометријата е одамна позната геометриската средина како отсечка која се конструира со помош на две отсечки и лак од половина круг над збирот од овие две отсечки, како должина на нормалната отсечка со подножје во заедничката точка на отсечките, а завршна точка во пресекот со полукружницата. Исто така позната е Евклидовата теорема која вели дека во правоаголниот триаголник производот од отсечките p и q на хипотенузата формирани од подножјето на висината h_c, што одговара на хипотенузата е еднаков на квадратот на висината, односно согласно сл.6.



сл. 6

$$p : h_c = h_c : q\,,\ h_c = \sqrt{pq}$$

г) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$;

д) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$;

ѓ) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\left[\sqrt{n+1}-1\right]$;

е) $\sqrt{a^n}+\sqrt{b^n}\leq\sqrt{(a+b)^n}$, за $a,b>0$ и $n\geq 2$;

ж) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{n+1}{n}$;

з) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

ѕ) $n^{n+1}>(n+1)^n$, за $n\geq 3$.

7. Со математичка индукција да се докаже дека соодветниот број $A(n)$ е делив со посочениот број за секој природен број.

а) $A(n)=17^n-6^n$, со 11;

б) $A(n)=11^{n+2}+12^{2n+1}$, со 133;

в) $A(n)=3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$, со 17;

г) $A(n)=13^{2n}+6$, со 7;

д) $A(n)=2^{2n+1}-9n^2+3n-2$, со 54;

ѓ) $A(n)=3^{3n+2}-8n-9$, со 64;

е) $A(n)=4^{2n+2}-15n-16$, со 225;

ж) $A(n)=5^{n-1}+2^n$, со 3;

з) $A(n)=3^{2n+1}+2^{n+2}$, со 7;

ѕ) $A(n)=11\cdot 3^n+3\cdot 7^n-6$, со 8;

и) $A(n)=3\cdot 4^{n+1}+10^{n-1}-4$, со 9;

ј) $A(n)=n^3+5n$, со 6;

к) $A(n)=6^{2n-1}+1$, со 7;

л) $A(n)=2^{2n}+15n-1$, со 9;

љ) $A(n)=9^n-8n-1$, со 64.

8. Користејќи го Паскаловиот триаголник да се напишат полиномите по степените од x.

а) $p_1(x)=(3+2x)^5$, б) $p_2(x)=(x+\frac{1}{x})^4$, в) $p_3(x)=(\frac{x}{2}+2)^6$

9. Нека е даден биномот $p(x)=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^8$, да се определи четвртиот член од развиената форма без да се развива.

10. Да се определи оној член на биномот $p(x)=(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^{11}$, кој за главна количина има x^5.

11. Да се определи членот од развиениот бином $p(x)=\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^9$, кој не содржи x.

12. Да се определи вредноста на рационалните членови на биномите:

а) $\left(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[3]{x}\right)^{10}$, б) $\left(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2}\right)^{24}$.

13. Колку рационални членови има во развиениот бином $\left(\sqrt[5]{2}+\sqrt[3]{3}\right)^{100}$.

14. Најди го биномот $\left(a+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$,

ако се знае дека збирот на биномните коефициенти на вториот и третиот член е еднаков на 55. Потоа определи го четвртиот член.

15. Определи ги x, y и n во биномот $(x+y)^n$, ако се знае дека вториот член е еднаков на 240, третиот е еднаков на 720, а четвртиот е еднаков на 1080.

16. Да се определи тринаесетиот член од развиениот бином $\left(9x-\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^n$, ако се знае дека биномниот коефициент на третиот член е 105.

17. Определи го биномот $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$, ако се знае дека се еднакви биномните коефициенти на третиот и тринаесетиот член од развиената форма на биномот. Потоа да се определи членот што не го содржи x.

18. Користејќи биномен развој да се определат степените со посочената точност:

а) $0{,}98^6$, со точност до треттата децимала,

б) $1{,}005^6$, со точност до петтата децимала.

20. Да се докаже точноста на равенството

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}.$$

21. Нека a_o е реален бројот интервалот (1,2) и нека реалниот број a_n, за секој природен број n е зададен со рекурентната формула

$$\left(a_{n+1}\right)^2=3a_n-2,\ a_1^2=3a_o-2.$$

Докажи дека на ваков начин дефинираниот a_n е од интервалот (1,2).

5. КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

5.1. Множеството на комплексните броеви

Нека е $\mathbb{R}$ множеството на реалните броеви и $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$ декартовиот производ на множеството $\mathbb{R}$ само со себе, односно множеството

$$\mathbb{C}=\{(a,b)\,|\,a,b\in\mathbb{R}\},$$

на сите подредени парови реални броеви. Ако во $\mathbb{C}$ дефинираме операции собирање и множење со

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d),$$

$$(a,b)\otimes(c,d)=(a\cdot c-b\cdot d,a\cdot d+b\cdot c),$$

добиваме алгебарска структура $\mathbb{C}(\oplus,\otimes)$ за која ќе докажеме дека е поле и се вика поле на комплексните броеви . За да ја докажеме точноста на ова тврдење треба да докажеме дека важат првите девет аксиоми од полето на комплексните броеви бидејќи овде не дефиниравме релација за подредување.

Нека $(a,b),(c,d),(e,f)$ се произволни елементи од множеството $\mathbb{C}$ и нека за нив ги провериме аксиомите:

***A*1** : комутативност на собирањето

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)=(c+a,d+b)\ =(c,d)\oplus(a,b).$$

***A*2** : асоцијативност на собирањето

$$[(a,b)\oplus(c,d)]\oplus(e,f)=(a+c,b+d)\oplus(e,f)=\ [(a+c)+e,(b+d)+f]=$$
$$=[a+(c+e),b+(d+f)]=(a,b)\oplus(c+e,d+f)=(a,b)\oplus[(c,d)\oplus(e,f)].$$

***A*3** : аксиома за постоење на неутрален елемент $(0,0)$ за собирањето;

$$(a,b)\oplus(0,0)=(a+0,b+0)=(a,b).$$

***A*4** : аксиома за постоење на спротивен елемент $(-a,-b)$ за собирањето;

$$(a,b)\oplus(-a,-b)=(a+(-a),b+(-b))=(a-a,b-b)=(0,0).$$

***A*5** : комутативност на множењето

$$(a,b)\otimes(c,d)=(a\cdot c-b\cdot d,a\cdot d+b\cdot c)=(c\cdot a-d\cdot b,d\cdot a+c\cdot b)=\ =(c,d)\otimes(a,b).$$

***A*6** : асоцијативност на множењето

$$[(a,b)\otimes(c,d)]\otimes(e,f)=(a\cdot c-b\cdot d,a\cdot d+b\cdot c)\otimes(e,f)=$$
$$=[(a\cdot c-b\cdot d)\cdot e-(a\cdot d+b\cdot c)\cdot f,(a\cdot c-b\cdot d)\cdot f+(a\cdot d+b\cdot c)\cdot e]=$$
$$=(a\cdot c\cdot e-b\cdot d\cdot e-a\cdot d\cdot f-b\cdot c\cdot f,a\cdot c\cdot f-b\cdot d\cdot f+a\cdot d\cdot e+b\cdot c\cdot e)=$$
$$=(a\cdot(c\cdot e-d\cdot f)-b\cdot(d\cdot e+c\cdot f),a\cdot(c\cdot f+d\cdot e)+b\cdot(c\cdot e-d\cdot f)=$$
$$=(a,b)\otimes(c\cdot e-d\cdot f,d\cdot e+c\cdot f)=(a,b)\otimes[(c,d)\otimes(e,f)].$$

***A*7** : аксиома за постоење на неутрален елемент $(1,0)$ за множењето;

$$(a,b)\otimes(1,0)=(a\cdot 1-b\cdot 0,a\cdot 0+b\cdot 1+0)=(a,b).$$

***A*8**: аксиома за постоење на спротивен елемент $\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right)$ за елементот (a,b) за множењето;

$$(a,b)\otimes\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right)=\left(a\frac{a}{a^2+b^2}+b\frac{b}{a^2+b^2},-a\frac{b}{a^2+b^2}+b\frac{a}{a^2+b^2}\right)=$$
$$=\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2},\frac{-ab+ba}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$$

***A*9** : аксиома за дистрибутивност на множењето во однос на собирањето односно

$$(a,b)\otimes[(c,d)\oplus(e,f)]=[(a,b)\otimes(c,d)]\oplus[(a,b)\otimes(e,f)],$$
$$[(c,d)\oplus(e,f)]\otimes(a,b)=[(c,d)\otimes(a,b)]\oplus[(e,f)\otimes(a,b)].$$

Овде ќе го докажеме само првото равенство. Тргаме од левата страна
$$(a,b)\otimes[(c,d)\oplus(e,f)]=(a,b)\otimes(c+e,d+f)=$$
$$=(a\cdot(c+e)-b\cdot(d+f),a\cdot(d+f)+b\cdot(c+e))=$$
$$=(a\cdot c+a\cdot e-b\cdot d-b\cdot f,a\cdot d+a\cdot f+b\cdot c+b\cdot f);$$
$$[(a,b)\otimes(c,d)]\oplus[(a,b)\otimes(e,f)]=(a\cdot c-b\cdot d,a\cdot d+b\cdot c)\oplus(a\cdot e-b\cdot f,a\cdot f+b\cdot e)=$$
$$(a\cdot c-b\cdot d+a\cdot e-b\cdot f,a\cdot d+b\cdot c+a\cdot f+b\cdot e);$$
па очигледна е еднаквоста на двете страни на првото од двете равенства за дистрибутивност.

Деф.1. Комплексниот број $(0,1)$ се вика имагинарна единица и се означува со $i=(0,1)$.

Помножен сам со себе дава $i^2=(0,1)\otimes(0,1)=(0\cdot0-1\cdot1,0\cdot1+1\cdot0)=(-1,0)$.

Нека со $\mathbb{R}'$ го означиме подмножеството од $\mathbb{C}$ определено со
$$\mathbb{R}'=\{(x,0)\,|\,x\in\mathbb{R}\}.$$
Ако $(x,0)$ и $(y,0)$ се два произволни елементи од $\mathbb{R}'$ собирајќи ги и множејќи како комплексни броеви добиваме:
$$(x,0)\oplus(y,0)=(x+y,0)\in\mathbb{R}',$$
$$(x,0)\otimes(y,0)=(x\cdot y-0\cdot0,x\cdot0+0\cdot y)=(x\cdot y,0)\in\mathbb{R}'.$$
Од ова следува дека $\mathbb{R}'(\oplus,\otimes)$ исто така е поле. Ако уште дефинираме подредување во $\mathbb{R}'$ со
$$(x,0)\le(y,0) \text{ ако и само ако } x\le y,$$
добиваме дека $\mathbb{R}'$ ги задоволува сите аксиоми за полето на реалните броеви $\mathbb{R}$. Од овие причини може да го идентификуваме комплексниот број $(x,0)$ со реалниот број x, односно $(x,0)=x$.

Ако пак комплексниот број $(y,0)$ го помножиме со имагинарната единица $i=(0,1)$ добиваме
$$(y,0)\otimes(0,1)=(y\cdot0-0\cdot1,y\cdot1+0\cdot1)=(0,y).$$

Сега за комплексниот број $z=(x,y)$ добиваме:
$$(x,y)=(x,0)\oplus(0,y)=(x,0)\oplus((0,1)\otimes(y,0))=x+i\cdot y.$$
Значи ја добивме интерпретацијата
$$z=(x,y)=x+i\cdot y,$$
која ни дава за право x да го викаме реален дел, а y да го викаме имагинарен дел на комплексниот број z и да означиме

$$x = R_e z\,, y = I_m z\,.$$

Сега за квадратот на имагинарната единица имаме

$$i^2 = (-1{,}0) = -1\,.$$

Од порано востановеното соодветство меѓу точките од една рамнина и подредените парови реални броеви ни дава за право множеството на комплексните броеви да го поистоветиме со множеството точки од ориентираната рамнина xOy. Притоа $x-$оската ќе ја викаме реална оска, а $y-$оската ќе ја викаме имагинарна оска . А самата рамнина комплексна рамнина или Гаусова рамнина.

За операциите $\oplus$ и $\otimes$ со оглед на последните факти имаме

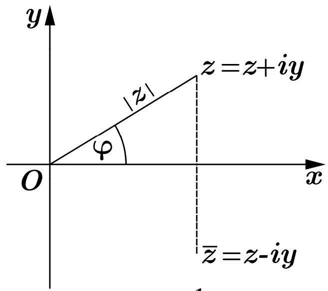
$$(a+i\cdot b)\oplus(c+i\cdot d) = a+c+i\cdot(b+d)\,;$$

$$(a+i\cdot b)\otimes(c+i\cdot d) = a\cdot c-b\cdot d+i\cdot(a\cdot d+b\cdot c)\,.$$

Значи при собирањето на комплексните броеви собираме реален со реален дел и имагинарен со имагинарен дел, а при множењето постапуваме како да множиме два биноми при што имаме предвид дека $i^2 = -1$.

Деф.2. Комплексниот број $x-i\cdot y$ се вика коњугиран за комплексниот број $x+i\cdot y$ и се означува со $\overline{z}$.

Да забележиме дека броевите z и $\overline{z}$ се симетрични во однос на $x-$оската (илустрација сл.1).



сл. 1

Со собирање и одземање на овие два броја добиваме:

$$z+\overline{z} = x+i\cdot y+x-i\cdot y = 2x\,,\ x = R_e z = \frac{z+\overline{z}}{2}\,;$$

$$z-\overline{z} = x+i\cdot y-x+i\cdot y = 2iy\,,\ iy = \frac{z-\overline{z}}{2}\,,$$

$$I_m z = \frac{z-\overline{z}}{2i}\,.$$

Деф.3. Реалниот број

$$\sqrt{x^2+y^2},$$

се вика модул на комплексниот број z и се означува со $|z|$.

За модулот на комплексниот број z со оглед на

$$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+ixy-ixy-i^2y^2 = x^2+y^2\,,$$

ја имаме и следната формула

$$|z|^2 = z\overline{z}\,.$$

Теорема 2. За комплексните броеви $z_1 = x_1+iy_1$ и $z_2 = x_2+iy_2$, важи:

а) Коњугираниот број од збир на два комплексни броеви е збир на коњугираните броеви на собирците, односно

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}\,.$$

б) Коњугираниот број од производ на два комплексни броеви е производ на коњугираните броеви на множителите, односно

$$\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\,.$$

в) Коњугираниот број од количник на два комплексни броеви е количник на коњугираните броеви на деленикот и делителот, односно

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

г) Модулот на производот на два комплексни броеви е еднаков на производот на модулите на тие два комплексни броеви, односно

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|.$$

д) Модулот на збирот на два комплексни броеви е помал или еднаков на збирот на модулите на тие два комплексни броеви (неравенство на триаголникот);

$$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|.$$

Доказ. Јасно е дека $\overline{\overline{z}}=z$ па ако $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$, тогаш $\overline{z_1}=x_1-iy_1$ и $\overline{z_2}=x_2-iy_2$.

а) Со оглед на $z_1+z_2=x_1+iy_1+x_2+iy_2=x_1+x_2+i(y_1+y_2)$ имаме

$$\overline{z_1+z_2}=x_1+x_2-i(y_1+y_2)=x_1-iy_1+x_2-iy_2=\overline{z_1}+\overline{z_2}.$$

б) Со оглед на производот

$$z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=x_1\cdot x_2-y_1\cdot y_2+i(x_1\cdot y_2+y_1\cdot x_2)$$

имаме

$$\overline{z_1\cdot z_2}=x_1\cdot x_2-y_1\cdot y_2-i(x_1\cdot y_2+y_1\cdot x_2);$$

$$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(x_1-iy_1)\cdot(x_2-iy_2)=x_1\cdot x_2-y_1\cdot y_2-i(x_1\cdot y_2+y_1\cdot x_2),$$

што значи точност на равенството б).

в) За докажување на ова равенство нека тргнеме од левата страна

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{\left(\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}\right)}=\frac{\overline{z_1}z_2}{z_2\overline{z_2}}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

г) Тргајќи од квадратот на левата страна имаме

$$|z_1z_2|^2=(z_1z_2)(\overline{z_1z_2})=(z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2})=|z_1|^2|z_2|^2,$$

од каде следува точноста на равенството.

д) За неравенството на триаголникот тргајќи од левата страна добиваме

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}=|z_1|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}+|z_2|^2=$$

$$=|z_1|^2+2R_e z_1\overline{z_2}+|z_2|^2.$$

Бидејќи $R_e(z_1\overline{z_2})=x_1x_2+y_1y_2\leq|z_1\overline{z_2}|=\sqrt{(x_1x_2+y_1y_2)^2+(x_2y_1-x_1y_2)^2}$, следува точноста на неравенството. Равенството ќе важи ако е задоволен условот $x_2y_1-x_1y_2=0$, кое нешто е услов точките z_1 и z_2 да лежат на права која минува низ координатниот почеток.

Деф.3. Аголот меѓу $x-$ оската и радиусвекторот на точката z, мерен во насока спротивна од движењето на часовната стрелка, се вика аргумент на комплексниот број z и се означува со $\varphi=\arg z$. Значи $\varphi=arctg\frac{y}{x}$.

Сега согласно деф.3. (види сл.1) имаме $x=|z|\cos\varphi$, $y=|z|\sin\varphi$, односно $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Последното равенство заправо претставува тригонометриска интерпретација на комплексниот број.

Теорема 3. За секој природен број точна е формулата

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,$$

позната како Муаврова формула.

Доказ. За докажување ќе спроведеме математичка индукција и нека левата и десната страна ги означиме

$$L(n) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n,\ D(n) = \cos n\varphi + i\sin n\varphi;$$

сега за $n = 1$ добиваме $L(1) = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $D(1) = \cos\varphi + i\sin\varphi$, што значи равенството е точно за $n = 1$.

Нека претпоставиме дека равенството е точно за $n = k$, односно важи

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k = \cos k\varphi + i\sin k\varphi. \quad (*)$$

Сега за $n = k+1$ имаме $D(k+1) = \cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi$;

$$L(k+1) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{k+1} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^k(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$= (\cos k\varphi + i\sin k\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos k\varphi\cos\varphi - \sin k\varphi\sin\varphi +$$

$$+ (\sin k\varphi\sin\varphi + \cos k\varphi\cos\varphi) = \cos(k\varphi + \varphi) + i\sin(k\varphi + \varphi) =$$

$$\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi.$$

Добивме $L(k+1) = D(k+1)$, што согласно ПМИ значи точност на равенството за секој природен број.

Да се навратиме на еднаквоста на два комплексни броеви. Имено од интерпретацијата на комплексниот број како подреден пар реални броеви следува тие се еднакви ако имаат еднакви реални и имагинарни делови односно $z_1 = x_1 + iy_1 = z_2 = x_2 + iy_2$, ако и само ако $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Ако пак комплексните броеви се претставени во тригонометриска форма $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогаш тие се еднакви ако имаат еднакви модули и еднакви аргументи т.е. $|z_1| = |z_2|$ и $\varphi_1 = \varphi_2$.

Оваа дискусија ќе ни помогне да ја решиме равенката $z^n = a$, односно да определиме $n-$ти корен $z = \sqrt[n]{a}$. Имено користејќи ја тригонометриската интерпретација на комплексниот број и Муавровата формула добиваме

$|z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$; од што следува

$|z| = \sqrt[n]{|a|}, \cos n\varphi = \cos\alpha$, $\sin n\varphi = \sin\alpha$. Од периодичноста на функциите $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$ со основен период $\frac{2\pi}{n}$ следува дека равенките $\cos n\varphi = \cos\alpha$, $\sin n\varphi = \sin\alpha$ имаат n решенија кои се добиваат со

$$\varphi = \frac{\alpha + 2k\pi}{n},\ k = 0,1,2,\dots,n-1.$$

Со поврзување на двата последни резултати добиваме

$$z = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0,1,2,\dots,n-1.$$

Последната формула заправо е формула за определување на $n-$ти корен од некој комплексен број.

Пример 1. Да се реши равенката $(3+4i)z=1+i$.

Решение. Множејќи ја равенката со $3-4i$ добиваме $(3^2+4^2)z=1+i$, Односно $z=\frac{1+i}{25}$.

Пример 2. Определи $\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}$.

Решение. Овдека $a=1+i\sqrt{3}$, $|a|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$, $\alpha=arctg\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{\pi}{3}$, па со замена во формулата имаме:

$$\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}\right),\ k=0,1,2.$$

5.2. Задачи за самостојно решавање

1. Да се реши равенката

$$(3-2i)z=5+6i.$$

2. Нека е $z=\sqrt{3}-i$. Определи $|z|$ и $\arg z$ а потоа претстави ги на координатен систем.

3. Да се пресмета степенот $(1+i)^n$, за n било кој природен број.

4. Да се реши равенката а) $\overline{z}=z^2$, б) $\overline{z}=z^n$, $n\in\mathbb{N}$.

5. Нека z_1 и z_2 се комплексни броеви. Да се реши системот равенки:

$$-iz_1+(4+2i)z_2=-1+3i,$$
$$(4+2i)z_1-(2+3i)z_2=5+4i.$$

6. Да се определи реалниот дел на комплексниот број

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^n,\ n\in\mathbb{N}.$$

7. Да се пресмета коренот од комплексниот број од назначениот ред:

а) трети корен од $2-2i$;

б) шести корен од $1+i$.

8. Да се реши равенката $z^4-a=0$, ако a е решение на равенката

$$6a+\overline{a}=-56+140\sqrt{3}i.$$

9. Да се определи комплексниот број z од условите:

$$z=i\overline{z},\quad \left|\frac{z}{z+1}\right|=1.$$

10. Да се определат множествата точки од рамнината што ги задоволуваат условите соодветно:

а) $|z-1+i|<2$, б) $0<R_e z<2$,

в) $|z|+R_e z\leq 1$, г) $|z-1|+|z+1|\leq 3$.

6. БРОЈНИ НИЗИ

6.1. Дефиниција за низа и основни особини

Деф.1. Пресликувањето $a: n \to a(n)$ од множеството на природните броеви $\mathbb{N}$ во множеството на реалните броеви $\mathbb{R}$ се вика низа во множеството на реалните броеви. Наместо $a(n)$ вообичаено е да пишуваме a_n. За a_n велиме дека е општ член на низата $a=(a_n)$, а за n индекс на членот a_n. Наместо (a_n) вообичаено е да пишуваме и

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

односно членовите на низата да ги наредиме како што се наредени природните броеви.

Јасно дека низата има бесконечно многу членови а додека множеството на вредности на низата

$$S=\{a_n \mid a_n \in (a_n)\},$$

не мора да биде бесконечно множество.

Пример 1. Нека низата (a_n) е зададена со општиот член

$$a_n = 1+(-1)^n .$$

Определувајќи ги постепено членовите имаме

$$a_1=0, a_2=2, \ldots, a_{2n-1}=0, a_{2n}=2, \ldots$$

па за множеството на вредности S добиваме дека $S_1=\{0,2\}$ е конечно мночество.

Пример 2. Ако низата (a_n) е зададена со општиот член

$$a_n=\frac{1+(-1)^n}{n} .$$

Определувајќи ги постепено членовите имаме

$$a_1=0, a_2=1, a_3=0, a_4=\frac{1}{2}, \ldots, a_{2n-1}=0, a_{2n}=\frac{1}{n}, \ldots$$

па за множеството на вредности S добиваме дека $S_2=\{0,1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\}$ е бесконечно множество.

Деф.2. За низата (a_n) велиме дека е ограничена ако е ограничено множеството од вредности на низата, а тоа значи сите членови на низата да се содржат во некој интервал (a,b) .

Да забележиме дека низите од пример 1 и пример 2 се ограничени. Првата затоа што S_1 е конечно множество а втората затоа што

$$0 \le a_n = \frac{1+(-1)^n}{n} \le \frac{2}{n} \le 1 .$$

Пример 3. Да ја разгледаме низата (a_n) со општ член $a_n = \frac{n^2+2n}{n+1}$. За неа ја имаме следната оценка

$$0 < a_n = \frac{n^2+2n}{n+1} > \frac{n^2+n}{n+1} = n \ ,$$

добивме за секој индекс соодветниот член на низата е поголем од индексот, а кое нешто значи дека низата не е ограничена.

Пример 4. За низата (a_n) со општ член $a_n = \frac{n^2-1}{n^2}$ ја имаме следната оценка

$$0 < a_n = \frac{n^2-1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n^2} < 1 \,,$$

а кое нешто значи дека низата е ограничена.

Пример 5. Да ја разгледаме низата (a_n) зададена со рекурентната формула за општиот член

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} \ , \ a_1 = \sqrt{2} \ .$$

За неа јасно е дека сите членови се позитивни. Лесно се докажува со помош на математичка индукција дека нејзиниот општ член ја има следната форма:

$$a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}} \ ,$$

притоа во формулата има n знаци за квадратен корен. Ја добиваме следната оценка

$$0 < a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}} < \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{4}}} = 2 \,,$$

а кое нешто значи дека низата е ограничена.

Пример 6. Нека низата (a_n) е зададена со рекурентната формула за општиот член

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n \,, \ a_1 = a > 0 \,.$$

За неа јасно е дека сите членови се позитивни. Користејќи се со математичка индукција ќе го определиме нејзиниот општ член. Заменувајќи во горната формула $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ добиваме:

$$a_2 = \frac{1}{1+2} a_1 = \frac{1}{3} a \,, \ a_3 = \frac{2}{2+2} a_2 = \frac{2}{4 \cdot 3} a \,, \ a_4 = \frac{3}{3+2} a_3 = \frac{2}{5 \cdot 4} a \,,$$

сега се наметнува претпоставката за општиот член

$$a_n = \frac{2}{(n+1) \cdot n} a \,.$$

Од рекурентната формула за a_{n+1} добиваме

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n = \frac{n}{n+2} \frac{2 \cdot a}{(n+1) \cdot n} = \frac{2 \cdot a}{(n+1) \cdot (n+2)} \,.$$

Со тоа ја потврдивме индуктивната претпоставка за формата на општиот член. Сега ја добиваме следната оценка

$$0 < a_n = \frac{2}{(n+1)\cdot n} a \leq a,$$

а кое нешто значи дека низата е ограничена.

Деф.3. За низата (a_n) велиме дека е монотоно растечка ако постои $n_o \in \mathbb{N}$, таков што $a_n \leq a_{n+1}$ за $n \geq n_o$, а пак ќе биде монотоно опаднувачка ако постои $n_o \in \mathbb{N}$, таков што $a_n \geq a_{n+1}$ за $n \geq n_o$.

Да забележиме дека формирајќи ја разликата $d = a_{n+1} - a_n$, јасно ако добиеме за $n \geq n_o$, $d > 0$ низата е монотоно растечка. Ако пак за $n \geq n_o$, $d < 0$ низата е монотоно опаднувачка .

Ако пак го формираме количникот $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, тогаш за $n \geq n_o$ и $q > 1$ низата е монотоно растечка, а за $n \geq n_o$ и $q < 1$ низата е монотоно опаднувачка.

Така на пример за низата од пример 3 ако ја формираме разликата добиваме

$$d = a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2 + 2(n+1)}{n+1+1} - \frac{n^2+2n}{n+1} = \frac{n^2+4n+3)}{n+2} - \frac{n^2+2n}{n+1} =$$

$$= \frac{n^3+5n^2+7n+3-n^3-4n^2-4n}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2+3n+3}{(n+2)(n+1)} > 0,$$

што значи дека низата е монотоно растечка.

За низата од пример 4. ако го формираме количникот $a_n = \frac{n^2-1}{n^2}$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}}{\frac{n^2-1}{n^2}} = \frac{n^4+2n^3}{n^4+2n^3-2n-1} = \frac{n^4+2n^3-2n-1+2n+1}{n^4+2n^3-2n-1} =$$

$$= 1 + \frac{2n+1}{n^4+2n^3-2n-1} > 1.$$

Атоа значи дека низата е монотоно растечка.

Во пример 5 a_{n+1} во последниот внатрешен корен има $2+\sqrt{2}$, за разлика од a_n кој има само 2. Значи $a_{n+1} \geq a_n$, односно низата е монотоно растечка.

Да забележиме дека кај секоја монотоно растечка низа нејзиното множество на вредности $S = \{a_n \mid a_n \in (a_n)\}$ е ограничено од доле, а за секоја монотоно опаднувачка низа е ограничено од горе.

Деф.4. За точката a велиме дека е точка на натрупување за низата (a_n) ако во секоја околина $V(a, \varepsilon)$ на точката a се содржат бесконечно многу членови на низата.

Низата од пример 1 евидентно е дека има две точки на натрупување 0 и 2, затоа што секоја $V(0, \varepsilon)$ за $\varepsilon \leq 1$ ги содржи сите непарни членови на низата, а секоја $V(2, \varepsilon)$ за $\varepsilon \leq 1$ ги содржи сите парни членови на низата.

Низата од пример 2 има една точка на натрупување а тоа е 0.

Низата од пример 3 нема точка на натрупување. Да се потсетиме дека таа не е ограничена.

6.2. Конвергентни низи

Деф.5. Велиме дека низата (a_n) конвергира кон реалниот број a или дека a е лимес (гранична вредност) на низата (a_n) и пишуваме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,,$$

ако за секој $\varepsilon > 0$, постои природен број (кој зависи од ε) таков што да важи

$$|a_n - a| < \varepsilon\,, \text{ за } n > n_o\,. \quad (1)$$

Од дефиницијата е јасно дека во секоја околина на точката a се наоѓаат бесконечно многу членови на низата, а надвор од секоја околина се наоѓаат конечно многу. Тоа значи дека точката a е точка на натрупување за низата.

За низата која не е конвергентна велиме дека е дивергентна.

Пример 7. За низата со општ член $a_n = \dfrac{n+5}{2n}$ гранична вредност е $a = \dfrac{1}{2}$. Да определиме колку членови на низата се надвор од околината $V\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{10}\right)$.

Решение. Од неравенството (1) имаме

$$\left|\frac{n+5}{2n} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{10}\,,\ \frac{5}{2n} < \frac{1}{10}\,,\ n > 25\,.$$

А тоа значи дека 25 членови на низата се надвор од оваа околина на точката $\dfrac{1}{2}$.

Пример 8. За низата со општ член $a_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n+5}$ се знае дека има гранична вредност е $a = 1$.

Да определиме колку членови на низата се надвор од околината $V\left(1,\dfrac{1}{5}\right)$.

Решение. Од неравенството (1) имаме

$$\left|\frac{n+(-1)^n}{n+5} - 1\right| < \frac{1}{5}\,,\ \frac{|(-1)^n - 5|}{n+5} < \frac{1}{5}\,.$$

Последното неравенство дава две можности:

а) $n = 2k$, $\dfrac{|(-1)^{2k} - 5|}{2k+5} < \dfrac{1}{5}$, $\dfrac{4}{2k+5} < \dfrac{1}{5}$, $2k+5 > 20$, $k > \dfrac{15}{2}$. Значи сите парни членови на низата почнувајќи од a_{16} се во наведената околина.

б) $n = 2k+1$, $\dfrac{|(-1)^{2k+1} - 5|}{2k+1+5} < \dfrac{1}{5}$, $\dfrac{6}{2k+6} < \dfrac{1}{5}$, $2k+6 > 30$, $k > 12$. Значи сите непарни членови на низата почнувајќи од a_{25} се во наведената околина.

Па спрема тоа надвор од наведената околина се 19 членови на низата.

Теорема 1. Секоја конвергентна низа има една гранична вредност.

Доказ. Нека низата (a_n) има две граични вредности a_2 и a_1 и нека го означиме бројот $|a_2 - a_1| = \varepsilon$. Бидејќи a_2 и a_1 се граници за низата (a_n) следува дека постојат природни броеви n_1 и n_2 такви што

$$|a_n - a_2| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ за } n > n_2 \text{ и } |a_n - a_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ за } n > n_1 .$$

Ако сега означиме $n_o = \max(n_1, n_2)$, тогаш за $n > n_0$ добиваме

$$\varepsilon = |a_2 - a_1| = |a_2 - a_n + a_n - a_1| \leq |a_2 - a_n| + |a_n - a_1| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

кое нешто не е можно, добивме $\varepsilon < \varepsilon$, па спрема тоа не е добра претпоставката дека една конвергентна низа има две граници. Значи $a_2 = a_1$.

Теорема 2. Секоја конвергентна низа е ограничена.

Доказ. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, тогаш за $\varepsilon = 1$ постои природен број n_o таков што $|a_n - a| < 1$, за $n > n_o$. А од ова следува $|a_n| = |a_n - a + a| < |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$. Значи добивме $|a_n| < 1 + |a|$. Нека е $M = \max\left\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots, |a_{n_o}|, 1 + |a|\right\}$. Јасно дека важи $|a_n| < M$, за секој $n \in \mathbb{N}$, односно сите членови на низата се во интервалот $(-M, M)$. А тоа значи дека низата е ограничена.

Да забележиме дека обратната теорма не важи.

За низата од пример 1 добивме дека е ограничена. Таа не е конвергентна бидејќи надвор од околината $V(0,\varepsilon)$, за $\varepsilon < 1$ се наоѓаат сите парни членови на низата (бесконечно многу), а исто така и надвор од околината $V(2,\varepsilon)$, за $\varepsilon < 1$ се наоѓаат сите непарни членови на низата (бесконечно многу), што значи дека ниедна од точките на натрупување не е граница.

Да ги определиме границите на низите од примерите 2 и 4 .

За низата од пример 2 $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n}$ точка на натрупување е 0, сите непарни членови се 0. Па од (1) имаме

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1 + (-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon, \ \frac{2}{n} < \varepsilon, \ n > \left[\frac{2}{\varepsilon}\right],$$

а тоа значи и дека сите парни членови со индекс $n > n_o = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$ се во интервалот $(-\varepsilon, \varepsilon)$, односно задоволен е условот за конвергенција.

За низата од пример 4 $a_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2}$ точка на натрупување е 1, па од (1) имаме

$$|a_n - 0| = \left|\frac{n^2 - 1}{n^2} - 1\right| < \varepsilon, \ \frac{1}{n^2} < \varepsilon, \ n > \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right],$$

а тоа значи дека сите членови на низата со индекс $n > n_o = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$ се во интервалот $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, односно задоволен е условот за конвергенција.

Деф.6. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, тогаш за низата (a_n) велиме дека е нула низа. Значи ако за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број n_o таков што $|a_n| < \varepsilon$ за $n > n_o$ тогаш низата (a_n) е нула низа.

Низата од пример 2 е нула низа, а исто така такви се и низите $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \left(\frac{n+1}{n^2}\right)$, $\left(\frac{1+2+3+...+n}{n^3}\right)$ итн.

Деф.7. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ За низата (a_n) велиме дека е бесконечно голема низа ако за секој $M > 0$ постои природен број n_o (кој зависи од M) таков што $|a_n| > M$ за $n > n_o$ и тоа го означуваме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Бесконечно голема низа е низата од пример 3, а такви се и низите со општи членови $\sqrt{n^2+1}, \sqrt{\frac{n+1}{\sqrt{n}}}$ итн.

Теорема 3. Секоја монотона и ограничена низа е конвергентна.

Доказ. Нека (a_n) е монотоно растечка и ограничена низа односно множеството на вредности $S = \{a_n \mid a_n \in (a_n)\}$ е ограничено. Нека $a = \sup S \in \mathbb{R}$. Сега имаме дека $a_n < a$ за секој n природен број. Од дефиницијата за супремум следува дека за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број n_o таков што $a - \varepsilon < a_{n_o} < a$, односно $|a_n - a| < \varepsilon$, за $n > n_o$, што значи конвергенција на низата (a_n) и имаме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup S .$$

На сличен начин се докажува конвергенцијата ако низата е монотоно опаднувачка. Тогаш постои инфимум на множеството S и притоа имаме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf S .$$

Теорема 4. Нека низите (a_n) и (b_n) се конвергентни и нека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, тогаш важи:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$. (за $b \neq 0$)

Доказ. Од конвергенцијата на низите (a_n) и (b_n) следува дека за даден $\varepsilon > 0$ постојат природни броеви n_1 и n_2 такви што

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{, за } n > n_1 \text{ и } |b_n - b| < \varepsilon \text{, за } n > n_2 .$$

За секој индекс n поголем од бројот $n_o = \max(n_1, n_2)$, добиваме а) $|(a_n \pm b_n)-(a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon$. Од произволноста на ε следува точноста на а).

б)

$|(a_n \cdot b_n)-(a \cdot b)| = |(a_n - a)\cdot(b_n - b) + a\cdot(b_n - b) + b\cdot(a_n - a)| \leq |a_n - a|\cdot|b_n - b| +$

$+|a|\cdot|b_n - b| + |b|\cdot|a_n - a| < \varepsilon^2 + |a|\varepsilon + |b|\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon + |a| + |b| = \varepsilon_1$. Од произволноста на добиениот број ε_1 следува точноста на б).

в) Точноста на ова тврдење се добива како последица од б) ако земеме $b_n = c$, константна низа.

г) Нека е $b \neq 0$. Ја оценуваме разликата

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n b - a b_n}{b b_n}\right| = \left|\frac{a_n b - ab + ab - a b_n}{b b_n}\right| = \left|\frac{(a_n - a)b + a(b - b_n)}{b b_n}\right| \leq$$

$\leq \dfrac{|a_n - a||b| + |a||b - b_n|}{|b||b_n|} < \dfrac{\varepsilon|b| + \varepsilon|a|}{|b|(|b| - \varepsilon)} = \varepsilon_1$. Од произволноста на малиот број ε_1 следува точноста на тврдењето г).

Теорема 5. Нека (a_n), (b_n) и (c_n) се бројни низи за кои важи

$$a_n \leq c_n \leq b_n \text{, за } n = 1,2,3,\ldots \quad (2)$$

и уште ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, тогаш важи $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Доказ. Нека се задоволени условите од теоремата. Од конвергенцијата на низите (a_n) и (b_n) следува дека за даден $\varepsilon > 0$ постојат природни броеви n_1 и n_2 такви што

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{, за } n > n_1 \text{ и } |b_n - a| < \varepsilon \text{, за } n > n_2 .$$

За секој индекс n поголем од бројот $n_o = \max(n_1, n_2)$, добиваме $a_n, b_n \in V(a, \varepsilon)$. Па бидејќи важи равенството (2) следува точноста на равенството $|c_n - a| < \varepsilon$, за
$n > n_o$, со што теоремата е докажана.

6.3. Примери важни за практиката во техника

Во понатамошниот текст ќе разгледаме некои важни и често користени примери во техничката практика во смисла на проверка на нивните особини.

Пример 9. Низата со општ член $a_n = q^n$, $q > 0$. Со оглед на тоа на тоа дека $a_{n+1} = q^{n+1}$ за низата ја добиваме оцената

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{q^{n+1}}{q^n} = q .$$

Јасно е дека за $q < 1$ низата е монотоно опаднувачка, а за $q > 1$ таа е монотоно растечка.

Во првиот случај за $q < 1$, низата е ограничена затоа што

$0 < q^n = a_n \leq a_1 = q$. Значи $a_n \in (0,q)$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Па од теорема 2 следува дека е конвергентна. Ќе докажеме дека граница на низата е 0.
Нека тргнеме од спротивното т.е. нека граница е $a \neq 0$ тогаш имаме $\lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = q \lim_{n\to\infty} q^n = qa$. Со ова ја добиваме равенката $a = qa$. Па бидејќи $a \neq 0$, следува $q = 1$, што е спротивно на претпоставката дека $q < 1$. Значи $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Во вториот случај за $q > 1$ ќе докажеме дека низата не е ограничена. Нека важи спротивното $a_n = q^n = (1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \ldots < A$, од што следува $n\varepsilon < A$, за секој $n \in \mathbb{N}$ Но ние знаеме дека за секои $A, \varepsilon \in \mathbb{R}$ постои природен број $n_o \in \mathbb{N}$ таков што $n_o\varepsilon < A < (n_o + 1)\varepsilon$, што претставува противречност со направената престпоставка за ограниченост на низата. Значи низата не е ограничена и $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} q^n = \infty$.

Пример 10. Низата со општ член $a_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$.
Со оглед на тоа што општиот член е сума на геометриската прогресија имаме

$$a_n = \frac{1-q^n}{1-q} .$$

Па во согласност со пример 9 низата е конвергентна за $|q| < 1$, а дивергентна за $|q| \geq 1$.

Пример 11. Низата со општ член $a_n = \dfrac{q^n}{n!}$ да се испита на монотоност ограниченост и конвергенција.

За количникот на $n-$тиот и $(n+1)-$иот член на низата имаме

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{q^{n+1} n!}{q^n (n+1)!} = \frac{q}{n+1} .$$

Од тоа што $q \in \mathbb{R}$ следува дека постои природен број n_o таков што важи неравенството $n_o < q < n_o + 1$, а од овде и точноста на следното неравенство

$$\frac{q}{n+1} < 1, \text{ за } n > n_o .$$

Последното неравенство значи дека низата е монотоно опаднувачка за $n > n_o$, а до $n = n_o$ е монотоно растечка. Јасно е дека низата е ограничена и дека важи $0 < a_n < a_{n_o}$. Сега според теорема 2 следува дека низата е конвергентна.

Бидејќи $a_n < q_1^n$, за $n > n_o$ каде $q_1 = \dfrac{q}{n_o + 1} < 1$ следува дека и

$$\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} q_1^n = 0 . \text{ Значи } \lim_{n\to\infty} a_n = 0 .$$

Пример 12. Да се испитаат особините на низата со општ член $a_n = \sqrt[n]{n}$.
Најнапред го формираме количникот

$$q=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}},\text{ следува } q^{n(n+1)}=\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}.$$

Со математичка индукција лесно се докажува точноста на неравенството

$$(n+1)^n<n^{n+1},\text{ за } n\geq 3.$$

Значи низата е монотоно опаднувачка, па бидејќи $a_n>0$ за секој n, добиваме дека низата е и ограничена, па согласно теорема 5 конвергира. Се наметнува претпоставката дека границата на низата е 1. Меѓутоа нека претпоставиме дека границата $a=1+\varepsilon$, каде што $\varepsilon>0$. Од тоа што низата е монотоно опаднувачка следува неравенството $1+\varepsilon<a_n=\sqrt[n]{n}$, од што следува $n>(1+\varepsilon)^n$. Со развивање на биномот имаме

$$n>1+n\varepsilon+\frac{(n-1)n}{2}\varepsilon^2+\ldots$$

Притоа важи оценката

$$n>\frac{(n-1)n}{2}\varepsilon^2$$

од што следува $\varepsilon<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$, а со оглед на тоа што $n\to\infty$ следува дека $\varepsilon=0$, односно $a=1$.

Пример 13. Да се испитаат особините на низата (a_n) зададена со општ член $a_n=\sqrt[n]{p}$, каде $p>0$.

Забелешка. Со слична постапка како во пример 12 се докажува дека границата е 1.

Пример 14. Бројот e. Овде ќе докажеме дека низата со општ член $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ е монотоно растечка и ограничена, па според теорема 2 е конвергентна. За таа цел општиот член на низата да го напишеме со помош на биномната формула во следниот облик:

$$a_n=(1+\frac{1}{n})^n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n}=2+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\ldots+$$
$$+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n}).$$

Сега по аналогија за a_{n+1} добиваме

$$a_{n+1}=2+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})+\ldots+$$
$$+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})(1-\frac{3}{n+1})\ldots(1-\frac{n-1}{n+1})+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})(1-\frac{3}{n+1})\ldots(1-\frac{n}{n+1}).$$

Бидејќи $1-\frac{i}{n+1}>1-\frac{i}{n}$ и бидејќи a_{n+1} има еден член повеќе од a_n, јасно е дека $a_{n+1}>a_n$, односно низата е монотоно растечка.

Имајќи во предвид дека $n! > 2^{n-1}$ и дека $1-\frac{i}{n} < 1$ за i од 1 до n, добиваме дека $a_n < 2+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+\ldots+(\frac{1}{2})^{n-1}=3.$ Значи низата е ограничена. Па во согласност со теорема 4 таа е конвергентна. Нејзината граница е бројот e, познат како Неперов број и е основа на природните логоритми. Неговата приближна вредност изнесува $e = 2,71828183.$

Теорема 6. Секој реален број a може да се претстави како бесконечна децимална дропка, односно како граница на низата (b_n) со општ член

$$b_n = a_o + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}, \qquad (3)$$

каде што a_i се природни броеви од нула до девет.

Пример 15. Да се определи реалниот број зададен со низата $a_n = 0,91919191\ldots$, зададена како периодичен децимален број.

Решение. Нека a_n ја запишеме во видот (3) т.е.

$$a_n = \frac{91}{100} + \frac{91}{100^2} + \frac{91}{100^3} + \ldots + \frac{91}{100^n} = \frac{91}{100}\left[1+\frac{1}{100}+\ldots+\frac{1}{100^{n-1}}\right] =$$

$$= \frac{91}{100}\frac{1-\frac{1}{100^n}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{91}{99}\left[1-\frac{1}{100^n}\right].$$ Добиваме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{91}{99}.$

Пример 16. Бесконечната децимална дропка 0,234252525... да се запише како реален број.

Решение. Со повторување на постапката добиваме:

$$a_n = \frac{234}{1000} + \frac{25}{10^5} + \frac{25}{10^7} + \ldots + \frac{25}{10^{2n+3}} = \frac{234}{1000} + \frac{25}{10^5}\left[1+\frac{1}{100}+\ldots+\frac{1}{100^{n-1}}\right] =$$

$$= \frac{234}{1000} + \frac{25}{10^5}\,\frac{1-\frac{1}{100^n}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{234}{1000} + \frac{25}{10^3 99}\left[1-\frac{1}{100^n}\right],$$

односно добиваме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{23291}{99000}.$

Деф.8. Низата (b_k) велиме дека е подниза на низата (a_n) ако:

а) за секој природен број k постои природен број n_k така што $b_k = a_{n_k}$;

б) за природните броеви $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ важи $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k$.

Да забележиме дека наместо низа (b_k) природно е да пишуваме низа (a_{n_k}).

Така на пример низите

$a_7, a_8, a_9, a_{10}, \ldots$

$a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots$

$a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots$

се поднизи на низата (a_n).

Пример 17. Низата со општ член $a_n = n^{(-1)^n}$, односно развиена:

$$a_1 = 1\,,\ a_2 = 2\,,\ a_3 = \frac{1}{3}\,,\ a_4 = 4\,,\ a_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}\,,\ a_{2n} = 2n\,,\ \ldots$$

има една точка на натрупување, а тоа е нула, меѓутоа не е конвергентна бидејќи надвор од секоја $\varepsilon -$ околина на нула, за $\varepsilon < 1$ се наоѓаат сите парни членови на низата.

На крајот ќе споменеме уште две важни теореми.

Теорема 7. Низата (a_n) конвергира кон реалниот број a ако и само ако секоја нејзина подниза конвергира кон a .

Теорема 8. Секоја ограничена низа има конвергентна подниза. (Ова е познатата Болцано-Вајерштрасова лема).

Доказ. Нека низата c_n е ограничена, што значи $a < c_n < b$. Ако го поделиме сегментот $[a,b]$ на два еднакви дела тогаш барем во едниот има бесконечно многу членови на низата. Нека го означиме со $[a_1,b_1]$ и нека го поделиме на два еднакви сегменти. Повторно барем во едниот има бесконечно многу членови на низата. Ако го означиме со $[a_2,b_2]$ и ја продолжиме постапката на тој начин ќе добиеме еден систем на вложени сегменти

$$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \ldots \supset [a_n,b_n],$$

притоа должината на сегментот $[a_n,b_n]$ изнесува $\frac{b-a}{2^n}$, односно добивме дека должината на овие отсечки се стреми кон нула, па постои единствен број c кој припаѓа на сите интервали $[a_i,b_i]$ за секој i. Ако од секој од овие интервали изберме по еден член од низата c_i таков што $c_i \neq c_{i+1}$ тогаш добиваме една подниза од низата c_n која конвергира кон бројот c .

6.4. Задачи за самостојно решавање

1. Да се определи општиот член на низата (a_n) ако се знаат неколку први членови:

а) $a_1 = 0\,,\ a_2 = 1\,,\ a_3 = 0\,,\ a_4 = \frac{1}{2}$;

б) $a_1 = \frac{1}{4},\ a_2 = \frac{1}{9}\,,\ a_3 = \frac{1}{2}\,,\ a_4 = \frac{1}{16}$;

в) $a_1 = a\,,\ a_{n+1} = \frac{n}{n+2}a_n$.

2. Да се определат точките на натрупување за низата со општ член:

а) $a_n = \frac{n-1}{n+2}$; б) $a_n = \frac{(1+(-1)^n)^n}{2^n}$;

в) $a_n = (n+1)^{(-1)^n}$; г) $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$.

3. Дали се ограничени низите зададени со општиот член:

а) $a_n = \frac{n}{n+2}$; б) $a_n = (1+(-1)^n)^n n$;

в) $a_n = n^{(-1)^n}$; г) $a_n = \frac{n}{n+2}\sin\frac{n\pi}{2}$.

4. Да се испита монотоноста на низите зададени со општите членови:

а) $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$; б) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+100}$;

в) $a_n = \sqrt[n]{10}$; г) $a_n = \sqrt[n]{n}$;

д) $a_n = \sqrt[n]{n!}$; ѓ) $a_n = \frac{q^n}{n!}$.

5. Користејќи нула низа дасе определат границите на низите зададени со општиот член:

а) $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$; б) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+20}$;

в) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{2n+1}$; г) $a_n = \frac{1+2+...+n}{n^2}$;

д) $a_n = \frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^3}$.

6. Користејќи ја теоремата за конвергенција на монотона и ограничена низа докажи дека низите зададени со општите членови

а) $a_n = \sqrt[n]{n}$; б) $a_n = \frac{10^n}{n!}$;

в) $a_n = \sqrt[n]{100}$; г) $a_n = \frac{1+2+...+n}{n^2}$.

се конвергентни, а потоа определи ја границата на секоја од низите.

7. Да се определат границите на низите зададени со рекурентните формули:

а) $a_{n+1} = \sqrt{a_n+6}$; б) $a_{n+1} = \frac{2(2a_n+1)}{a_n+3}$.

8. Колку членови од низата зададена со општиот член a_n се наоѓаат надвор од наведената околина на граничната точка:

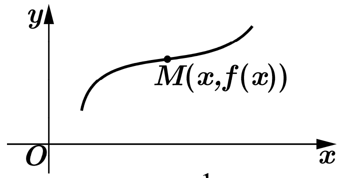
а) $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$, $V(\frac{1}{2},\frac{1}{100})$; б) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+25}$, $V(0,\frac{1}{100})$;

в) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{2n+1}$, $V(\frac{1}{2},\frac{1}{10})$; г) $a_n = \frac{1+2+...+n}{n^2}$; $V(\frac{1}{2},\frac{1}{10})$.

7. РЕАЛНИ ФУНКЦИИ ОД ЕДЕН РЕАЛЕН АРГУМЕНТ

7.1. Поим за реална функција

Деф.1. Нека $f: X \to Y$ ако X и Y се бројни множества, подмножества од $\mathbb{R}$, тогаш ќе велиме дека f е реална функција од еден реален аргумент (или од една реална независно променлива). Велиме дека f е дефинирана на множеството X, а прима вредности во множеството Y, подмножество од $\mathbb{R}$, ако поинаку не е нагласено.



сл. 1

Деф.2. Нека е дадена фуккцијата $f: X \to Y$. Множеството од сите подредени двојки $(x, f(x))$ такви што   се вика график на функцијата f и се означува со Γ_f. Значи

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}. \qquad (1)$$

Нека е дадена реалната функција f и нека е дефинирана на множеството $X \subset \mathbb{R}$ и нека во бројната рамнина π (сл.1) е фиксиран Декартов правоаголен координатен систем xOy. Тогаш графикот на функцијата f може да се претстави како геометриско место на точки M од рамнината π за кои важи

$$M = \{(x, y) \mid x \in X, f(x) = y\}. \qquad (2)$$

Од последното е јасно дека Γ_f може, ама и не мора да биде некоја рамнинска крива.

Ако за некои точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ може да се укаже на соодветните вредности $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ на функцијата f, тогаш велиме дека функцијата f е зададена табеларно. Притоа можеме да напоменеме дека таблицата на вредности може да биде добиена непосредно, од некој експеримент, или со приближни или точни пресметки.

Посебно е важен случајот кога реалните функции од еден реален аргумент се задаваат со формула (аналитично). Аналитичкиот начин на задавање на една функција е многу важен како во математичката анализа, така и за нејзината примена. Треба да имаме предвид дека кога велиме дека една фунција е зададена со соодветна формула, подразбираме некоја претходно опишана кореспонденција, чијшто симболичен запис е општо прифатен.

Треба да забележиме дека кога реалната функција f е зададена со соодветна формула пришто не е дадена информација за D_f и Y т.е. $(f: X \to Y)$, тогаш земаме $Y = R$, а дефиниционото подрачје на функцијата f го определуваме како множество на оние $x \in R$ за кои изразот $f(x)$ е реален број или кратко

$$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, f(x) \text{ има смисла}\} \qquad (3)$$

Пример 1. Да се определи дефиниционата област на функциите и приближно да се скицира нивниот график.

а) $f(x)=\frac{1}{x-2}$; б) $f(x)=\frac{x-2}{x^2+1}$;

в) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $f(x)=\frac{x^2}{|x|}$;

д) $f(x)=\log_2(x^2+2x-3)$.

Решение. Познато е дека дропка постои ако именителот е различен од нула. Корен со парен коренов показател постои ако поткорената величина е позитивна и логоритам постои од позитивни броеви. Затоа за дефиниционите области на овие функции добиваме:

а) $D_f=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$;

б) $D_f=(-\infty,+\infty)$;

в) $D_f=(-1,1)$;

г) $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;

д) $D_f=(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$.

Деф.3. Нека се $E,X,Y\subset\mathbb{R}$ и нека се дадени функциите $\varphi:E\to X$, $\psi:E\to Y$ такви што за секој $t\in E$, $\varphi(t)=x, x\in X$ и $\psi(t)=y, y\in Y$. Тогаш велиме дека функцијата $y=f(x)$ е зададена со параметарските равенки

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in E. \qquad (4)$$

Притоа графикот на функцијата f е множеството точки M зададено со

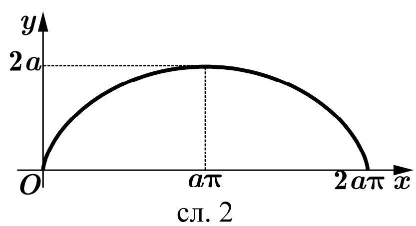
$$M=\{(x,y)\,|\,x=\varphi(t), y=\psi(t), t\in E\}. \qquad (5)$$

Пример 2. Да се скицира графикот на функцијата $y=f(x)$ зададена со параметарските равенки:

а) $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ б) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

Решение а) Запишувајќи ги формулите во обликот $\frac{x}{a}=\cos t$, $\frac{y}{b}=\sin t$, а потоа квадрирајќи и собирајќи ја добиваме равенката $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, а ова е централна елипса со оски a и b.

Решение б) Од тоа што во формулата за y фигурира само функцијата косинус која е периодична со период 2π следува дека и нашата параметарски зададена функција $y=f(x)$ е периодична функција со истиот период. За да го скицираме графикот на оваа функција најнапред ќе оформиме таблица на вредности а потоа добиените вредности систематизирани во точките $M_i(x_i,y_i)$ за

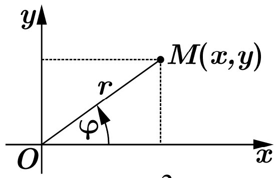


сл. 2

$i = 1,2,3,...,9$ ќе ги нанесеме на координатниот систем xOy (види сл.2.).

t	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$5\pi/6$	π	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$11\pi/6$	2π
x	0	$0{,}2a$	$0{,}6a$	$2{,}6a$	$3{,}1a$	$3{,}9a$	$5{,}7a$	$6{,}1a$	$6{,}3a$
y	0	$0{,}5a$	a	$1{,}8a$	$2a$	$1{,}5a$	a	$0{,}5a$	0

Местоположбата на една точка во рамнината покрај со Декартови координати може исто така еднозначно да се определи и на следниот начин. Низ точката $M(x,y)$ ќе повлечеме кружница со центар во координатниот почеток и ориентирана права кој минува низ координатниот почеток и точката M (види сл.3). Лесно се гледа дека ориентираноста на правата се обезбедува со аголот што таа го гради со $x-$оската и кој го означуваме со φ. А растојанието од координатниот почеток до точката M го означуваме со r. Овие две величини како подреден пар (r,φ) се викаат поларни координати. Па сега за определување на положбата на точката M, со поларни координати, јасно е дека е потребен координатен почеток (пол) и поларна оска (која обично е $x-$оската од Декартовите координати).



сл. 3

Исто така јасно е дека (се гледа од сл.3) следните релации

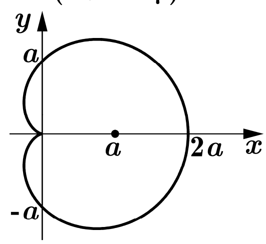
$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \qquad (6)$$

се всушност врски меѓу Декартовите и поларните координати. Треба посебно да забележиме дека за да се добијат сите точки од бројната рамнина доволно е φ да се менува од 0 до 2π, а r како растојание јасно дека треба да биде ненегативен број, односно $0 \le r < \infty$. Од горната дискусија следува еквиваленцијата на областите:

$$\begin{pmatrix} -\infty < x < +\infty \\ -\infty < y < +\infty \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \le r < +\infty \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Да се направи таблица на вредности и потоа да се скицира графикот на функцијата зададена со поларни координати $r = a(1+\cos\varphi)$.

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
r	$2a$	$1{,}7a$	a	$0{,}3a$	0	$0{,}3a$	a	$1{,}7a$	$2a$



сл. 4

7.2. Имплицитна и сложена функција

Нека е $D_F \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ и нека е $F : D_F \to \mathbb{R}$, така што на секоја подредена двојка $(x,y)\in D_F$ и го кореспондираме бројот

$$F((x,y)) = F(x,y).$$

Понатаму нека постои непразното множество $X \subset \mathbb{R}$ со следното својство: За секој $x \in X$, постои непразно множество $A_x \subset \mathbb{R}$, такво што

$$F(x,y)=0, \qquad (7)$$

за секој $y \in A_x$. Ако на секој $x \in X$ му кореспондираме еден елемент $y \in A_x$ да го означиме со $f(x)$, тогаш на таков начин добиваме една реална функција $f : X \to \mathbb{R}$ таква што $F(x, f(x)) = 0$, за секој $x \in X$.

Деф.4. Велиме дека функцијата $y = f(x)$ определена погоре е зададена нејавно (имплицитно) со равенката (7).

Веднаш се забележува дека за секој $x \in X$ множеството A_x може да се состои само од еден елемент, да има повеќе елементи или да биде празно. Ако има само еден елемент, тогаш со равенката (7) е зададена имплицитно само една функција. Ако има два или повеќе елементи, тогаш со равенката (7) зададени се имплицитно повеќе функции, а ако нема ниеден елемент, тогаш со равенката (7) не е зададена реална функција.

Пример 4. Да се определат, ако постојат, имплицитно зададените функции со равенките:

а) $x^2+y^2=1$; б) $x^2+y^3=1$; в) $x^2+y^2+a^2=0$.

Решение. а) Со оглед на тоа што множеството A_x за секој $x\in[-1,1]$ се состои од два елементи, а тоа се $-\sqrt{1-x^2}$ и $\sqrt{1-x^2}$, следува дека со равенката се зададени повеќе имплицитни функции. Така на пример функциите зададени се имплицитно со разгледаната равенка:

$f_1(x) = -\sqrt{1-x^2}$, $f_2(x) = \sqrt{1-x^2}$,

$$f_3(x)=\begin{cases}-\sqrt{1-x^2}, -1\le x\le 0\\ \sqrt{1-x^2}, 0\le x\le 1\end{cases}, \quad f_4(x)=\begin{cases}-\sqrt{1-x^2}, -1\le x\le \frac{1}{2}\\ \sqrt{1-x^2}, \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}.$$

Решение. б) Бидејќи множеството A_x за секој $x\in\mathbb{R}$ се состои само од еден елемент, а тоа е $\sqrt[3]{1-x^2}$, следува дека со равенката е зададена само една имплицитна функција, а тоа е $y=\sqrt[3]{1-x^2}$.

Решение. в) Бидејќи множеството A_x е празно со равенката не е зададена ниедна имплицитна функција.

Треба да забележиме дека при дефинирањето на имплицитната функција, со некој аналитижки израз, ние најчесто немаме информација за тоа каде е таа дефинирана. Дефиниционата област ја определуваме како множество вредности за независно променливата x за кои е возможен изразот

$$F(x, f(x)) = 0 .$$

Така на пример со равенката

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0 ,$$

имплицитно е зададена функцијата

$$y = -1 + \sqrt{- + 4x - x^2} ,$$

кое нешто лесно се проверува. Дефиниционата област на последната функција, со оглед на

$$1 + 4x - x^2 \geq 0 ,$$

добиваме дека е $\left[2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}\right]$.

Деф.5. Нека X, Y и Z се три непразни множества и нека f и g се функции такви што $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ и нека функцијата $h: X \to Z$ е дефинирана преку равенството

$$h(x) = g(f(x)) \text{, за секој } x \in X . \qquad (8)$$

Тогаш функцијата h се вика сложена функција или суперпозиција на функциите f и g и се означува со $g \circ f$. Значи по дефиниција

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{, за секој } x \in X .$$

Од начинот на конструкцијата на функцијата h следува дека таа има дефинициона област еднаква со множеството

$$D_h = \left\{ x \mid x \in D_f \wedge f(x) \in D_g \right\} .$$

Значи ако множеството D_h не е празно тогаш постои сложената функција h дефинирана со равенството (8).

Да забележиме ако X, Y и Z се три непразни множества подмножества од $\mathbb{R}$, тогаш f, g и h се реални функции од еден реален аргумент.

Пример 5. Нека се дадени реалните функции $f(x) = 9 - 8x - x^2$ и $g(x) = \sqrt{x}$. Да се определат суперпозициите: а) $h_1 = g \circ f$, б) $h_2 = f \circ g$, како и нивните дефинициони области.

Решение. а) $h_1(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(9 - 8x - x^2) = \sqrt{9 - 8x - x^2}$.
Функцијата $h_1(x)$ дефинирана е таму каде што $9 - 8x - x^2 \geq 0$. А тоа е на сегментот $[-9, 1]$.

б) $h_2(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 9 - 8\sqrt{x} - (\sqrt{x})^2 = 9 - 8\sqrt{x} - x$.
Функцијата $h_2(x)$ дефинирана е за секој x од $[0, +\infty)$.

Да забележиме примерот покажува дека во општ случај

$$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x),$$

а тоа значи дека суперпозицијата не е комутативна операција.

Теорема 1. Суперпозицијата на функции е асоцијативна операција, односно ако $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$, $h:Z\to T$, се три реални функции соодветно дефинирани на X , Y и Z , тогаш важи

$$(h\circ(g\circ f))(x)=((h\circ g)\circ f)(x)\text{, за секој } x\in X .$$

Доказ. Нека означиме $h_1(x)=(h\circ(g\circ f))(x)$ и $h_2(x)=((h\circ g)\circ f)(x)$. Имаме h_1 е супрпозиција на $h:Z\to T$ и $(g\circ f):X\to Z$. Значи $h_1:X\to T$. Сега и за h_2 имаме дека е суперпзиција на $(h\circ g):Y\to T$ и $f:X\to Y$. Значи и $h_2:X\to T$. Останува да докажеме дека исти елементи пресликуваат во исти елементи. Имено

$(h\circ(g\circ f))(x)=h((g\circ f)(x))=h(g(f(x)))$, за секој $x\in X$;

$((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))=h(g(f(x)))$, за секој $x\in X$.

Со што доказот е завршен.

Да забележиме дека сложените функции најчесто се задаваат со аналитички изрази и притоа посредните функции нивните дефинициони области и дефиниционата област на сложената функција не ни се познати. Ги определуваме согласно важечките конвенции. Така на пример функцијата

$f(x)=\sqrt{3-\log_2(x-2)}$, е суперпозиција на функциите :

$f_1(x)=x-2$, со дефинициона област $D_{f_1}=\mathbb{R}$;

$f_2(x)=3-\log_2 x$, со дефинициона област $D_{f_2}=(0,+\infty)$;

$f_3(x)=\sqrt{x}$, со дефинициона област $D_{f_3}=[0,+\infty)$;

Дефиниционата област на $f(x)$ ја добиваме од $1-\log_2(x-2)\geq 0$, $\log_2(x-2)\leq 1$, $x-2\leq 2^3$, $D_f=(-\infty,10)$.

Значи $f(x)=\sqrt{3-\log_2(x-2)}=f_3(f_2(f_1(x)))$.

7.3. Поим за инверзна функција

Деф.5. Нека f го пресликува заемно еднозначно множеството X на множеството Y , тогаш функцијата $f^{-1}:Y\to X$ таква што за секој $y\in Y$, важи $f^{-1}(y)=x$, каде што x е единствениот елемент од X со својството $f(x)=y$, се вика инверзна функција на функцијата $f:X\to Y$.

Очевидно е дека $f^{-1}:Y\to X$ заемно еднозначно го пресликува Y на X , па инверзната функција на f^{-1} ќе биде f . Значи важи

$$(f^{-1})^{-1}=f\text{ , } f^{-1}(y)=x\text{ , } (f^{-1})^{-1}(x)=f^{-1}(y)=x\text{ , } f(x)=y\text{ .}$$

Сега за двете различни суперпозиции на f и f^{-1} добиваме:

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x\text{ ;}$$

$$(f\circ f^{-1})(y)=f(f^{-1}(y))=f^{-1}(x)=y\text{ .}$$

Ова нешто покажува дека графиците на овие функции Γ_f и $\Gamma_{f^{-1}}$, се симетрични во однос на правата $y=x$. Исто така, од самата дефиниција, јасно е дека множеството на вредности на функцијата f е дефинициона област за функцијата f^{-1}, а дефиниционата област на функцијата f е множество на вредности на функцијата f^{-1}.

Пример 6. Дадена е функцијата $y=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$. Да се определи инверзната функција ако постои.

Решение. Имаме $D_y=\mathbb{R}$ и множеството на вредности $D_y^v=\mathbb{R}$. Да провериме дали пресликувањето е обратно еднозначно. Нека $x_1\neq x_2$ и нека важи $y(x_1)=y(x_2)$, односно

$$\frac{2^{x_1}-2^{-x_1}}{2}=\frac{2^{x_2}-2^{-x_2}}{2},\ 2^{x_1}-2^{-x_1}=2^{x_2}-2^{-x_2},\ 2^{x_1}-2^{x_2}=2^{-x_1}-2^{-x_2},$$

$2^{x_2}(2^{x_1-x_2}-1)=2^{-x_1}(1-2^{x_1-x_2})$ следува $(2^{x_1-x_2}-1)=0$, $x_1=x_2$, што значи даденото пресликување е обратно еднозначно, односно постои инверзна функција. За нејзино ефективно определување, со оглед на симетријата со почетната функција, во аналитичкиот израз на почетната функција ги менуваме местата на x и y и новодобиената равенка ја решаваме по y.

$$x=\frac{2^y-2^{-y}}{2},\ 2^{2y}-2x2^y-1=0.$$

Во последната равенка воведуваме смена $2^y=t$ и ја добиваме равенката $t^2-2xt-1=0$. Нејзини решенија се $t_{1/2}=x\pm\sqrt{x^2+1}$. Со оглсд на $x\leq\sqrt{x^2+1}$ и фактот дека $t>0$, следува дека единствено возможно решение е $t=x+\sqrt{x^2+1}$, односно $2^y=x+\sqrt{x^2+1}$, $y=\log_2(x+\sqrt{x^2+1})$.

Пример 7. Да се определи инверзната функција за функцијата $y=x^2$ ако постои.

Решение. И во овој пример $D_y=\mathbb{R}$, додека $D_y^v=[0,+\infty)$. Нека $x_1\neq x_2$ и нека важи $y(x_1)=y(x_2)$, односно $x_1^2=x_2^2$, $(x_1-x_2)(x_1+x_2)=0$, од $x_1\neq x_2$ следува $x_1+x_2=0$, односно $x_1=-x_2$. Значи пресликувањето на $\mathbb{R}$ не е обратно еднозначно, па функцијата нема инверзна на $\mathbb{R}$. Меѓутоа нејзините рестрикции $y_1(x)=x^2$, за $x\in(-\infty,0]$ и $y_2(x)=x^2$, за $x\in[0,+\infty)$ се обратно еднозначни пресликувања и имаат инверзни функции. Притоа $D_{y_1}^v=(-\infty,0]$, а $D_{y_2}^v=[0,+\infty)$. Сега за соодветните инверзни функции имаме $x=y^2$, $y_{1/2}=\pm\sqrt{x}$. Па инверзна за y_1 е $y=-\sqrt{x}$, а инверзна за y_2 е $y=\sqrt{x}$.

7.4. Аритметички операции со функциите од еден реален аргумент

Деф.7. Нека реалните функции f и g се дефинирани на множеството $X \subset \mathbb{R}$, тогаш збирот $f+g$, разликата $f-g$, производот $f \cdot g$ и количникот $\frac{f}{g}$ се исто така функции дефинирани со:

$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, за секој $x \in X$;

$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$, за секој $x \in X$;

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, за секој $x \in X$;

$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, за секој $x \in X$ и $g(x) \neq 0$.

Треба да забележиме дека во практиката најчесто за дефиниционата област на функциите f и g нема да имаме информација, па спрема тоа ќе ги определиме прво нив како D_f и D_g, а дефиниционата област на новодефинираните четири функции се добива како $D_f \cap D_g$ дополнително за количникот $g(x) \neq 0$.

Јасно е дека операциите собирање и множење на функции се асоцијативни, односно:

$$f+(g+h) = (f+g)+h = f+g+h, \; f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h = f \cdot g \cdot h$$

согласно нивните дефиниции

$$(f+g+h)(x) = f(x)+g(x)+h(x), \; (f \cdot g \cdot h)(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x).$$

Деф.8. Ако $c \in \mathbb{R}$ и ако $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ со особина $f(x) = c$, за секој $x \in \mathbb{R}$, тогаш функцијата f се вика константа.

Сега за призводот на функциите $f = c$ и g, за секој $x \in D_g$ имаме

$$(c \cdot g)(x) = c \cdot g(x).$$

Деф.9. Нека реалната функција f е дефинирана на множеството X кое е симетрично во однос на координатниот почеток, односно ако $x \in X$, тогаш и $-x \in X$. Ако за функцијата важи:

а) $f(-x) = -f(x)$, велиме дека е непарна;

б) $f(-x) = f(x)$, велиме дека е парна.

Да забележиме од геометриски аспект графикот на непарната функција е симетричен во однос на координатниот почеток, а графикот на парната функција е симетричен во однос на $y-$оската.

Пример 8. Нека е $f(x) = x^n$, каде што $n \in \mathbb{N}$. Да се испита оваа функција на парност непарност.

Решение. Дефинирана е на $\mathbb{R}$ па спрема тоа првиот услов е задоволен. Сега добиваме $f(-x)=(-x)^n=\begin{cases}-x^{2k+1}, n=2k+1,\\ x^{2k}, n=2k.\end{cases}$ а тоа значи дека функцијата е непарна ако n е непарен број, а е парна ако n е парен број.

Пример 9. Докажи дека:

а) Збир, разлика, производ и количник на две парни функции е парна функција.

б) Збирот и разликата на две непарни функции се непарни функции, а производот и количникот се парни функции.

Деф.10. Нека реалната функција f е дефинирана на множеството $X\subset\mathbb{R}$ и нека постои реален број p кој го задоволува условот:

Од $x\in X$ следува $x+p\in X$ и $x-p\in X$.

Ако сега за функцијата f важи

$$f(x+p)=f(x)\text{, за секој } x\in X\text{,}$$

тогаш за функцијата f велиме дека е периодична. Ако p е најмалиот број со таа особина, тогаш за функцијата f велиме дека е $p-$ периодична, односно периодична функција со период p .

Пример 10. Нека реалната функција $f(x)$ е $p-$ периодична. Докажи дека функцијата $F(x)=f(ax)$ исто така е периодична функција со период $\frac{p}{a}$.

Решение. Ако е $F(x)$ периодична функција со период $\frac{p}{a}$ тогаш треба да важи $F\left(x+\frac{p}{a}\right)=F(x)$. Со проверка добиваме:

$$F\left(x+\frac{p}{a}\right)=f\left(a\left(x+\frac{p}{a}\right)\right)=f(ax+p)=f(ax)=F(x)\text{.}$$

Со што доказот е завршен.

Да забележиме дека графикот на било која $p-$периодична функција се добива со транслација на графикот на една нејзина рестрикција на кој и да било полуотворен интервал со должина p .

Деф.11. За една реална функција f велиме дека е ограничена од горе ако постои реален број M таков што $f(x)\le M$, за секој $x\in D_f$, односно подрачјето од вредности на функцијата D_f^v е ограничено множество од горе. Ако пак постои m таков што $m\le f(x)$, за секој $x\in D_f$, односно подрачјето од вредности на функцијата D_f^v е ограничено множество од доле, тогаш за функцијата f велиме дека е ограничена од доле. Ако постојат реалните броеви m и M такви што $m\le f(x)\le M$, односно подрачјето од вредности на функцијата $D_f^v \subset [m,M]$ е ограничено множество, тогаш за функцијата f велиме дека е ограничена функција.

Пример11. Дали е ограничена функцијата :

а) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$, б) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{1+x^2}$.

Решение. а) Со оглед на неравенството $x<1+x^2$, добиваме дека $-1\leq \dfrac{x}{1+x^2}\leq 1$, односно функцијата е ограничена.

б) Јасно дека $f(x)>0$. $f(x)=\dfrac{x^2+2}{1+x^2}=\dfrac{x^2+1+1}{1+x^2}1+\dfrac{1}{1+x^2}\leq 1+1=2$. Добивме $0<f(x)\leq 2$, за секој $x\in D_f$, што значи дека функцијата е ограничена.

Деф.12. Ако за било кои $x_1,x_2\in D_f$ такви што $x_1\leq x_2$, важи $f(x_1)\leq f(x_2)$, тогаш за функцијата велиме дека е монотоно растечка. Ако пак при истите услови важи $f(x_1)\geq f(x_2)$, тогаш за функцијата велиме дека е монотоно опаднувачка. Ако важат стриктни неравенства во тој случај за функцијата ќе велиме дека е строго монотоно растечка, односно строго монотоно опаднувачка.

Теорема 2. Нека множествата $X,Y\subset\mathbb{R}$. Ако функцијата $f:X\rightarrow Y$ е строго монотоно растечка (опаднувачка) функција, тогаш постои инверзна функција $f^{-1}:Y\rightarrow X$ и е исто така строго монотоно растечка (опаднувачка) функција.

Доказ. Нека f е строго монотоно растечка функција т.е. за било кои $x_1,x_2\in X$ важи $f(x_1)<f(x_2)$. Од тоа непосредно следува ако $x_1\neq x_2$ тогаш и $f(x_1)\neq f(x_2)$ па $f:X\rightarrow Y$ е обратно еднозначно пресликување. А тоа значи дека постои инверзно пресликување $f^{-1}:Y\rightarrow X$. Нека претпоставиме дека f^{-1} не строго монотоно растечка функција. Од тоа следува дека постојат $y_1,y_2\in Y$ такви што $y_1<y_2$, а за нив да важи $f^{-1}(y_1)>f^{-1}(y_2)$. Но f е строго монотоно растечка функција па за неа важи $f(f^{-1}(y_1))>f(f^{-1}(y_2))$, односно $y_1>y_2$, а тоа е спротивно на направената претпоставка. Значи f^{-1} е строго монотоно растечка функција. На сличен начин се докажува и во случај кога f е строго монотоно опаднувачка функција.

Деф.13. Нека реалната функција f е дефинирана на множеството $X\subset\mathbb{R}$ и нека множеството од вредности на функцијата го означиме со:

$$f(X)=\{f(x)\,|\,x\in X\}.$$

а) Ако $f(X)$ има најголем елемент т.е. ако постои $a \in X$ така што $f(x) \leq f(a)$) за секој $x \in X$, тогаш велиме дека функцијата f има најголема вредност во точката a и пишуваме $f(a) = \max f$.

б) Ако $f(X)$ има најмал елемент т.е. ако постои $a \in X$ така што $f(x) \geq f(a)$ за секој $x \in X$, тогаш велиме дека функцијата f има најмала вредност во точката a и пишуваме $f(a) = \min f$.

в) Ако пак,множеството $f(X)$, има горна (долна) меѓа, тогаш таа се вика супремум (инфимум) за функцијата f и се означува со $\sup f$ (односно $\inf f$).

Во врска со ставовите а) и б) и в) од деф.13 можеме да забележиме дека функцијата f има најголема (најмала) вредност ако и само ако постои точка $a \in X$, така што $\max f = f(a) = \sup f$ (односно $\min f = f(a) = \inf f$).

Деф.14. Нека реалната функција f е дефинирана на множеството $X \subset \mathbb{R}$ и нека a е внатрешна точка на X,а тоа значи дека постои $\varepsilon > 0$ така што важи $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset X$.

а) Ако постои број $\delta > 0$ таков што интервалот $(a - \delta, a + \delta) \subset X$ и уште $f(a + h) \leq f(a)$,за секој h со својство $|h| < \delta$, тогаш велиме дека функцијата f има локален максимум . Ако пак е задоволено $f(a + h) < f(a)$, тогаш функцијата f има строг локален максимум.

б) Ако постои број $\delta > 0$ таков што интервалот $(a - \delta, a + \delta) \subset X$ и уште $f(a + h) \geq f(a)$, за секој h со својство $|h| < \delta$, тогаш велиме дека функцијата f има локален минимум. Ако пак е задоволено $f(a + h) > f(a)$), тогаш функцијата f има строг локален минимум.

Да забележиме дека локалните максимуми и минимуми вообичаено е да се викаат локални екстреми.

Пример 12. Докажи дека функциите дефинирани подолу имаат локални минимуми:

а) $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$ има локален минимум за $x = -1$.

б) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{за } x \neq 0 \\ -1, & \text{за } x = 0 \end{cases}$ има локален минимум во точката $x = 0$.

Решение. а) Навистина $f(x) = 2x^2 + 4x - 1 = 2(x+1)^2 - 3$, па за $-1 + |h|$ имаме $f(-1 + |h|) = 2h^2 - 3 > -3 = f(-1)$, за секој $h \in \mathbb{R}$. А тоа е услов функцијата да има локален минимум во точката $x = -1$.

б) За функцијата $f(x)=\begin{cases} x, & \text{за } x\neq 0 \\ -1, & \text{за } x=0 \end{cases}$, за секој h со особина $|h|<1$ имаме $f(0+h)=h>-1$. А кое нешто е услов функцијата да има локален минимум во точката $x=0$.

7.5. Задачи за самостојно решавање

1. За функцијата $f(x)=x^3$ да се пресмета $f\left(\frac{a+t}{2}\right)-f\left(\frac{a-t}{2}\right)$.

2. Да се пресмета вредноста на функциите:

а) $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$; б) $g(x)= x^3+\frac{1}{x^3}$;

за оние вредности на x за кои важи $x+\frac{1}{x}=5$.

3. Нека е $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ да се определи $f(f(x))$.

4. Ако се $f(x)=3x^2+2x+3$ и $g(x-1)=\sqrt{x^2-2x+3}$ определи $f(x+1)$ и $g(x)$.

5. Нека се дадени функциите $f(x)=x^2+x+2$ и $g(x)=2^x$. Да се определат суперпозициите $(f\circ g)(x)$ и $(g\circ f)(x)$.

6. Нека функцијата $\varphi(x)$ е зададена на следниот начин

$$\varphi(x)=\begin{cases} 2^x, x\leq 0 \\ 2, 0<x\leq 1 \\ x-1, x<1 \end{cases}.$$

Да се пресметаат вредностите на функцијата за следните вредности на независно променливата $x=-2$, 0, $\frac{1}{2}$, 1, 3.

7. Да се определат функциите $f(x)$ и $g(x)$ ако се знае дека:

а) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$, б) $g\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$.

8. Во остроаголен триаголник ABC со основа $\overline{AB}=a$ и висина h што одговара на основата , впишан е правоаголник чија една страна лежи на основата $\overline{AB}=a$. Да се изрази плоштината на овој правоаголник како реална функција од еден аргумент x, кој е должината на неговата висина. Да се определи рестрикцијата од оваа функција што одговара на геометрискиот проблем.

9. Да се определат дефиниционите области за функциите.

а) $y=\sqrt{4-3x-x^2}$, б) $y=\frac{4x+3}{x^2-2x-3}$,

в) $y=\log(2-x-x^2)$, г) $y=\log_2 x$,

д) $y=\arcsin\frac{2-x}{x+1}$, ѓ) $y=\frac{1}{2-x}+\frac{3x+1}{x+2}$, е) $y=\sqrt{2-x}\cdot\log(10+x)$, ж) $y=\sqrt{2-x-x^2}\cdot\dfrac{4x+3}{x^2-2x-3}$,

з) $y=\log(9-x^2)$.

10. Да се скицираат графиците на функциите:

а) $y=2^{1-x}$, б) $y=\log(3-2x)$,

в) $y=5-4x-x^2$, г) $y=\sqrt{5-4x-x^2}$,

д) $y=\sqrt{x}$, ѓ) $y=\sqrt[3]{x^2}$, е) $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}$,

ж) $y=|x-1|$, з) $y=|x^2+x-2|$,

ѕ) $y=3\sin 2x$, и) $y=2\cos\dfrac{x}{2}$,

ј) $y=\operatorname{tg}\dfrac{2x}{3}$, к) $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$,

л) $y=\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

11. Да се скицираат графиците на функциите:

а) $y=\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, б) $y=\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$,

а потоа да се определат инверзните функции и да се скицираат нивните графици.

12. Да се скицираат графиците на параметарски зададените функции:

а) $\begin{matrix}x=2t-1\\ y=2t+3\end{matrix}$, б) $\begin{matrix}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{matrix}$, в) $\begin{matrix}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{matrix}$,

г) $\begin{matrix}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{matrix}$, д) $\begin{matrix}x=2t+3\\ y=2t-t^2\end{matrix}$, ѓ) $\begin{matrix}x=2(t-\sin t)\\ y=3(1-\cos t)\end{matrix}$.

13. Да се скицираат графиците на функциите $y=y(x)$ што се зададени имплицитно со равенките:

а) $y^2-4x^2=16$, б) $x=\log(3-2x+y)$,

в) $y^2=5-4x-x^2$, г) $x^2+y^2+4x-4y-1=0$,

д) $9(x-1)^2+4(y+2)^2=36$.

14. Прво преминувајќи во поларни координати да се скицираат графиците на функциите зададени имплицитно со равенките:

а) $(x^2+y^2)^2=8xy$, б) $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$,

в) $\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, г) $\ln(x^2+y^2)=\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

15. Да се скицираат графиците на сложените функции:

а) $y=\sqrt{4-3x-x^2}$, б) $y=\dfrac{4x+3}{2x-3}$,

в) $y=\log(2-x-x^2)$, г) $y=|x^2-4x-5|$,

д) $y=\log_2(1+x^2)$, ѓ) $y=2^{\frac{1}{1-x}}$,

е) $y^2=2x-3$, ж) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$,

з) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$, ѕ) $y=e^{-x^2}$.

7.6. Граници на реални функции од еден реален аргумент

Деф.15. Нека реалната функција f е дефинирана на интервалот (a,b) освен можеби во точката $c\in(a,b)$. Велиме дека реалниот број A е лимес, гранична вредност (граница) на функцијата f во точката c ако за секој $\varepsilon>0$ постои позитивен реален број δ, кој зависи од ε, таков што

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \text{ за } |x-c|<\delta. \quad (10)$$

Притоа пишуваме

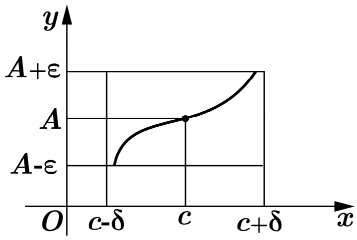
$$\lim_{x\to c} f(x)=A. \qquad (11)$$

Да забележиме дека оваа дефиниција за граница суштински е иста со дефиницијата за граница на низа. Условот од таму $n\geq n_o$ заменет е со $|x-c|<\delta$.

Исто така забележуваме дека во смисла на околини деф.15 ни значи

$$f(x)\in V(a,\varepsilon), \text{ за секој } x\in V(a,\delta).$$

На сл.5 даваме геометриска илустрација за искажаната дефиниција.



сл. 5

Пример 13. Да се пресмета граничната вредност на функцијата

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+9}{x^2-9},$$

ако аргументот се стреми кон –3.

Решение. Со оглед на тоа што и броителот и именителот се анулираат за вредноста на аргументот $x=-3$, што значи дека функцијата не е дефинирана во таа точка добиваме:

$$\lim_{x\to-3} f(x)=\lim_{x\to-3}\frac{x^3+3x^2+3x+9}{x^2-9}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x^2+3)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to-3}\frac{(x^2+3)}{(x-3)}=\frac{9+3}{-3-3}=-2.$$

Значи $\lim_{x\to-3} f(x)=-2$.

Да забележиме уште еднаш дека не е битно дали функцијата е дефинирана или не е дефинирана во точката c.

Пример 14. Нека функцијата $f(x)$ е дефинирана на R на следниот начин:

$$f(x)=\begin{cases} x, x\neq 0\\ -1, x=0\end{cases}.$$

Да се определи границата на оваа функција кога аргументот се стреми кон 0.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$. Забележуваме дека границата е различна од вредноста на функцијата во самата точка.

Деф.16. Нека f е реална функција дефинирана во интервалот (a,b), освен можеби во точката $c \in (a,b)$ и нека (c_n) е било која низа за која важи $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$. Велиме дека реалниот број A е граница за функцијата f ако низата $(f(c_n))$ конвергира кон A за било која низа (c_n) опишана погоре.

Теорема 3. Двете последни дефиниции деф.15 и деф.16 се еквивалентни.

Доказ. Нека се задоволени условите од дефиниција 15 односно нека

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ за } |x - c| < \delta, \quad (10)$$

и нека за произволната низа (c_n) важи $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$. Ова значи дека за $n \geq n_o$, $|c_n - c| < \delta$. Сега од причини на условот (10) важи $|f(c_n) - A| < \varepsilon$, за $n \geq n_o$. А тоа е конвергенција на низата $(f(c_n))$ кон A, Што заправо значи конвергенција на функцијата во смисла на деф.16.

Обратно. Нека функцијата конвергира во смисла на деф.16. Тоа значи $\lim\limits_{n\to\infty} f(c_n) = A$, за било која низа (c_n) за која $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$. Притоа имаме $a < c_n < b$.

Нека претпоставиме дека $\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq A$ во смисла на деф.15, а тоа значи дека постои барем еден ε_o за кој не може да се избере δ, т.е. за кој и да било $\delta_n > 0$ меѓу точките x за кои $|x - c| < \delta_n$ мора да се најде барем една точка, да ја означиме со c_n, за која важи $|f(c_n) - A| > \varepsilon_o$. Земајќи $\delta_n = \frac{1}{n}$, каде $n \in \mathbb{N}$ добиваме низа (c_n) за која $|c_n - c| < \frac{1}{n}$, уште и $a < c_n < b$, а да важи $|f(c_n) - A| > \varepsilon_o$. Последното противречи на конвергенцијата на функцијата во смисла на деф.16. Значи не е добра претпоставката дека $\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq A$ во смисла на деф.15. Со тоа теоремата е докажана.

Да забележиме во деф.15 рековме функцијата е дефинирана во интервалот (a,b), па јасно е дека посебен интерес претставуваат границите

$$\lim_{x\to a} f(x), \quad \lim_{x\to b} f(x).$$

За првата под околина на точката a се подразбира $V(a,\varepsilon) = (a, a+\varepsilon)$, а за втората $V(b,\varepsilon) = (b-\varepsilon, b)$. Овие граници обично се означуваат со $f(a+0)$ и $f(b-0)$ и се викаат лева граница на функцијата во точката $x = b$, односно десна граница на функцијата во точката $x = a$. Се дефинираат на следниот начин

$$f(a+0) = \lim_{\substack{x\to a+\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} f(x), \quad f(b-0) = \lim_{\substack{x\to b-\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} f(x).$$

Теорема 4. Нека реалната функција f е дефинирана на интервалот (a,b) освен можеби во точката $c\in(a,b)$. Функцијата има граница во точката c, ако има лева и десна граница во таа точка и ако се тие меѓу себе еднакви односно ако важи

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{\substack{x\to c-\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to c+\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} f(x).$$

Доказ. Нека $\lim_{x\to c} f(x)=A$. Тоа значи за секој $\varepsilon>0$, постои $\delta>0$ така што $|f(x)-A|<\varepsilon$, за $|x-c|<\delta$. А од тука добиваме дека $|f(x)-A|<\varepsilon$, за $x\in(c-\delta,c)$, што значи постоење на левата граница $f(c-0)$. Исто така добиваме $|f(x)-A|<\varepsilon$, за $x\in(c,c+\delta)$, што значи постоење на десната граница $f(c+0)$. Јасно дека $f(c-0)=f(c+0)=A$.

Обратно. Нека постојат левата $f(c-0)$ и десната $f(c+0)$ граница на функцијата f во точката c и нека се еднакви т.е. . $f(c-0)=f(c+0)=A$. Од тоа што A е лева граница имаме $|f(x)-A|<\varepsilon$, за $x\in(c-\delta_1,c)$, а од тоа што е десна граница имаме $|f(x)-A|<\varepsilon$, за $x\in(c,c+\delta_2)$. Ако со δ означиме $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, тогаш добиваме $|f(x)-A|<\varepsilon$, за $x\in(c-\delta,c+\delta)$, а кое нешто претставува услов да важи $\lim_{x\to c} f(x)=A$. Со што ја докажавме теоремата.

Пример15. Пресметај лева и десна граница од функцијата

$$f(x)=2^{\frac{1}{1-x}}, \text{ во точката } x=1.$$

Решение. За левата граница имаме

$$f(1-0)=\lim_{\substack{x\to 1-\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} 2^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2^{\frac{1}{1-(1-\varepsilon)}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2^{\frac{1}{\varepsilon}} = 2^{\infty}=\infty;$$

$$f(1+0)=\lim_{\substack{x\to 1+\varepsilon \\ \varepsilon\to 0}} 2^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2^{\frac{1}{1-(1+\varepsilon)}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2^{-\frac{1}{\varepsilon}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Бидејќи левата и десната граница се различни согласно теорема 4 функцијата нема граница во точката $x=1$.

Теорема 5. Ако функцијата f има граница во точката $x=c$, тогаш постојат позитивни броеви η и M такви што $|f(x)|\le M$, за $x\in V(c,\eta)$.

Доказ. Нека $\lim_{x\to c} f(x)=A$ и нека $\varepsilon=1$, тогаш постои $\delta>0$ така што

$$|f(x)-A|<1, \text{ за } x\in(c-\delta,c+\delta), \text{ односно добиваме}$$

$$|f(x)|=|f(x)-A+A|<|f(x)-A|+|A|<1+|A|.$$

Ако сега избереме $\eta=\delta$ и $M=1+|A|$ ја добиваме точноста на теоремата.

Забележуваме дека ова нешто укажува на извесна локална ограниченост на функцијата која има ограничена вредност во некоја точка.

Теорема 6. Ако две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имаат иста граница во точката c и ако постои $\delta > 0$ таков што $f_1(x) \le \varphi(x) \le f_2(x)$, за секој $x \in V(c,\delta)$, тогаш и функцијата $\varphi(x)$ во точката c ја има истата граница.

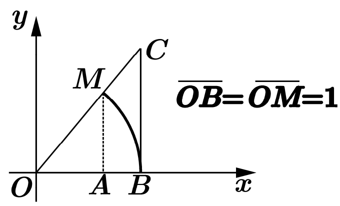
Доказ. Нека е точно равенството $\lim\limits_{x\to c} f_1(x) = \lim\limits_{x\to c} f_2(x) = A$ и нека важи неравенството $f_1(x) \le \varphi(x) \le f_2(x)$, за секој $x \in V(c,\delta)$. Сега имаме дека за секој $\varepsilon > 0$ постојат позитивни броеви δ_1 и δ_2 такви што важи $|f_1(x) - A| < \varepsilon$, за $x \in V(c,\delta_1)$ и $|f_2(x) - A| < \varepsilon$, за $x \in V(c,\delta_2)$. Ако избереме $\delta' = \min(\delta, \delta_1, \delta_2)$, тогаш во околината $V(c,\delta')$ на точката c добиваме точност на сите три неравенства, па ја имаме следнава оценка

$$|\varphi(x) - A| = |\varphi(x) - f_1(x) + f_1(x) - A| < |\varphi(x) - f_1(x)| + |f_1(x) - A| <$$
$$< |f_2(x) - f_1(x)| + |f_1(x) - A| < |f_2(x) - A + A - f_1(x)| + \varepsilon <$$
$$< |f_2(x) - A + A - f_1(x)| + \varepsilon < |f_2(x) - A| + |A - f_1(x)| + \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon .$$

Со што теоремата е докажана.

Пример 15. Користејќи ја претходната теорема да се пресмета границата

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} .$$



сл. 6

Решение. Имајќи во вид сл.6 во која $\overline{OB} = \overline{OA} = 1$, $\widehat{BM} = x$, $\overline{AM} = \sin x$, $\overline{OA} = \cos x$, $\overline{BC} = \operatorname{tg} x$. За плоштината на триаголниците добиваме:

$$P_{\Delta OAM} = \frac{1}{2}\sin x \cos x , \quad P_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} tgx ,$$

$$P_{\Delta OBM} = \frac{1}{2} x .$$

Притоа евидентна е од сликата споредбата на плоштините на овие триаголници

$$P_{\Delta OAM} < P_{\Delta OBC} < P_{\Delta OBM} ,$$

од што следува неравенството

$$\sin x \cos x < x < tgx .$$

Во последното неравенство делејќи со $\sin x$ добиваме

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} .$$

Бидејќи $\lim\limits_{x\to o} \cos x = \lim\limits_{x\to o} \frac{1}{\cos x} = 1$ следува исполнети се сите услови од теорема 6 па добиваме дека $\lim\limits_{x\to o} \frac{x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to o} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Теорема 7. Нека реалните функции f и g се дефинирани во интервалот (a,b) освен можеби во точката $c \in (a,b)$ и нека важи $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A, \lim\limits_{x\to c} g(x) = B$, при што A и B се реални броеви, тогаш точни се тврдењата:

а) Границата на збирот или разликата на овие две функции е збир или разлика од границите на овие две функции, односно точно е равенството

$$\lim_{x\to c}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to c}f(x)\pm\lim_{x\to c}g(x)=A\pm B\ ;$$

б) Границата од производот на овие две функции е производ од границите на овие две функции, односно точно е равенството

$$\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to c}f(x)\cdot\lim_{x\to c}g(x)=A\cdot B\ ;$$

в) Ако $B\neq 0$ тогаш границата од количникот на на овие две функции е количник од границите на овие функции, односно точно е равенството

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to c}f(x)}{\lim\limits_{x\to c}g(x)}=\frac{A}{B}\,.$$

Треба да забележиме ако $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to c}g(x)=-\infty$, тогаш величината $A+B=\infty+(-\infty)$ не е определена . Исто така неопределени се и величините $A\cdot B=0\cdot\infty$, $\frac{A}{B}=\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{A}{B}=\frac{0}{0}$.

Деф.17. Нека е дадена реалната функција $y=f(x)$ од еден реален аргумент, тогаш за правата дефинирана со:

а) $y=b$ велиме дека е хоризонтална асимптота (ХА)кон графикот на функцијата $y=f(x)$ако важи $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$. Ако пак важи $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$ се вика лева хоризонтална асимптота (ЛХА), а за $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ се вика десна хоризонтална асимптота (ДХА).

б) $x=a$ велиме дека е вертикална асимптота (ВА)кон графикот на функцијата $y=f(x)$ако важи $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$. Ако пак важи $\lim\limits_{x\to a-o}f(x)=\infty$ се вика лева вертикална асимптота (ЛВА), а за $\lim\limits_{x\to a+o}f(x)=\infty$ се вика десна вертикална асимптота (ДВА).

в) $y=ax+b$ велиме дека е коса асимптота (КА)кон графикот на функцијата$y=f(x)$ако важи

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)=0\,. \qquad (*)$$

Ако пак важи $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ се вика лева коса асимптота (ЛКА), а за $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ се вика десна коса асимптота (ДКА).

Да забележиме дека од равенството (*) може да се добијат коефициентите за косата асимптота. Имено ако поделиме со x се добива

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\,.$$

А со замена на последното во (*) се добива и $b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$.

Пример 16. Да се определат асимптотие, ако ги има, за графиците на функциите:

а) $y=\frac{x+2}{x-3}2^{\frac{1}{x-1}}$, б) $y=\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt{x^2+1}}$.

Решение. а) Со оглед на

$$\lim_{\varepsilon\to o}\frac{3+\varepsilon}{3+\varepsilon-3}2^{\frac{1}{3+\varepsilon-1}}=\lim_{\varepsilon\to o}\frac{3+\varepsilon}{\varepsilon}2^{\frac{1}{2+\varepsilon}}=\frac{3}{0}2^{\frac{1}{2}}=\infty,$$

правата $x=3$, е вертикална асимптота.

А со оглед на

$$f(1-0)=\lim_{\varepsilon\to o}\frac{1-\varepsilon+2}{1-\varepsilon-3}2^{\frac{1}{1-\varepsilon-1}}=\lim_{\varepsilon\to o}\frac{3-\varepsilon}{-2-\varepsilon}2^{\frac{1}{-\varepsilon}}=\frac{3}{-2}2^{-\infty}=0 \text{ и}$$

$$f(1+0)=\lim_{\varepsilon\to o}\frac{1+\varepsilon+2}{1+\varepsilon-3}2^{\frac{1}{1+\varepsilon-1}}=\lim_{\varepsilon\to o}\frac{3+\varepsilon}{-2+\varepsilon}2^{\frac{1}{\varepsilon}}=\frac{3}{-2}2^{\infty}=-\infty,$$

правата $x=1$ е десна вертикална асимптота.

А со оглед на

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x-3}2^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}2^{\frac{1}{x-1}}=\frac{1+0}{1-0}2^{o}=1,$$

правата $y=1$ е хоризонтална асимптота.

б) Со оглед на границата

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\begin{cases}-1, x<0\\ 1, x>0\end{cases},$$

правата $y=-1$ е ЛХА, а правата $y=1$ е ДХА.

7.7. Непрекинати функции и особини на непрекинатите функции

Деф.18. За функцијата $f(x)$ дефинирана на интервалот (a,b) велиме дека е непрекината во точката $c\in(a,b)$ ако важи

$$\lim_{x\to c}f(x)=f(c). \qquad (1)$$

Да забележиме дека во согласност со дефиницијата за граница имаме за секој $\varepsilon>0$ постои $\delta>0$ таков што $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$, за секој x со особина $|x-c|<\delta$, односно за секој $x\in V(c,\delta)$, $f(x)\in V(f(c),\varepsilon)$.

На пример за функцијата $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$, имаме $\lim_{x\to o}f(x)=\lim_{x\to o}\frac{\sin x}{x}=1\neq 0=f(0)$, а тоа нешто значи дека функцијата е прекината за $x=0$.

Да забележиме дека во согласност со дефиницијата за лева и десна граница имаме равенството (1) гласи

$$f(c-0)=f(c+0)=f(c).$$

Ако важи само $f(c-0)=f(c)$, за функцијата велиме дека е непрекината од лево, а ако пак важи само $f(c+0)=f(c)$, тогаш за функцијата велиме дека е непрекината од десно.

Нека во неравенството $|x-c|<\delta$, од дефиницијата за непрекинатост земеме $x=c+h$, добиваме $|h|<\delta$ за секој δ, а од тоа следува дека h се стреми кон 0, па неравенството $|f(c+h)-f(c)|<\varepsilon$, за секој $\varepsilon>0$, поминува во

$$\lim_{h\to o}(f(c+h)-f(c))=0, \quad (2)$$

како услов за непрекинатост на функцијата $f(x)$ во точката $x=c$.

Така на пример за $f(x)=k$ имаме $\lim\limits_{h\to o}(f(c+h)-f(c))=\lim\limits_{h\to o}(k-k)=0$, значи функцијата е непрекината во точката $x=c$.

За функцијата пак $f(x)=x^2$ имаме

$$\lim_{h\to o}(f(c+h)-f(c))=\lim_{h\to o}((c+h)^2-c^2)=\lim_{h\to o}(2ch+h^2)=0,$$

што значи дека функцијата е непрекината во точката $x=c$. На сличен начин се докажува непрекинатоста и на функцијата $f(x)=x^n n\in N$.

Теорема 9. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ се непрекинати во точката $x=c$, тогаш и нивниот збир, разлика, производ и количник се непрекинати, односно

$$f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x) \text{ и } \frac{f(x)}{g(x)} \text{ ако } g(c)\neq 0$$

во точката $x=c$.

Забележуваме дека доказот е непосредна последица од дефиницијата18 и теоремата 7.

Теорема 10. Ако функцијата $f(x)$ е непрекината во точката c а пак функцијата $g(t)$ е непрекината во точката $f(c)$, тогаш сложената функција $h(x)=(g\circ f)(x)$ е непрекината во точката $x=c$.

Доказ. Нека (c_n) е низа со особина $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$. Тогаш $f(c_n)$ се стреми кон $f(c)$, па од непрекинатоста на функцијата $g(t)$ во точката $f(c)$ имаме

$$\lim_{n\to\infty}g(f(c_n))=g\left(\lim_{n\to\infty}f(c_n)\right)=g(f(c))=h(c).$$

Што значи непрекинатост на функцијата $h(x)$ во точката $x=c$.

Да забележиме дека теоремата овозможува пресметување на граници со воведување на смена на променливата.

Деф.19. Ќе велиме дека функцијата $f(x)$ дефинирана на интервалот (a,b) е непрекината на истиот ако $f(x)$ е непрекината функција за секој $x\in(a,b)$. Ако уште функцијата $f(x)$ е непрекината од десно во точката a и е непрекината од лево во точката b тогаш функцијата $f(x)$ е непрекината на сегментот $[a,b]$.

Пример17. Овде ќе дефинираме и опишеме неколку важни функции:
а) функцијата $p(x)$ зададена со формулата

$$p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...a_2x^2+a_1x+a_o,$$

каде $a_i \in \mathbb{R}$ за $i=0,1,2,...,n$, се вика полином од $n-$ти степен. Ако сите коефициенти се нула тогаш полиномот се вика нула полином $p(x)=0$ а ако само $a_o=c\neq 0$, тогаш полиномот $p(x)=c$, се вика константен полином. Јасно дека функцијата $p(x)$ множеството $\mathbb{R}$ го пресликува во множеството $\mathbb{R}$ и дека функцијата $p(x)$ е непрекината за секој $x\in\mathbb{R}$.

б) Функцијата $F(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, каде $p(x)$ и $q(x)$ се полиноми се вика рационална функција и таа множеството $D_F=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\wedge q(x)\neq 0\}$ го пресликува во $\mathbb{R}$ и е непрекината за секој $x\in D_F$.

в) Рационалната функција $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, каде a,b,c,d се реални броеви се вика дробно линеарна функција и таа множеството
$D_f=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\wedge x\neq -\frac{d}{c}\}$ го пресликува во $\mathbb{R}$ и е непрекината за секој $x\in D_f$.

Теорема 11. Ако монотоната функција $f(x)$ дефинирана на интервалот (a,b) и со множество на вредности D_f^v, е непрекината на (a,b) тогаш инверзната функција е непрекината на D_f^v.

Доказ. Постоењето на инверзната функција f^{-1} следува од теорема 3. Нека $x_o\in(a,b)$ од непрекинатоста на функцијата $f(x)$ следува равенството

$$\lim_{h\to o}(f(x_o+h)-f(x_o))=0.$$

Ако е $f(x_o)=y_o$ и $f(x_o+h)=y_o+k$, тогаш да ја определиме границата

$$\lim_{k\to o}(f^{-1}(y_o+k)-f^{-1}(y_o))=\lim_{h\to o}(f^{-1}(f(x_o+h)-f^{-1}(f(x_o))=$$
$$=\lim_{h\to o}(x_o+h-x_o)=\lim_{h\to o}h=0.$$

Со што добивме дека инверзната функција е непрекината во точката $y=y_o\in D_f^v$. Од произволноста на таа точка следува непрекинатост на инверзната функција за секој $y\in D_f^v$.

Теорема 12. Нека $f(x)$ е непрекината функција во точката $c\in D_f$ и нека $f(c)\neq 0$. Тогаш постои околина $V(c,\varepsilon)$ на точката c во која функцијата $f(x)$ има постојан знак еднаков со знакот на $f(c)$.

Доказ. Нека е $f(c)>0$ и нека избереме $\varepsilon=\dfrac{f(c)}{2}$. Сега од непрекинатоста на $f(x)$ следува дека постои $\delta>0$ таков што

$$|f(x)-f(c)|<\frac{f(c)}{2},\ \text{за}\ |x-c|<\delta,$$

односно $-\frac{f(c)}{2}<f(x)-f(c)<\frac{f(c)}{2}$, $\frac{f(c)}{2}<f(x)<\frac{3f(c)}{2}$, а кое нешто значи дека функцијата $f(x)$ на интервалот $(a-\delta,a+\delta)$ постојано е позитвна. Доказот е сличен и за $f(c)<0$.

Од причини на оваа теорема следува дека секоја непрекината функција меѓу две свои нули има постојан знак или е позитивна или е негативна.

Теорема 13. Ако функцијата $f(x)$ е непрекината на сегментот $[a,b]$ и ако

$$f(a)\cdot f(b)<0, \qquad (3)$$

тогаш постои точка $c\in[a,b]$, за која $f(c)=0$.

Теоремата се докажува слично како Болцано-Вајерштрасовата лема со принципот на вложени сегменти. А тоа беше сегментот $[a,b]$ се дели на два еднакви дела и при тоа барем едниот го задоволува условот (3). Да го означиме со $[a_1,b_1]$ потоа ово сегмент го делиме на два еднакви делови и ново добиениот сегмрнтот што го задоволува условот (3) го означуваме со $[a_2,b_2]$. Пофторувајќи ја постапката n пати доаќаме до сегмент $[a_n,b_n]$ со должина $\frac{a-b}{2^n}$. Ние понатаму оваа постапка ќе ја користиме за приближно решавање на равенки со една непозната величина.

Теорема 14. Ако функцијата $f(x)$ е непрекината на сегментот $[a,b]$ и ако $f(a)=A$ и $f(b)=B$, $A<B$ тогаш за секој $C\in[A,B]$ постои барем еден $c\in[a,b]$ таков што $f(c)=C$.

Теорема 15. Ако функцијата $f(x)$ е непрекината на сегментот $[a,b]$, тогаш постојат точки $c_1,c_2\in[a,b]$ такви што $f(c_1)=\max f(x)$ на $[a,b]$ и $f(c_2)=\min f(x)$ на $[a,b]$.

7.8. Елементарни функции граници и непрекинатост

Функциите за кои подолу во текстот даваме коректни дефиниции познати се како основни елементарни функции. За сите нив покрај за D_f и D_f^v ние ќе дискутираме за монотоност, непрекинатост и постоење на нивна инверзна функција.

а) Експоненцијална функција

Деф.20. Нека $a>0$ и нека $x\in\mathbb{R}$. Ако низата (r_n) од рационални броеви е таква што $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$, тогаш по дефиниција

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n},$$

а функцијата дефинирана со

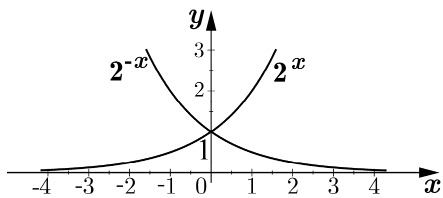
$$f(x)=a^x, \text{ за секој } x\in\mathbb{R},$$

се вика експоненцијална функција.

Таа ги има следните особини:

1) За $a>1$ е строго монотоно растечка.
2) Дефинирана е и непрекината е на $\mathbb{R}$.
3) Точни се границите $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \infty$.

Приближен график за оваа функција за $a=2$ и $a=\frac{1}{2}$ е скициран на сл.7.



сл. 7

Да ја докажеме точноста на непрекинатоста на оваа функција. Имено тргајќи од равенството (3) добиваме

$$\lim_{h\to o}\left(a^{x+h}-a^x\right)=a^x\lim_{h\to o}\left(a^h-1\right)\Longrightarrow$$

Со оглед на тоа дека за $h<1$, $\frac{1}{h}>1$, па постои $n_o\in\mathbb{N}$, таков што $n_o<\frac{1}{h}<n_o+1$,

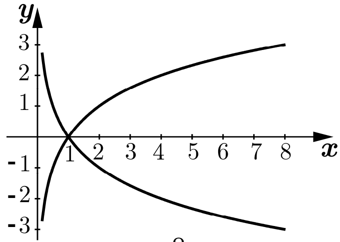
Односно $\frac{1}{n_o+1}<h<\frac{1}{n_o}$. Па следува дека е точно неравенството

$$a^{\frac{1}{n+1}}<a^h<a^{\frac{1}{n}}, \text{ за секој } n\in\mathbb{N}.$$

Сега со оглед на границите $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ имаме $\lim\limits_{h\to o} a^h = 1$, односно $\Rightarrow = \lim\limits_{h\to o}\left(a^h-1\right)=1-1=0$. Со што докажавме дека функцијата $f(x)=a^x$ е непрекината за секој $x\in\mathbb{R}$.

б) Логаритамска функција

Деф.21. Нека е $a>0$ и $a\neq 1$ и нека $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ дефинирано со $f(x)=a^x$, за секој $x\in\mathbb{R}$, тогаш постои инверзна функција $f^{-1}:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ на функцијата f, која ја означуваме со $f^{-1}(x)=\log_a x$ и се вика логаритамска функција. Бројот a се вика основа на логаритамската функција. На сл. 8 скицирани се графиците на оваа функција за основи $a=2$ и $a=\frac{1}{2}$.



сл. 8

Функцијата ги има следните особини:

1) За $a>1$ функцијата е строго монотоно растечка.
2) Дефинирана е и непрекината е на $(0,+\infty)$.
3) Точни се границите $f(0+0)=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$.

Да ја докажеме непрекинатоста. Го проверуваме равенството (3). Имаме

$$\lim_{h\to o}(\log_a(x+h)-\log_a x)=\lim_{h\to o}\log_a\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to o}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)=$$

$$=\log_a\left(1+\lim_{h\to o}\frac{h}{x}\right)=\log_a(1+0)=0,$$

а тоа значи непрекинатост на логаритамската функција.

Ако основата $a=e$, тогаш велиме дека станува збор за природен логаритам и го означуваме со $y=\ln x$, ако пак основата не е напишана , тогаш таа е 10 и се вика декаден логаритам.

в) Степенска функција

Деф22. Нека $\alpha\in\mathbb{R}$ и $\alpha\neq 0$, тогаш за секој $x>0$, величината x^α е еднозначно определен број па функцијата

$$y=x^\alpha, \text{ за секој } x\in(0,+\infty),$$

се вика степенска функција и таа множеството $(0,+\infty)$ го пресликува на $\mathbb{R}$.

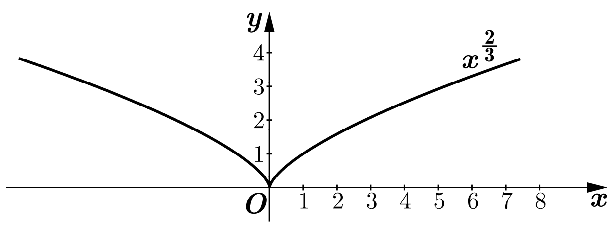
Да забележиме дека важи

$$x^\alpha=e^{\alpha\ln x},$$

па степенската функција може да се разгледа како сложена функција.

Од последното јасно е дека таа за $\alpha>0$ е монотоно растечка, а за $\alpha<0$ е монотоно опаднувачка. Непрекинатоста следува од непрекинатоста на логаритамската функција.

Посебен интерес претставуваат степенските функции за кои $\alpha=\frac{m}{n}$ е рационален број. Кај нив за $m=2k$, $n=2s-1$ можно е и $D_f=\mathbb{R}$, а



сл. 9

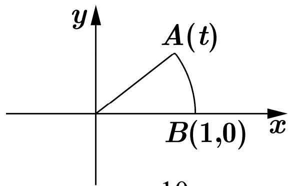
$D_f^v = [0,+\infty)$. Така на пример функцијата $y = x^{\frac{2}{3}}$ има график сл. 9

г) Тригонометриски функции

Нека во рамнината е фиксиран Декартов правоаголен координатен систем xOy, тогаш множеството точки (види сл.10)

$$K = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 = 1\},$$

е единична кружница (кружница со центар во координатниот почеток и радиус 1). Нека е $t \geq 0$ и нека



сл. 10

$A(t)$ точка од кружната линија која се добива со движење по кружната линија, спротивно од движењето на часовната стрелка за должина на лакот еднаква на t, а почнувајќи од точката $B(1,0)$. Ако движењето е во правец на движењето на часовната стрелка тогаш $t \leq 0$. Очевидно дека на овој начин на секој реален број t му е придружена една точка $A(t)$ од кружната линија со декартови координати x и y. Јасно дека x и y зависат од параметарот t. Така на пример (знаеме дека должината на оваа кружница е 2π, па го имаме соодветството $A(0) = (1,0)$, $A\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1)$, $A(\pi) = (-1,0)$, $A\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (-1,0)$, $A(2\pi) = (1,0)$ и т.н.

Очевидно е дека важи

$$A(t) = A(t+2\pi) = A(t-2\pi) = A(t+4\pi) = \ldots$$

Деф.23. По дефиниција имаме:

а) $x = \cos t$, (косинус t);

б) $y = \sin t$, (синус t);

в) $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} t$, за $x \neq 0$ (тангенс t);

г) $\frac{x}{y} = \operatorname{ctg} t$, за $y \neq 0$ (котангенс t);

ова се четирите основни тригонометриски функции.

Од сл.10 и досегашната дискусија следува точноста на следните особини на тригонометриските функции:

1) $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$; основно равенство на тригонометриските функции.

2) $\sin(t+2\pi) = \sin t$, $\cos(t+2\pi) = \cos t$; периодични со период 2π.

3) $\operatorname{tg}(t+\pi) = \operatorname{tg} t$, за $t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ периодична со период π.

4) $\operatorname{ctg}(t+\pi) = \operatorname{ctg} t$, за $t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ периодична со период π.

5) $\sin(-t) = -\sin t$, непарна ; $\cos(-t) = \cos t$, парна ; $\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$, непарна, $\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t$, непарна; последните две во дефиниционите области.

6) $|\sin t| \leq 1$, $|\cos t| \leq 1$, за секој $t \in \mathbb{R}$.

7) Гранични вредности на функциите тангенс и котангенс на границите на нивните дефинициони области:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=+\infty,\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=-\infty,\ \operatorname{ctg}(0-0)=-\infty,\ \operatorname{ctg}(0+0)=+\infty.$$

8) Монотоност. Синусната функција е монотона (монотоно растечка) на сегментот $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Косинусната функција е монотона (монотоно опаднувачка) на сегментот $[0,\pi]$. Тангенсната функција е монотона (монотоно растечка) на сегментот $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. И котангенсната функција е монотона (монотоно опаднувачка) на сегментот $[0,\pi]$.

Да забележиме дека во понатамошната работа ние ќе зборуваме за фуинкциите:

$$f_1(x)=\sin x,\ f_2(x)=\cos x,\ f_3(x)=\operatorname{tg} x,\ f_4(x)=\operatorname{ctg} x.$$

За нивните дефинициона област D_f и множество на вредност D_f^v соодветно имаме:

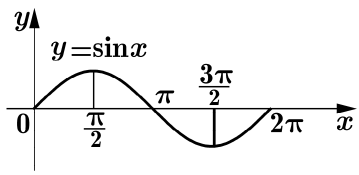
$D_{f_1}=(-\infty,+\infty)$ и $D_{f_1}^v=[-1,1]$;

$D_{f_2}=(-\infty,+\infty)$ и $D_{f_2}^v=[-1,1]$;

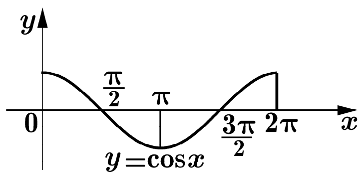
$D_{f_3}=\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$ и $D_{f_3}^v=(-\infty,+\infty)$;

$D_{f_4}=(0,\pi)$ и $D_{f_4}^v=(-\infty,+\infty)$

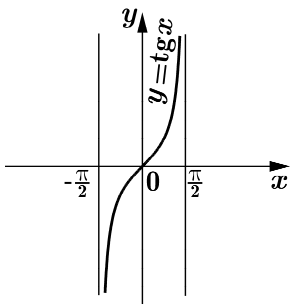
Графиците на четирите основни тригонометриски функци скицирани се на сликите што следуваат



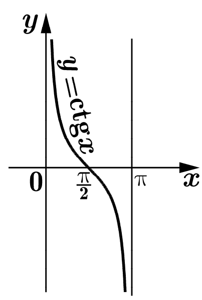
сл. 11



сл. 12



сл. 13



сл. 14

Од непрекинатоста во дефиниционите области и од монотоноста на основните тригонометриски функции во посочените (во особина 8) области, следува дека тие имаат инверзни функции коишто ги викаме циклометриски (аркус) функции.

Инверзна за функцијата $f(x)=\sin x$ е $f^{-1}(x)=\arcsin x$. За неа имаме $D_{f^{-1}}=[-1,1]$, а $D^{v}_{f^{-1}}=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Инверзна за функцијата $f(x)=\cos x$ е $f^{-1}(x)=\arcsin x$. За неа имаме $D_{f^{-1}}=[-1,1]$, а $D^{v}_{f^{-1}}=[0,\pi]$.

Инверзна за функцијата $f(x)=\mathrm{tg}\, x$ е $f^{-1}(x)=\mathrm{arctg}\, x$. За неа имаме $D_{f^{-1}}=(-\infty,+\infty)$, а $D^{v}_{f^{-1}}=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Инверзна за функцијата $f(x)=\mathrm{ctg}\, x$ е $f^{-1}(x)=\mathrm{arcctg}\, x$. За неа имаме $D_{f^{-1}}=(-\infty,+\infty)$, а $D^{v}_{f^{-1}}=(0,\pi)$.

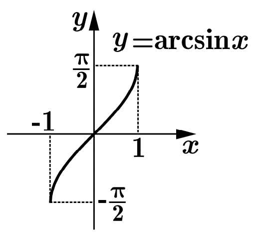
Сите овие четири функции во дефиниционите области се непрекинати како инверзни на непрекинатите тригонометриски функции.

Јасна е точноста на границите:

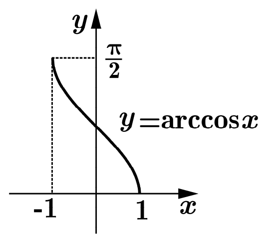
$$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{arctg}\, x=-\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to+\infty}\mathrm{arctg}\, x=\frac{\pi}{2};\ \lim_{x\to-\infty}\mathrm{arcctg}\, x=\pi,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{arcctg}\, x=0.$$

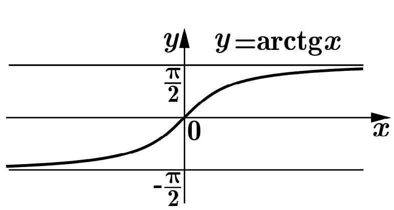
Графиците на тригонометриските функции лесно се добиваат од графиците на тригонометриските функции имајќи во вид дека тие треба да бидат симетрични во однос на правата $y=x$. Скицирани се на сликите поместени подолу.



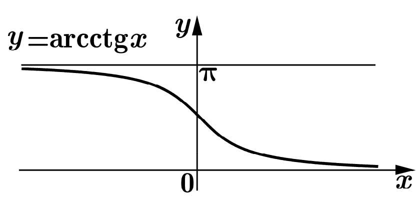
сл. 15



сл. 16



сл. 17



сл. 18

Да забележиме уште еднаш дека досега дефинираните и дискутираните функции експоненцијалната, логаритамската, степенската, тригонометриските, циклометриските, константата се заправо основните елементарни функции.

Деф.24. Секоја функција која се добива со конечен број аритметички операции (собирање, одземање, множење и делење) како и со конечен број на суперпозиции од основните елементарни функции позната е како елементарна функција.

Такви се на пример функциите

$$f_1(x)=(\sin x+2)^2+\ln(2x-3)\ ,\quad f_2(x)=\cos\left(x+\frac{1}{x}\right)-\sqrt{1+x^2}\ ,$$

$$f_3(x)=\operatorname{tg}x\cdot\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)+\sin(2x-4)\,,\quad f_4(x)=\operatorname{ctg}\frac{1}{x}\cdot\left(x+\log_2\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)\right).$$

Деф.25. За функцијата $f(x)$ ќе велиме дека е бесконечно мала величина во околината $V(c,\varepsilon)$ на точката c ако $\lim\limits_{x\to c}f(x)=0$, а ќе велиме дека е бесконечно голема величина во околината $V(c,\varepsilon)$ на точката c ако $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty$.

Деф.26. За две функции $f(x)$ и $g(x)$ ќе велиме дека се бесконечно мали (големи) величини од исти ред во околината $V(c,\varepsilon)$ на точката c ако важи

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=k<\infty\,.$$

Посебно ако $k=1$, за двете функции $f(x)$ и $g(x)$ ќе велиме дека се еквивалентни величини во околината $V(c,\varepsilon)$ на точката c. Притоа важно е дека тие една со друга може да се заменат во околината $V(c,\varepsilon)$.

7.9. Значајни граници

Овде ќе определиме неколку почесто среќавани граници за основните елементарни функции, а кои имаат голема примена во граничните процеси и математичката анализа воопшто. Притоа ќе го користиме и поимот на еквивалентни функции .

Имено ќе ги разгледаме следните граници:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$, ѓ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$.

За пресметување на овие граници ќе ја искористиме и познатата граница за бројот $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Имаме а) Нека (x_s) е бројна низа за која $\lim\limits_{s\to\infty} x_s = \infty$, согласно Архимедовата аксиома, са секој $s \in \mathbb{N}$, постои природен број n_s таков што $n_s < x_s < n_s + 1$. Од што следува

$$\left(1+\frac{1}{n_s}\right)^{n_s+1} > \left(1+\frac{1}{x_s}\right)^{x_s} > \left(1+\frac{1}{n_s+1}\right)^{n_s}.$$

Од произволноста на низата (x_s) и од точноста на границите

$$\lim_{n_s\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_s}\right)^{n_s+1} = \lim_{n_s\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_s}\right)^{n_s}\lim_{n_s\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_s}\right) = e\cdot 1 = e,$$

$$\lim_{n_s\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_s+1}\right)^{n_s} = \lim_{n_s\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_s+1}\right)^{n_s+1}\lim_{n_s\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_s}\right)^{-1} = e\cdot 1 = e$$

следува дека

$$\lim_{x_s\to 0}\left(1+\frac{1}{x_s}\right)^{x_s} = e = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}.$$

б) Ако воведеме смена $x = \frac{1}{t}$, добиваме $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1$.

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$.

д) Воведувајќи смена со $e^x - 1 = t, e^x = 1+t, x = \ln(1+t)$, добиваме

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{\ln e} = 1,$$

ѓ) Воведувајќи смена со $a^x - 1 = t, a^x = 1+t, x = \log_a(1+t)$, добиваме

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{\log_a\left(\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

7.10. Задачи за самостојно работење

1. Да се пресметаат лева и десна гранична вредност во следните случаи:

а) $f(x) = \frac{3}{x-2}$, кога $x \to 2$;

б) $f(x) = 2^{\frac{3}{1-x}}$, кога $x \to 1$.

2. Да се пресметаат границите во кои аргументот се стреми кон конечна вредност:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+5x^2-8x+1}{x^4-x^3+x-1}$, б) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$.

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}-1}$, г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt[4]{x}}{1-x^3}$,

д) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x}-2}{\sqrt{x+3}-2}$, ѓ) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1-x^2}$,

е) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{1+x}-2}{x^2-x-6}$, ж) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{1+7x}-\sqrt{1+3x}}{x-1}$,

з) $\lim\limits_{x\to o}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt{1+x^2}}{x^2}$, ѕ) $\lim\limits_{x\to o}\dfrac{4x+1-\sqrt{1+16x^2}}{x}$,

и) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{\sqrt{x^n}-\sqrt{a^n}}$.

3. Да се пресметаат граничните вредности на функциите ако аргументот се стреми кон бесконечност:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1+\sqrt{1+4x^6}}{2x^3+3x+\sqrt[3]{1-8x^9}}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^2+1)^5(x^3+x+2)^4}{(3x+1)^{10}(x^4-2x)^3}$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+7)^{10}(n^2-n+1)^5}{n^{10}+n^7-6n+5}$, г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+5n}+\sqrt{n^2+n}}{(n-1)(n^2+n+1)}$,

д) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n^{2-2}}\right]$,

ѓ) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\alpha}\left[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right]$, $\alpha\in\mathbb{R}$

е) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-10x+6}+x-3\right]$, ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}-\dfrac{2x-1}{2}\right]$,

з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{x^2-2x+3}\right]$, ѕ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right]$,

и) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^{14}+x^{12}+2}-\sqrt{1+x^2}}{x^2+3x+\sqrt[3]{1+2x^6}}$.

4. Да се пресметаат границите на тригонометриските функции

а) $\lim\limits_{x\to o}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$, б) $\lim\limits_{x\to o}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$, в) $\lim\limits_{x\to o}\dfrac{\arcsin x}{x}$,

г) $\lim\limits_{x\to o}\dfrac{\mathrm{arctg}\, x}{x}$, д) $\lim\limits_{x\to o}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$, ѓ) $\lim\limits_{x\to o}\dfrac{1-\cos kx}{x^2}$,

е) $\lim\limits_{x\to o}\dfrac{\sin 5x-\sin x}{mx}$, ж) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\mathrm{arctg}(1-x)}{x-1}$, з) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\mathrm{arctg}(2-x)}{x^2-2x}$,

ѕ) $\lim\limits_{x\to o}\dfrac{\mathrm{tg}\,3x-\sin 3x}{x^3}$, и) $\lim\limits_{x\to o}\dfrac{\mathrm{tg}\,x-\sin x}{1-\sqrt{1-x^3}}$, ј) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$,

к) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{4x^2-16}$, л) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{7-x}-2}{\sin(x-3)}$, љ) $\lim\limits_{x\to o}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sin 6x}$,

м) $\lim\limits_{x\to o}\dfrac{1-\cos kx}{1-\cos nx}$.

5. Користејќи адициони теореми да се пресметаат границите од сложени тригонометриски функции:

а) $\lim\limits_{h\to o}\dfrac{\cos(x+h)-\cos(x-h)}{h}$, б) $\lim\limits_{h\to o}\dfrac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1+2h}}{\sinh-\sin 7h}$,

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}x\left(1-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$, г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\cos x-\sin x}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sin\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$.

6. Користејќи некоја од познатите граници

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$,

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$, 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$,

да се пресметаат границите на функциите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-1}{3x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{1-x}-1}{x-1}$, в) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x+b^x-2}{x}$, д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{-x}-1}{\sqrt{x+1}-1}$.

7. Нека е $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, тогаш $\lim\limits_{x\to a}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=e$. Користејќи ја оваа граница да се пресметаат границите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{\frac{x^2+x}{x}}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+13}{x^2-x+1}\right)^{x+2}$,

в) $\lim\limits_{x\to o}\left(7-\dfrac{x-12}{x-2}\right)^{\frac{2x+1}{3x}}$, г) $\lim\limits_{x\to o}\left(2+x-\sqrt{1-x}\right)^{\frac{7-x}{x}}$,

д) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x}+x-1\right)^{\frac{1}{1-x^2}}$, ѓ) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x-1}{2}\right)^{\frac{2x-1}{x-1}}$,

е) $\lim\limits_{x\to o}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$, ж) $\lim\limits_{x\to o}\left(e^{-3x}-2x\right)^{\frac{2-x}{x-x^2}}$,

з) $\lim\limits_{x\to o}(\operatorname{ch}x)^{\frac{1}{\sin x}}$, ѕ) $\lim\limits_{x\to o}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$,

и) $\lim\limits_{x\to o}(1+\sin x)^{\frac{x}{\sin^2 x}}$, ј) $\lim\limits_{x\to o}\left(1-\dfrac{x}{k}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$,

к) $\lim\limits_{x\to o}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$, л) $\lim\limits_{x\to o}(e^x+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

8. Користејќи различни постапки да се пресметаат границите:

а) $\lim\limits_{x\to o}\dfrac{tg\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+1}{2}\right)^{x}$,

в) $\lim\limits_{x\to o}\left(\dfrac{e^{mx}-1}{e^{nx}-1}\right)^{1+\operatorname{tg}x}$,

г) $\lim\limits_{x\to o}\left(\sqrt{x-\sqrt{x}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$,

д) $\lim\limits_{x\to o}\dfrac{\operatorname{tg}2x-2\sin x}{x^3}$,

ѓ) $\lim\limits_{x\to o}\dfrac{\sin 5x}{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}$,

е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$,

ж) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2 x}$,

з) $\lim\limits_{x\to o}\dfrac{x\ln(1+x+x^2)}{1-\cos 2x}$,

ѕ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+5x^2-8x+1}{x^4-2x^3+x-2}$,

и) $\lim\limits_{x\to\infty}\left((x+2)e^{\frac{1}{x}}-x\right)$,

ј) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^3+2x^2\sqrt{x}}{5x^3}\right)^{\sqrt{x}}$,

к) $\lim\limits_{x\to o}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$,

л) $\lim\limits_{x\to o}\dfrac{\cos(xe^x)-1}{x^2}$.

8. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО СМЕТАЊЕ НА ФУНКЦИИТЕ ОД ЕДЕН РЕАЛЕН АРГУМЕНТ

8.1. Поим за прв извод на функциите од еден реален аргумент

Деф.1. Нека функцијата $f(x)$ е дефинирана во некоја околина $V(x_o, \varepsilon)$ на точката x_o. Ако постои границата

$$\lim_{h\to o}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h},$$

тогаш таа се вика извод на функцијата $f(x)$ во точката x_o и се означува со $f'(x_o)$, односно

$$f'(x_o)=\lim_{h\to o}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}. \qquad (1)$$

По аналогија со лева и десна граница и овде имаме лев и десен извод односно, за $h>0$, границата

$$f'(x_o-0)=\lim_{h\to o}\frac{f(x_o-h)-f(x_o)}{-h},$$

се вика лев извод на функцијата $f(x)$ во точката x_o, додека пак границата

$$f'(x_o+0)=\lim_{h\to o}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h},$$

се вика десен извод на функцијата $f(x)$ во точката x_o.

Согласно со теоремата за граница добиваме дека функцијата $f(x)$ во точката x_o има извод ако има лев и десен извод и ако тие се еднакви односно

$$f'(x_o-0)=f'(x_o+0)=f'(x_o).$$

Да определиме изводи од неколку функции при што наместо x_o ќе пишуваме x.

а) Нека е $f(x)=c$, $f'(x)=\lim\limits_{h\to o}\dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=\lim\limits_{h\to o}\dfrac{c-c}{h}=0$.

б) Ако е $f(x)=x$, $f'(x)=\lim\limits_{h\to o}\dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=\lim\limits_{h\to o}\dfrac{x+h-x}{h}=\lim\limits_{h\to o}\dfrac{h}{h}=1$.

в) За $f(x)=x^2$, добиваме $f'(x)=\lim\limits_{h\to o}\dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=\lim\limits_{h\to o}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=$

$$=\lim_{h\to o}\frac{2xh+h^2}{h}=2x.$$

г) За функцијата $f(x)=\sqrt{x}$, го добиваме следното

$$f'(x)=\lim_{h\to o}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=\lim_{h\to o}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to o}\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{h\to o}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to o}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Да укажеме на следните правила за определување на изводи, а кои подоцна и ќе ги докажеме.

- извод од збир на функции е збир на изводите од функциите;
- извод од разлика на функции е разлика на изводите на функциите;
- константа што множи функција при определувањето на изводот се препишува односно го множи изводот на функцијата.

8.2. Кинематичко толкување на изводот

Нека една материјална точка врши праволиниско движење по законот на патот $s=s(t)$, каде t е поминатото време. Нека во моментот на времето $t=t_1$, материјалната точка се наоѓа во положбата $s(t_1)$, а во моментот на времето $t=t_2$, таа се наоѓа во положбата $s(t_2)$. Сега знаеме дека количникот

$$\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}=v_{sr},$$

претставува средна брзина на материјалната точка на временскиот интервал $[t_1,t_2]$. Јасно дека $s=s(t)$ во математичка смисла е функција определена на сегментот $[t_1,t_2]$ и непрекината во t_1. Па ако ставиме $t_2=t_1+h$, и притоа допуштиме $h\to 0$, тогаш добиваме

$$\lim_{h\to o}\frac{s(t_1+h)-s(t_1)}{h}=s'(t_1)=v(t_1).$$

А тоа е моменталната брзина на материјалната точка во моментот на времето $t=t_1$.

Значи добивме дека изводот на патот (како функција од времето) претставува брзина на материјалната точка

Ако $s=s(t)$, тогаш $s'(t)=v(t)$.

Воопшто ако $\alpha=\alpha(t)$, е произволна физичка величина која зависи од времето t, тогаш имаме

$$\lim_{h\to o}\frac{\alpha(t+h)-\alpha(t)}{h}=\alpha'(t),$$

па по аналогија $\alpha'(t)$ се вика брзина на промена на физичката величина $\alpha=\alpha(t)$.

Така на пример ако $A=A(t)$ е извршената работа тогаш $A'(t)$ заправо е $P(t)$, ефектот на работата, односно брзината на извршување на работата.

Пример 1. Материјална точка се движи праволиниски по законот на патот

$$s(t)=\frac{1}{3}t^3+3t^2+12.$$

Да се определи средната брзина на материјалната точка на временскиот интервал $[0,3]$ и моментот на времето $t=t_o$ во кој таа се достигнува.

Решение. Заменувајќи во формулата за средната брзина добиваме

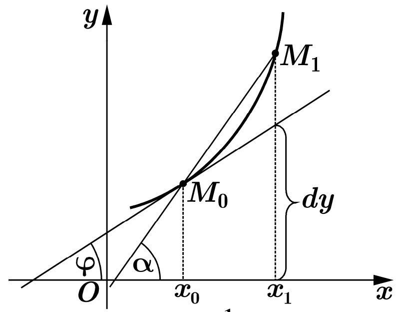
$v_{sr}=\frac{s(3)-s(0)}{3}=\frac{48-12}{3}=12$, $s'(t)=t^2+6t$, па сега од $s'(t_o)=v_{sr}$ следува равенката $t^2+6t-12=0$. Нејзино позитивно решение е $t_0=-3+\sqrt{21}\approx 1{,}58$.

8.3. Геометриско толкување на изводите

Нека во рамнината е фиксиран Декартов правоаголен координатен систем xOy и нека е нацртан графикот на функцијата $y=f(x)$, која минува низ точката $M_o(x_o,f(x_o))$ (види сл.1). Ако $M_1(x_1,f(x_1))$ е некоја точка од кривата $y=f(x)$, тогаш количникот

$$\frac{f(x_1)-f(x_o)}{x_1-x_o}=\operatorname{tg}\alpha,$$

каде што α е аголот што сечицата M_oM_1 го гради со $x-$оската.



сл. 1

Ако ставиме $x_1=x_o+h$, и притоа допуштиме $h\to 0$, тогаш добиваме дека сечицата M_oM_1 се стреми кон тангентата на кривата во точката M_o, а за границата од количникот имаме

$$\lim_{h\to o}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=f'(x_o)=\operatorname{tg}\varphi,$$

каде φ е аголот што тангентата на кривата $y=f(x)$ го гради со $x-$оската.

Деф.2. Правата која минува низ точката $M_o(x_o,f(x_o))$ и има равенка

$$y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o), \qquad (2)$$

се вика тангента, а правата

$$y-f(x_o)=-\frac{1}{f'(x_o)}(x-x_o), \qquad (3)$$

се вика нормала за кривата $y=f(x)$ повлечена во точката $M_o(x_o,f(x_o))$.

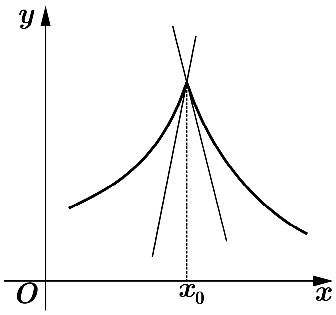
Да забележиме дека во смисла на деф.2 посебен интерес претставуваат точките во кои функцијата има само лев односно само десен извод. Па во овој случај со равенката (2) би била зададена тангентата од лево (лева тангента) односно тангентата од десно (десна тангента). И тие имаат равенки соодветно:

$y-f(x_o)=f'(x_o-0))(x-x_o)$; лева тангента

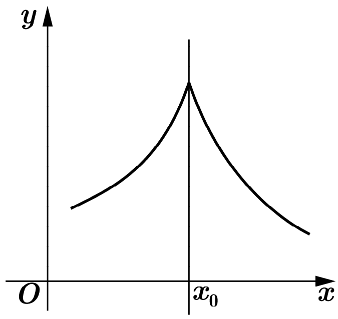
$y-f(x_o)=f'(x_o+0)(x-x_o)$; десна тангента.

Ако $f'(x_o)=0$, тогаш, тангентата е паралелна со $x-$оската. Ако пак $f'(x_o)=\infty$, тогаш тангентата е паралелна со $y-$ оската.

Илустрација на наведените ситуации даваме на сл.2а и сл.2б.



сл. 2а



сл. 2б

Пример 2. Да се определат равенките на тангентите и нирмалите повлечени кон кривата $y=x^2+2x+3$, во точките M_o, за кои ординатата е еднаква на 3.

Решение. Од $y_o=3$ следува $3=x^2+2x+3$, $x^2+2x=0$, $x_1=-2$ и $x_2=0$. Јасно дека $y'(x)=2x+2$, $y'(-2)=2(-2)+2=-2$ и $y'(0)=2(0)+2=2$. Сега со замена во равенките (2) и (3) добиваме

$$t_1: y-3=-2(x+2),\ y=-2x-1,\quad t_2: y-3=2(x-0),\ y=2x+3;$$

$$n_1: y-3=\frac{1}{2}(x+2),\ 2y=x+8,\quad n_2: y-3=-\frac{1}{2}(x-0),\ 2y=6-x.$$

Пример 3. Да се определат равенките на тангентите на кривата $y=x^2+1$, што минуваат низ точката $A(1,0)$.

Решение. Бидејќи точката $A(1,0)$, не е точка од кривата следува дека $M(x_o,y_o)$ каде $y_o=x^2+1$, треба да ја определиме од условот тангентата да минува низ точката $A(1,0)$, односно равенката на тангентат да е задоволена од координатите на точката $A(1,0)$. Сега со оглед на $y'(x_o)=2x_o$, за равенката на тангентата добиваме

$$y-x_o^2-1=2x_o(x-x_o).$$

Со заменување на координатите на точката $A(1,0)$ во последната равенка се добива квадратната равенка

$$x_o^2-2x_o-1=0.$$

Нејзини решенија се $x_1=1-\sqrt{2}$ и $x_2=1+\sqrt{2}$. За соодветните y_1 и y_2 добиваме $y_1=4-2\sqrt{2}$ и $y_1=4+2\sqrt{2}$. Равенките на соодветните тангенти се

$$t_1: y=2\left(1-\sqrt{2}\right)x-2\left(1-\sqrt{2}\right),\quad t_2: y=2\left(1+\sqrt{2}\right)x-2\left(1+\sqrt{2}\right).$$

8.4. Диференцијабилни функции

Деф.3. Нека функцијата $f(x)$ е дефинирана на интервалот (a,b) и нека точката $x_o \in (a,b)$. Велиме дека функцијата $f(x)$ е диференцијабилна во точката $x_o \in (a,b)$ ако постои реален број A, таков што

$$\lim_{h\to o} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)-Ah}{h}=0 . \qquad (4)$$

Да забележиме ако функцијата $f(x)$ е диференцијабилна во точката x_o и ако означиме

$$f(x_o+h)-f(x_o)=Ah+r(h), \qquad (5)$$

тогаш од (4) следува

$$\lim_{h\to o} \frac{r(h)}{h}=0, \qquad (6)$$

односно добивме дека $r(h)$ е бесконечно мала величина од повисок ред од h, кога $h\to 0$.

Теорема 1. Функцијата $f(x)$ е диференцијабилна во точката x_o ако и само ако постои $f'(x_o)$ и при тоа $f'(x_o)=A.$

Доказ. Нека функцијата $f(x)$ е диференцијабилна во точката x_o, односно нека е точно равенството (4). Тогач имаме

$$\lim_{h\to o} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)-Ah}{h}=0=\lim_{h\to o} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}-A .$$

Од ова следува дека постои изводот и дека $f'(x_o)=A.$

Обратно. Нека постои изводот , односно нека

$$\lim_{h\to o} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=f'(x_o) .$$

Од последното следува и равенството

$$\lim_{h\to o} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)-f'(x_o)h}{h}=0 ,$$

а кое нешто значи и точност на равенството (4) при што $A=f'(x_o).$ Со што доказот е завршен.

Заменувајќи ја во равенката (5) вредноста на $A=f'(x_o)$, а воедно имајќи го во предвид (6) го добиваме приближното равенство

$$f(x_o+h)\approx f(x_o)+f'(x_o)h , \qquad (7)$$

кое за мали вредности на h дава резултати со голема точност.

Деф.4. Производот $f'(x_o)h$ се вика диференцијал на функцијата $y=f(x)$ и се означува со

$$dy=f'(x_o)h .$$

Геометриски диференцијалот е еднаков со нараснувањето по тангентата во точката со апсциса $x_o + h$. (види сл.1)

Ако имаме во предвид дека диференцијалот на аргументот x како функција е $dx = 1 \cdot h$, тогаш ја имаме следната ознака за диференцијалот

$$dy = f'(x_o)dx. \qquad (8)$$

Пример 4. Со помош на приближното равенство (7) да се пресмета $\sqrt{26}$.

Решение. Ќе ја разгледаме функцијата $y = \sqrt{x}$ и притоа ќе земеме $x_o = 25$ и $h = 1$. Имаме $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y'(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10}$. Сега со замена во (7) имаме $\sqrt{26} \approx \sqrt{25} + \frac{1}{10} \cdot 1$=5,1.

Теорема 2. Ако функцијата $f(x)$ е диференцијабилна во точката x_o, тогаш таа е и непрекината во точката x_o.

Доказ. Нека $f(x)$ е диференцијабилна во точката x_o, а тоа значи дека постои реален број A таков што

$$\lim_{h \to o} \frac{f(x_o + h) - f(x_o) - Ah}{h} = 0,$$

односно важи равенството

$$\lim_{h \to o} (f(x_o + h) - f(x_o) - Ah) = 0,$$

од што следува

$$\lim_{h \to o} (f(x_o + h) - f(x_o)) = 0,$$

а тоа заправо е условот за непрекинатост на функцијата $f(x)$.

Да забележиме дека секоја непрекината функција не мора да биде диференцијбилна. Тоа се потврдува со функцијата

$$y = |x|,$$

која е непрекината во точката $x = 0$, а за истата точка имаме $f'(0-0) = -1$, а $f'(0+0) = 1$, а што значи дека функцијата нема извод во точката $x = 0$, односно не е диференцијабилна.

Деф.5. Реалната функција $f(x)$ дефинирана на интервалот (a,b) велиме дека е диференцијабилна на (a,b) ако таа е диференцијабилна за секоја точка x, што припаѓа на интервалот (a,b). Ако на секој $x \in (a,b)$ му го кореспондираме реалниот број $f'(x)$ тогаш ја добиваме реалната функција $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$ и која се вика изводна функција или просто извод на $f(x)$.

Да забележиме дека сега согласно (8) од последната дефиниција следува ознаката за изводот

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \qquad (9)$$

позната како Лајбницова ознака на првиот извод.

Теорема 3. Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ се диференцијабилни на сегментот $[a,b]$, тогаш и функциите збир, разлика, производ и количник исто така се диференцијабилни функции на сегментот $[a,b]$ и притоа важи:

а) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$,

б) $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$,

в) $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)g'(x)$,

г) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Доказ. Од диференцијабилноста на функциите $f(x)$ и $g(x)$ имаме

$$\lim_{h\to o}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x),\ \lim_{h\to o}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x).$$

Сега за секое од тврдењата на теоремата посебно имаме

а) $\displaystyle\lim_{h\to o}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}=\lim_{h\to o}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to o}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=$
$=f'(x)+g'(x)$.

б) $\displaystyle\lim_{h\to o}\frac{(f-g)(x+h)-(f-g)(x)}{h}=\lim_{h\to o}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to o}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=$
$=f'(x)-g'(x)$.

в) $\displaystyle\lim_{h\to o}\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h}=\lim_{h\to o}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}=$

$$=\lim_{h\to o}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to o}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}+\lim_{h\to o}\frac{f(x)g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to o}g(x+h)\cdot\lim_{h\to o}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+f(x)\cdot\lim_{h\to o}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=$$

$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

г) $\displaystyle\lim_{h\to o}\frac{1}{h}\left[\left(\frac{f}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x)\right]=\lim_{h\to o}\frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right]=$

$$=\lim_{h\to o}\frac{1}{h}\frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+h)}{g(x)\cdot g(x+h)}=$$

$$=\lim_{h\to o}\frac{1}{h}\frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+h)}{g(x)\cdot g(x+h)}=$$

$$=\left[\lim_{h\to o}\frac{(f(x+h)-f(x))\cdot g(x)}{h}-\lim_{h\to o}\frac{(g(x+h)-g(x))\cdot f(x)}{h}\right]\lim_{h\to o}\frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)}=$$

$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Со што доказот на теоремата комплетно е завршен.

Теорема 4. (извод од сложена функција). Нека функцијата $f(y)$ е диференцијабилна во точката $y = g(x)$, а функцијата $g(x)$ е диференцијабилна во точката x, тогаш суперпозицијата (сложената функција) $H(x)$ зададена со $H(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, е диференцијабилна во точката x и притоа

$$H'(x) = f'(g) \cdot g'(x).$$

Доказ. Нека прирастот на функцијата $g(x)$ за прирастот на аргументот x еднаков на h го означиме со $k = g(x+h) - g(x)$, $y + k = g(x+h)$, а тоа заначи за $h \to 0$, следува и $k \to 0$. Сега за изводот имаме

$$H'(x) = \lim_{h \to o} \frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{h} = \lim_{h \to o} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))(g(x+h) - g(x))}{h(g(x+h) - g(x))} =$$

$$= \lim_{k \to o} \frac{f(y+k)) - f(y)}{k} \cdot \lim_{h \to o} \frac{g(x+h)) - g(x)}{h} = f'(g(x))g'(x).$$

Теорема 5. (Извод од инверзна функција) Нека функцијата $y = f(x)$ дефинирана како $f:(a,b) \to Y$ е непрекината и монотона функција, а тоа значи дека има инверзна функција $f^{-1}(x)$ за која $f^{-1}: Y \to (a,b)$. Ако $y = f(x)$ е диференцијабилна функција во точката $x \in (a,b)$, тогаш диференцијабилна е и функцијата $f^{-1}(y)$ во точката $y = f(x) \in Y$, и притоа точно е равенството

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) \cdot f'(x) = 1. \qquad (10)$$

Доказ. Да забележиме дека h и k се еквивалентни бесконечно мали величини и од $x = f^{-1}(f(x))$ и $x + h = f^{-1}(f(x+h)) = f^{-1}(f(x)+k)$, за величината h добиваме $h = f^{-1}(f(x)+k) - f^{-1}(f(x))$.

Сега ја добиваме следната гранична вредност

$$1 = \lim_{h \to o} \frac{h}{k} = \lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{k \to o} \frac{f^{-1}(f(x)+k) - f^{-1}(f(x))}{k} =$$

$$= f'(x) \cdot \left(f^{-1}\right)'(f(x)).$$

Со што ја докажавме теоремата.

8.5. Изводи од елементарните функции

Во овој дел ќе ги определиме изводите од елементарните функции притоа користејќи ги веќе докажаните правила за изводите .

1) За константната функција веќе добивме: $y(x) = c$, $y' = 0$, $(c)' = 0$.

2) За логаритамската функција $y = \ln x$, со оглед на границата $\lim\limits_{h\to o} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$, добиваме

$$y' = (\ln x)' = \lim_{h\to o} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h\to o} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{h\to o} \frac{x}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} .$$

3) За логаритамската функција по основа a , односно $y = \log_a x$, со оглед на границата $\lim\limits_{h\to o} \dfrac{\log_a(1+h)}{h} = \dfrac{1}{\ln a}$, добиваме

$$y' = (\log_a x)' = \lim_{h\to o} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} = \lim_{h\to o} \frac{1}{h} \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h\to o} \frac{x}{h} \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x \ln a} .$$

4) За изводот на степенската функција $y = x^{\alpha}$, каде $\alpha \in \mathbb{R}$ со оглед на претставувањето $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ и правилото за извод од сложена функција добиваме $y' = (x^{\alpha})' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x} (\alpha \ln x)' = x^{\alpha} \dfrac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$.

5) Со оглед на големата примена посебно ќе го издвоиме случајот за $\alpha = \dfrac{1}{2}$, односно за изводот на функцијата $y = \sqrt{x}$, добиваме:

$$y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

6) За функцијата , имаме $\alpha = 1$, па согласно 4) за изводот добиваме

$$y' = (x)' = 1 \cdot x^{o} = 1 .$$

7) За изводот на експоненцијалната функција $y = a^x$, за $a > 0$ со оглед на познатата граница $\lim\limits_{h\to o} \dfrac{a^h - 1}{h} = \ln a$, добиваме:

$$y' = (a^x)' = \lim_{h\to o} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to o} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a .$$

8) Специјално ако $a = e$, основата на природните логаритми тогаш за изводот на функцијата $y = e^x$, од формулата (7), добиваме:

$$y' = (e^x)' = e^x .$$

9) За изводната функција на функцијата $y = \sin x$, со оглед на познатата граница $\lim\limits_{h\to o} \dfrac{\sin h}{h} = 1$, добиваме:

$$y' = (\sin x)' = \lim_{h\to o} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to o} \frac{2 \sin \frac{x+h-x}{2} \cos \frac{x+h+x}{2}}{h} =$$

$$=\lim_{h\to o}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\lim_{h\to o}\cos\frac{2x+h}{2}=\cos x\,.$$

10) За функцијата $y=\cos x$, од истите причини добиваме:

$$y'=(\cos x)'=\lim_{h\to o}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to o}\frac{-2\sin\frac{x+h-x}{2}\sin\frac{x+h+x}{2}}{h}=$$

$$=-\lim_{h\to o}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\lim_{h\to o}\sin\frac{2x+h}{2}=-\sin x\,.$$

11) За изводната функција на $y=\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$, со оглед на правилото за извод од количник на две функции добиваме:

$$y'=(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

12) За изводната функција на $y=\operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x}$, од истите причини добиваме:

$$y'=(\operatorname{ctg}x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\cdot\sin x-\cos x\cdot(\sin x)'}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}\,.$$

За циклометриските (аркус) функциите ќе го примениме правилото за извод од инверзна функција запишано како

$$y'(x)=\frac{1}{x'(y)}\,.$$

13) За функцијата $y=\arcsin x$, со оглед на $x=\sin y$ и равенството (*) имаме:

$$y'=(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

14) За функцијата $y=\arccos x$, со оглед на $x=\cos y$ и равенството (*) имаме:

$$y'=(\arccos x)'=\frac{1}{(\cos y)'}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

15) За функцијата $y=\operatorname{arctg}x$, со оглед на $x=\operatorname{tg}y$ и равенството (*) имаме:

$$y'=(\operatorname{arctg}x)'=\frac{1}{(\operatorname{tg}y)'}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}\,.$$

16) За функцијата $y=\operatorname{arcctg}x$, со оглед на $x=\operatorname{ctg}y$ и равенството (*) имаме:

$$y'=(\operatorname{arcctg}x)'=\frac{1}{(\operatorname{ctg}y)'}=-\sin^2 y=-\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}=-\frac{1}{1+x^2}\,.$$

Користејќи го правилото за извод од сложена функција ќе испишеме една таблица на изводи од воопштени елементарни функции, а која во понатамошната работа, во практичната примена, може да се покаже како многу корисна .

1) $y=(f(x))^{\alpha}$ има извод $y'=\alpha f'(x)(f(x))^{\alpha-1}$;

2) $y=\sqrt{f(x)}$ има извод $y'=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}f'(x)$;

3) $y=\ln(f(x))$ има извод $y'=\frac{1}{f(x)}f'(x)$;

4) $y=\log_a(f(x))$ има извод $y'=\frac{1}{f(x)\cdot\ln a}f'(x)$;

5) $y=e^{f(x)}$ има извод $y'=e^{f(x)}f'(x)$;

6) $y=a^{f(x)}$ има извод $y'=a^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot\ln a$;

7) $y=\sin(f(x))$ има извод $y'=f'(x)\cdot\cos f(x)$;

8) $y=\cos(f(x))$ има извод $y'=-f'(x)\cdot\sin(f(x))$;

9) $y=\operatorname{tg}(f(x))$ има извод $y'=f'(x)\cdot\frac{1}{\cos^2 f(x)}$;

10) $y=\operatorname{ctg}(f(x))$ има извод $y'=-f'(x)\cdot\frac{1}{\sin^2 f(x)}$;

11) $y=\arcsin(f(x))$ има извод $y'=f'(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}}$;

12) $y=\arccos(f(x))$ има извод $y'=-f'(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}}$;

13) $y=\operatorname{arctg}(f(x))$ има извод $y'=f'(x)\cdot\frac{1}{1+f^2(x)}$;

14) $y=\operatorname{arcctg}(f(x))$ има извод $y'=-f'(x)\cdot\frac{1}{1+f^2(x)}$;

Така на пример за функцијата $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ изводот ќе биде:

$$y'=\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{(1+x)\cdot\sqrt{x}}.$$

А за функцијата $y=\ln\left(x^2+2x\right)$ изводната функција е:

$$y'=\frac{1}{x^2+2x}\cdot(2x+2)=\frac{2(x+1)}{x^2+2x}.$$

Да забележиме ако во сложената функција има повеќе степени на сложеност (повеќе суперпозиции) на пример три $y(x)=f\left(g(h(x))\right)$, тогаш изводната функција се добива согласно формулата:

$$y'(x)=f'(g)\cdot g'(h)\cdot h'(x).$$

На пример изводот на функцијата $y=\ln\left(x+\sqrt{2+2x+x^2}\right)$ изнесува:

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{2+2x+x^2}}\cdot\left(x+\sqrt{2+2x+x^2}\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{2+2x+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2+2x}{2\sqrt{2+2x+x^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{2+2x+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{2+2x+x^2}+1+x}{\sqrt{2+2x+x^2}}.$$

8.6. Изводи од имплицитни и параметарски зададени функции

Нека со равенката $F(x,y)=0$, имплицитно е зададена функцијата $y=y(x)$ дефинирана на некој интервал (a,b), односно нека важи

$$F(x,y(x))=0\text{, за секој } x\in(a,b).$$

Ако во оваа равенка го примениме правилото за определување на извод од сложена функција може да се пресмета изводот на функцијата $y=y(x)$ во секоја точка $x\in(a,b)$ за која функцијата $y=y(x)$ е диференцијабилна. Постапката за определување на изводот би била следната. Прво, согласно правилата за определување на изводи, од сите фигурирачки елементарни функции во однос на x, определуваме прв извод означен со F'_x, а потоа истото го правиме и со елементарните функции што зависат од y и го означуваме со F'_y потоа го множиме со y'. Односно ја добиваме равенката

$$F'_x(x,y)+F'_y(x,y)\cdot y'=0\text{, следователно } y'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Така на пример нека $y=y(x)$ е зададена имплицитно со равенката

$$x+y(x)+e^{xy(x)}=0.$$

Барајќи извод по x постепено добиваме

$$1+y'(x)+e^{xy(x)}\left(y(x)+xy'(x)\right)=0,$$

од што со решавање по $y'(x)$ добиваме

$$y'(x)=-\frac{1+y(x)e^{xy(x)}}{1+xe^{xy(x)}}.$$

Да забележиме дека $F'_x(x,y)=1+y(x)e^{xy(x)}$ и $F'_y(x,y)=1+xe^{xy(x)}$. Значи за определување на овие изводи кога определуваме извод по x, y го сметаме за константа и обратно кога определуваме извод по y, x го сметаме за константа.

Пример 5. (логаритамски извод) Нека е $f(x)>0$. Да се определи изводот на функцијата $y(x)=(f(x))^{g(x)}$, ако се знае дека $f(x)$ и $g(x)$ се диференцијабилни функции.

Решение. Да забележиме дека и $y(x)>0$ и дека има дефинициона област $D_y=\left\{x\mid x\in D_f\cap D_g\wedge f(x)>0\right\}$, во којашто таа е диференцијабилна. Со логаритмирање добиваме $\ln(y(x)) = g(x)\cdot\ln(f(x))$. Сега согласно правилото за извод од имплицитно зададена функција добиваме

$$\frac{y'}{y(x)} = g'(x)\cdot\ln(f(x)) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}, \text{ односно}$$

$$y'(x) = (f(x))^{g(x)}\left[g'(x)\cdot\ln(f(x)) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right].$$

Пример 6. Да се пресмета изводот на имплицитно дадената функција

$$\ln(x^2+y^2) = 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Решение. согласно формулите за извод од логаритам и аркус тангенс добиваме:

$$\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2} = 2\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{y'x-y}{x^2},\ \frac{2(x+yy')}{x^2+y^2} = 2\frac{y'x-y}{x^2+y^2},\ x+yy' = y'x-y.$$

Нека функцијата $y = f(x)$ е зададена со параметарските равенки $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ за $t \in (a,b) = E$. Ако функцијата $x = \varphi(t)$ е непрекината и монотона на E, тогаш постои инверзна функција $t = \varphi^{-1}(x)$ и притоа за функцијата $y = f(x)$ важи $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Значи функцијата $f(x)$ е суперпозиција на функциите ψ и φ^{-1}. За изводот на функцијата $y = f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ имаме

$$y'(x) = f'(x) = [\psi(\varphi^{-1}(x))]' = \psi'(t)\cdot(\varphi^{-1}(x))' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \text{ Значи добивме}$$

$$y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

е формула за пресметување на изводи од параметарски зададени функции ако постојат изводите $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ и ако $\varphi'(t) \neq 0$.

Пример 7. Да се определи изводната за функцијата $f(x)$, зададена со параметарските равенки: $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$.

Решение. $\dot{x} = a(1-\cos t) = 2a\sin^2\frac{t}{2}$, $\dot{y} = a\sin t = 2a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$. Сега за изводод на функцијата $f(x)$ имаме $f'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2a\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$.

8.7. Задачи за самостојно решавање

1. Да се пресметаат изводите од наведените функции:

а) $y=x^4+3x^2+\frac{1}{x}+3$, б) $y=\frac{x+2}{x^2-1}$,

в) $y=(x^4+3x^2)\left(\frac{1}{x}-2\right)$, г) $y=2^x\cdot\ln(2x+3)$,

д) $y=\frac{x^3+2}{x^2+4}$, ѓ) $y=(x^2+3x)\operatorname{arctg}x$,

е) $y=x^{\frac{2}{3}}+5x^{\frac{3}{5}}+\frac{1}{x^2}+x$, ж) $y=(x^2+3)\cdot\sin x\cdot\cos x\frac{x=2}{x^2-1}$,

з) $y=xctgx$.

2. Да се определат изводите од сложените функции:

а) $y=\sqrt{2ax+x^2}$, б) $y=arctg\frac{x+1}{1-x}$,

в) $y=(x^4+3x^2)^3(x-2)^4$, г) $y=\sqrt[3]{(4x+3x^2)}$,

д) $y=\ln\frac{x+2}{x^2-1}$, ѓ) $y=\log_3(x^2+5x)$,

е) $y=\arcsin\frac{1}{x}$, ж) $y=\frac{\sin(nx)}{\cos(mx)}$,

з) $y=\arccos(x^2+2x)$, ѕ) $y=\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2$,

и) $y=e^{\sin x}\cos x+e^{\cos x}\sin x$, ј) $y=(x^4+3x^2)\ln(x^2+2)$,

к) $y=\ln\frac{x^2+a^2}{a^2-x^2}$, л) $y=\ln(\ln(\ln(x^2+2x)))$,

љ) $y=\arcsin\frac{1}{\sqrt{x+1}}$, м) $y=\frac{\cos(nx)}{\sin(nx)}$,

н) $y=\operatorname{arctg}(x^2+2x)$.

3. Да се определат изводите на параметарски зададените функции

а) $\begin{matrix} x=\sin t-t\cos t \\ y=\cos t+t\sin t \end{matrix}$, б) $\begin{matrix} x=e^{2t}\cos^2 t \\ y=e^{2t}\sin^2 t \end{matrix}$,

в) $\begin{matrix} x=a(1-\cos t) \\ y=a(t-\sin t) \end{matrix}$, г) $\begin{matrix} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{matrix}$.

4. Да се определат изводите од имплицитно зададената функција

а) $x^2+y^2+2y-4x=3$, б) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$,

в) $e^{xy}-x^2+y^2=x-y$, г) $\sin x+\sin y=\sin(x+y)$,

д) $(x^2+y^2)^2=2xy^2$, ѓ) $\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

5. Да се определат логаритамските изводи

а) $y=(\sin x)^{\cos x}$, б) $y=x^{\ln x}$, в) $y=(x^2+3x+5)^{x=2}$.

6. Определи лев и десен извод од функцијата:

а) $y=(x-2)^{\frac{2}{3}}$ во точката $x=2$,

б) $y=|\ln x|$, во точката $x=1$.

7. Да се напишат равенките на тангентите на кривата $y=y(x)$ која е зададена имплицитно со равенката

$$x^2+y^2+4x-4y=-3,$$

а кои се повлечени во нејзините пресечни точки со $x-$оската.

8. Да се напишат равенките на тангентите на кривата $y=y(x)$ која е зададена со параметарските равенки

$$x=a\sin^3 t,\ y=a\cos^3 t,$$

а кои се повлечени во нејзините пресечни точки со правата $y=x$.

9. Да се докаже дека сегментот, меѓу координатните оски, од тангентата повлечена во произволна точка од кривата $y=y(x)$ зададена имплицитно со равенката

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},$$

е со постојана должина.

10. Низ точката $A(0,-3)$ повлечи тангента кон кривата.

$$y=x^2+1.$$

11. Да се определи бројот на решенијата на равенката

$$\ln x-kx=0,$$

во зависност од реалниот параметар k. (упатство. Да се определи бројот на пресечните точки на кривата $y=\ln x$ и правата $y=kx$).

12. Да се определи под кој агол се сечат кривите

$$y=x^2 \text{ и } x^2=y.$$

13. Да се определи пресечната точка на тангентите на кривата

$$y=\frac{1+3x^2}{3+x^2},$$

што се повлечени во точките од кривата со ординати $y=1$.

14. Да се покаже дека тангентата повлечена во произволна точка од кривата

$$ay^2+bx^2=x^2y^2,$$

ја сече $x-$оската во точка чија апсциса е пропорционална со кубот на апсцисата на допирната точка.

15. Нека се дадени двете функции

$$f(x)=\operatorname{arctg} x \text{ и } g(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}.$$

Да се докаже точноста на равенството

$$f(x)-g(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}, x\in(-\infty,-1)\\ 0, x\in(-1,-1)\\ \frac{\pi}{2}, x\in(1,+\infty)\end{cases}.$$

8.8. Изводи и диференцијали од повисок ред

Во досегашното разгледување ние за одредена функција на даден интервал (a,b) определувавме извод, кој пак беше функција, што ја нарековме изводна функција. А тоа значи дека и од неа може да се определува извод.

Деф.5. Ако функцијата $f'(x)$ е диференцијабилна во некоја околина на точката x, тогаш границата

$$\lim_{h\to o}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h},$$

ако постои, се вика втор извод или извод од втор ред и се означува со $f''(x)$.

Ознаката може да биде и само y'', ако го знаеме аргументот (променливата). Ознака за работа би била $y''=\left(y'\right)'$, а лајбницова ознака би била $y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$.

Сега по аналогија имаме $y'''=\left(y''\right)'$ и ќе го викаме трети извод, а што е извод од вториот извод. Со повторување на постапката се добиваат изводи од повисок ред , а кои ние ги означуваме со $y^{(n)}$, односно извод од $n-$ти ред. Сега повторно по аналогија ја имаме формулата

$$y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)',\ \text{односно}\ y^{(n)}=\frac{d}{dx}\left(y^{n-1}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=\frac{d^ny}{dx^n},$$

а кои се заправо формули за определување на $n-$ти извод.

Да забележиме дека со оглед на претходно докажаната теорема за извод од збир (разлика) на две функции $f(x)\pm g(x)$ јасна е точноста на формулата

$$(f(x)\pm g(x))^{(n)}=f^{(n)}(x)\pm g^{(n)}(x).$$

Пример 8. Определи извод од било кој ред за функцијата

а) $y+x^4+3x^2$, б) $y=\sin 2x$.

Решение. а) Почнувајќи од првиот извод последователно добиваме

$$y'=4x^3+6x,\ y''=12x^2+6,\ y'''=24x,\ y^{(4)}=24,\ y^{(5)}=0,$$

$$\ldots, y^{(n)}=0.$$

б) За првите четири изводи добиваме:

$$y'=2\cos 2x,\ y''=-2^2\sin 2x,\ y'''=-2^3\cos 2x,\ y^{(4)}=2^4\sin 2x.$$

Со оглед на тоа што секој природен број има еден од записите:

$$n=4k,\ n=4k+1,\ n=4k+2,\ n=4k+3,$$

за изводот од било кој ред добиваме:

$$y^{(4k)} = 2^{4k}\sin 2x\,,\; y^{(4k+1)} = 2^{4k+1}\cos 2x\,,\; y^{(4k+2)} = -2^{4k+2}\sin 2x\,,$$
$$y^{(4k+3)} = -2^{4k+3}\cos 2x\,.$$

Пример 9. Нека функциите $u(x)$ и $v(x)$ имаат изводи од ред n. Да се определи извод од $n-$ти ред за функцијата $y(x) = u(x)\cdot v(x)$.

Решение. За првите три изводи имаме

$$y'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)\,;$$
$$y''(x) = u''(x)\cdot v(x) + 2u'(x)\cdot v'(x) + u(x)\cdot v''(x)\,;$$
$$y'''(x) = u'''(x)\cdot v(x) + 3u''(x)\cdot v'(x) + 3u'(x)\cdot v''(x) + u(x)v'''(x)\,;$$

Од овие три формули за изводот од $n-$ти ред се наметнува формулата

$$y^{(n)} = \binom{n}{0}u^{(n)}(x)\cdot v(x) + \binom{n}{1}u^{(n-1)}(x)\cdot v'(x) + \binom{n}{2}u^{(n-2)}(x)\cdot v''(x) + \dots$$
$$\dots + \binom{n}{n-1}u'(x)\cdot v^{(n-1)}(x) + \binom{n}{n}u(x)\cdot v^{(n)}(x)\,.$$

Формулата заправо е биномната формула во која наместо степени фигурираат изводи. Со математичка индукција лесно се потврдува.

Последната формула позната е како Лајбницова формула за извод од производ на две функции, од било кој ред.

Да забележиме дека формулата е погодна за примена ако едната функција има конечен број изводи различни од нула а од другата функција лесно може да се определи извод од било кој ред.

Така на пример за производот $f(x) = x^2\cdot u(x)$, стоти извод ќе биде

$$f^{(100)}(x) = x^2\cdot u^{(100)}(x) + 200xu^{(99)}(x) + 9900u^{(98)}(x)\,.$$

Ако функцијата $y = f(x)$ беше зададена со параметарските равенки $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, тогаш првиот извод го добивавме со формулата

$$y'(x) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\,,$$

каде што $\dot{y}(t) = \psi'(t)$ $\dot{x}(t) = \varphi'(t)$ и $t = \varphi^{-1}(x)$. Сега за вториот извод согласно правилата за извод од сложена функција и извод од инверзна функција а користејќи ја лајбницовата ознака за изводот добиваме

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\ddot{y}(t)\cdot\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\cdot\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t))^2}\cdot\frac{1}{\dot{x}(t)} =$$
$$= \frac{\ddot{y}(t)\cdot\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\cdot\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t))^3}\,.$$

Значи формула за определување на вториот извод за параметарски зададена функција е:

$$y''(x)=\frac{\ddot{y}(t)\cdot\dot{x}(t)-\dot{y}(t)\cdot\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t))^3}.$$

Сега при претпоставка дека сме определиле $y^{(n-1)}(x)$ за $y^{(n)}(x)$ добиваме

$$y^{(n)}(x)=\frac{d}{dx}\left(y^{(n-1}(x)\right)=\frac{d}{dt}\left(y^{(n-1}(x)\right)\cdot\frac{1}{\dot{x}(t)}.$$

Значи формула за определување на $n-$ти извод од параметарски зададена функција е

$$y^{(n)}(x)=\frac{d}{dt}\left(y^{(n-1}(x)\right)\cdot\frac{1}{\dot{x}(t)}. \qquad (11)$$

Така на пример за функцијата $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ веќе добивме $y'(x)=ctg\frac{t}{2}$, па за вториот извод согласно формулата (11) добиваме:

$$y''(x)=\frac{d}{dt}\left(y'(x)\right)\frac{1}{\dot{x}(t)}=\frac{d}{dt}\left(ctg\frac{t}{2}\right)\frac{1}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\frac{1}{2a\sin^2\frac{t}{2}}=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}.$$

Ако пак функцијата $y=y(x)$ е зададена имплицитно со $F(x,y(x))=0$, тогаш за определување на вториот извод, тргаме од првиот извод

$$y'(x)=-\frac{F'_x(x.y)}{F'_y(x.y)}=G(x,y),$$

и го користиме правилото за извод од сложена функција

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(G(x,y))=G'_x(x,y)+G'_y(x,y)\cdot y'(x).$$

За изводите од повисок ред постапката се повторува. Тоа нешто ќе го покажиме на пример за функцијата $\ln(x^2+y^2)=2arctg\frac{y}{x}$, за која веќе добивме дека $y'(x)=\frac{x+y}{x-y}$. Сега за вториот извод имаме

$$y''(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)=\frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}=$$

$$=\frac{x-y-x-y+y'(x+y+x-y)}{(x-y)^2}=\frac{-2y+2xy'}{(x-y)^2}=$$

$$=2\frac{-y(x-y)+x(x+y)}{(x-y)^3}=2\frac{x^2+y^2}{(x-y)^3}.$$

Да укажеме на една примена на вториот извод во механика.

Нека материјална точка врши праволиниско движење по законот на патот $s=s(t)$, со брзина $v=v(t)$, за која видовме дека $v=v(t)=s'(t)$. Бидејќи материјалната точка во секој момент на времето t зазема одредена положба и има одредена моментална брзина следува функцијата $v=v(t)$ е непрекината и диференцијабилна па спрема тоа важи

$$\lim_{h\to o}\frac{v(t+h)-v(t)}{h}=v'(t)=a(t)\,.$$

Притоа добиената физичка величина $a(t)$ (согласно порано реченото е брзина на промена на брзината на материјалната точка), позната е како забрзување на материјалната точка и за неа имаме $a(t)=s''(t)$. Забрзувањето се добива како втор извод од патот.

Деф.6. Ако функцијата $f(x)$ е n пати диференцијабилна во точката x_o, тогаш полиномот

$$f^{(n)}(x_o)h^n\,,$$

се вика $n-$ти диференцијал и се означува со

$$[d^n f(x_o)](h)=f^{(n)}(x_o)h^n\,.$$

Ако уште имаме во вид дека $dx=h$, добиваме

$$[d^n f(x_o)](h)=\left[f^{(n)}(x_o)dx^n\right](h)\,,$$

Односно ја добиваме ознаката $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ што е веќе добиената ознака за $n-$ти извод од функцијата $f(x)$.

Пример 10. Да се пресмета вредноста на изразот

$$A(x)=y''(x)-y'(x)+y(x)e^{2x}\,,$$

ако е $y(x)=\cos e^x+\sin e^x$.

Решение. За првиот извод имаме

$$y'(x)=e^x\cos e^x-e^x\sin e^x\,.$$

А за вториот извод добиваме

$$y''(x)=e^x\cos e^x-e^x\sin e^x-e^{2x}\cos e^x-e^{2x}\sin e^x\,.$$

Со замена во $A(x)$ добиваме:

$$A(x)=y''(x)-y'(x)+y(x)e^{2x}=e^x\cos e^x-e^x\sin e^x-e^{2x}\cos e^x-e^{2x}\sin e^x-$$
$$-e^x\cos e^x+e^x\sin e^x+e^{2x}(\sin e^x+\cos e^x)=0\,.$$

Пример 11. Материјална точка, со маса m врши праволиниско движење по законот на патот

$$s(t)=\frac{1}{3}t^3+t^2+2t-3\,.$$

Да се определи силата што дејствува на материјалната точка во произволен момент на времето t.

Решение. Од физика, (прв Њутнов закон) , знаеме дека во било кој момент на времето t, $F(t)=m\cdot a(t)$. Па бидејќи $a(t)=s''(t)$ добиваме постепено $s'(t)=t^2+2t+2$, $s''(t)=2t+2$, односно $F(t)=(2t+2)m$.

8.9. Задачи за самостојно решавање

1. Да се пресмета вредноста на изразот $A(x)$ при соодветната вредност на функцијата $y=y(x)$

а) $A(x)=4xy''(x)+2y'(x)-y(x)$, ако $y(x)=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$;

б) $A(x)=x^2y''(x)+xy'(x)+y(x)$, ако $y(x)=\cos(\ln x)+\sin(\ln x)$;

в) $A(x)=(x+4)^3y''(x)+(x+4)^2y'(x)+(x+4)y(x)+10$, ако $y(x)=\dfrac{x-3}{x+4}$;

г) $A(x)=\dfrac{(x+y)^3}{2(x^2+y^2)}y''(x)+\dfrac{x+y}{x-y}y'(x)$, ако функцијата $y=y(x)$ е зададена со параметарските равенки $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$.

2. Да се пресметаат $y''(x)$ и $y'''(x)$ ако функцијата $y=y(x)$ е зададена со параметарските равенки $x=f(t)$, $y=tf(t)$, ако $f(t)$ е три пати диференцијабилна функција.

3. За подолу наведените функцииида се определат наведените изводи:

а) $f(x)=(x^2+2x+3)e^{-x}$, извод од десети ред;

б) $f(x)=\cos x$, $f^{(n)}(0)$;

в) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2-2x-3}$, извод од дваесети ред;

г) $f(x)=(x+2)\cos x$, $f^{(30)}(x)$.

4. Да се определат изводите од втор ред на имплицитно дадената функција:

а) $x^2+y^2+4x-4y-8=0$; б) $1+xe^{x+y}=xy-e^x$;

в) $\sin(x+y)=x-y$; г) $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=arctg\frac{y}{x}$.

5. Да се определат решенијата на равенката $f''(x)=0$, ако е :

а) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$; б) $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$.

8.10. Основни теореми на диференцијалното сметање

Овде ќе разгледаме неколку теореми за изводите на функциите од еден реален аргумент кои се познати како основни теореми на диференцијалното сметање. Тие исто така се познати и како теореми за средна вредност, а тоа именување повеќе важи за нивното физичко (кинематичко) толкување. Во математичка смисла таквото именување повеќе се однесува за точки од внатрешноста на интервалот (a,b), односно за таканаречени средни точки.

Теорема 6. (Теорема на Ферма) Нека $f(x)$ е диференцијабилна функција во интервалот (a,b). Ако $f(c)$ е екстрем на функцијата $f(x)$ за некој $c\in(a,b)$, тогаш $f'(c)=0$.

Доказ. Нека се исполнети условите од теоремата на Ферма и нека во точката $c\in(a,b)$ функцијата f има максимум, односно важи:

$f(c+h)-f(c)<0$, од што следуваат неравенствата: $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}>0$, за $h<0$ и $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}<0$, за $h>0$. Ако h тежи кон 0 ги добиваме границите:

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=f'(c-0)>0,$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=f'(c+0)<0.$$

Сега од диференцијабилноста на функцијата f и од последните две неравенства следува дека $f'(c)=0$. Аналогно се докажува точноста на теоремата и ако е $f(c)$ минимум.

Геометриската интерпретација на теоремата на Ферма се состои во следното: тангентата повлечена кон графикот на функцијата $y=f(x)$ во точката $C(c,f(c))$ е паралелна со $x-$оската.

Ќе дадеме и едно кинематичко толкување на оваа теорема. Нека материјална точка врши праволиниско движење. Ако на временскиот интервал $[t_1,t_2]$ материјалната точка достигнува најголема брзина, тогаш во некој момент на времето $t=t_o$ забрзувањето на материјалната точка е 0.

Обратната теорема не мора да биде точна, односно една функција може да биде диференцијабилна во даден интервал (a,b) и притоа $f'(c)=0$ за некој $c\in(a,b)$, но $f(c)$ да не биде екстрем за $f(x)$.

Така на пример функцијата $f(x)=x^3$ е диференцијабилна за секој $x\in R$ и $f'(0)=0$, но $f(0)=0$ не е нејзин екстрем.

Претпоставката за диференцијабилност на функцијата $f(x)$ во теоремата на Ферма не можеме да ја изоставиме што лесно се гледа од функцијата $f(x)=|x|$ која има екстрем во точката $x=0$, но $f(x)$ во таа точка не е диференцијабилна, бидејќи $f'(x)=\begin{cases}-1 & \text{за } x<0\\ 1 & \text{за } x>0\end{cases}$.

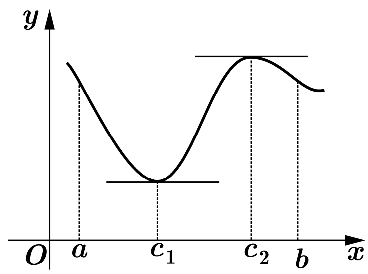
Теорема 7. (Теорема на Рол). Нека функцијата $f(x)$ е непрекината на $[a,b]$ и диференцијабилна во сите точки од внатрешноста. Ако важи $f(a)=f(b)$, тогаш постои барем една точка $c\in(a,b)$ за која $f'(c)=0$.

Доказ. Нека функцијата $f(x)$ на $[a,b]$ е константна, односно $f(x)=f(a)=f(b)$, тогаш $f'(x)=0$ за секој x од $[a,b]$, со што за овој случај теоремата е докажана.

Ако пак функцијата $f(x)$ на $[a,b]$ не е константна, тогаш таа ги достига својата најголема и најмала вредност. Барем една од овие точки е од внатрешноста на $[a,b]$. Нека е тоа точката $c\in[a,b]$. Според теоремата на Ферма $f'(c)=0$ со што теоремата е докажана. Најголемата и најмалата вредност на функцијата $f(x)$ на сегментот $[a,b]$ не можат да бидат a или b бидејќи $f(a)=f(b)$.

Забелешка. Ако важи $f(a)=f(b)=0$, тогаш теоремата на Рол може да се искаже: Меѓу секои две нули на функцијата има барем една нула на нејзиниот извод.

Геометриската смисла на теоремата на Рол се состои во следното: меѓу било кои две точки што се на графикот на функцијата, а се со исти ординати, постои барем една точка, од графикот на функцијата, во која тангентата е паралелна со $x-$оската. Илустрацијата е прикажана на сл.3.



сл. 3

За теоремата на Рол да дадеме едно кинематичко толкување.
Нека материјалната точка врши праволиниско движење и нека во секој момент на времето t, $\nu(t)$ е брзината на материјалната точка a, $a(t)$ е нејзиното забрзување. Ако постојат моменти на времето t , $t_1\neq t_2$ такви што $\nu(t_1)=\nu(t_2)$, тогаш од $a(t)=\nu'(t)$, а во согласност со теоремата на Рол постои момент на времето $t=t_o$ помеѓу t_1 и t_2, во кој забрзувањето на материјалната точка е нула, односно $a(t_o)=0$.

Теорема 8. (Теорема на Лагранж). Нека $f(x)$ е непрекината функција на сегментот $[a,b]$ и диференцијабилна во сите точки од неговата внатрешност, тогаш постои точка $c\in[a,b]$ таква што важи:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c). \qquad (11)$$

Доказ. Формираме помошна функција $F(x)=f(x)-kx$, $k=const$ за која ќе побараме да бидат задоволени условите од теоремата на Рол на сегментот $[a,b]$. За да биде $F(a)=F(b)$ треба да е

$$f(a)-ka=f(b)-kb,$$

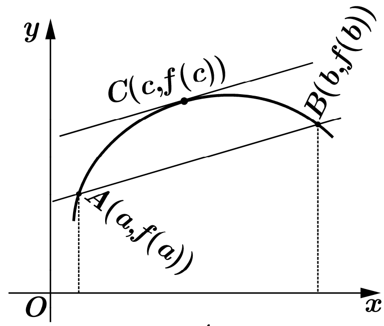
од каде што следува

$$k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Тогаш според теоремата на Рол постои барем една точка $c\in[a,b]$ за која $F'(c)=0$, односно $f'(c)-k=0$ т.е.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),$$

со што доказот на теоремата е завршен.



сл. 4

Геометриското толкување на теоремата на Лагранж се состои во тоа што на лакот AB од графикот на функцијата $y=f(x)$ (види сл.4) постои точка $C(c,f(c))$ во која тангентата е паралелна со секантата повлечена низ точките A и B.

И за оваа теорема ќе дадеме едно кинематичко толкување.

Нека материјалната точка врши праволиниско движење по законот на патот $s=s(t)$, тогаш брзината на материјалната точка се добива со формулата $\nu(t)=s'(t)$. Како математички функции двете се непрекинати и при тоа $s=s(t)$ е диференцијална функција. Значи задоволени се условите од теоремата на Лагранж, па на временскиот интервал $[t_1,t_2]$ постои момент на времето $t=t_o$ таков што важи равенството (8) од теоремата на Лагранж

$$\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}s'(t_o)=\nu(t_o),$$

а тоа е моменталната брзина на материјалната точка во моментот на времето $t=t_o$. А изразот на левата страна претставува средна брзина на материјалната точка на временскиот интервал $[t_1,t_2]$:

$$\nu_{sr}=\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}.$$

Значи едно кинематичко толкување на теоремата на Лагранж е дека средната брзина на временскиот интервал $[t_1,t_2]$ е еднаква на моменталната брзина во некој момент на времето $t=t_o$ од тој временски интервал.

Да забелешиме дека ако во формулата (11) ставиме $b=a+h$, $h>0$, тогаш $c=a+\theta h$, каде што $0<\theta<1$, па тогаш таа го добива обликот

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h). \qquad (12)$$

Формулата (12) уште се вика и формула за конечно нараснување и има примена за приближно пресметување на вредности на функции. Имено, барајќи го бројот θ меѓу броевите 0 и 1 и притоа водејќи сметка вредностите $f(a)$ и $f'(a+\theta h)$ да бидат точно определени, можеме приближно да ја пресметаме вредноста $f(a+h)$.

Пример 12. Со помош на формулата (12) приближно да се пресмета $\sin 31°$.

Решение. Да ја разгледаме функцијата $f(x)=\sin x$. Бидејќи $f'(x)=\cos x$ со примена на формулата (12) добиваме:

$$\sin(a+h)=\sin a+h\cos(a+\theta h),\ 0<\theta<1.$$

Од овде за $a=30°$, односно $a=\frac{\pi}{6}\mathrm{rad}$ и $h=1°$, односно $h=\frac{\pi}{180}rad=0{,}0174\,\mathrm{rad}$, па добиваме:

$$\sin 31° = \sin 30° + 0{,}0174\cos\left(\frac{\pi}{6}+0{,}0174\theta\right).$$

Ако ставиме $\theta=0$ го добиваме приближното равенство:

$$\sin 31° = 0{,}5+0{,}0174\cos 30°,$$

од каде следува

$$\sin 31° = 0{,}51507.$$

Да изнесеме и две интересни последици од теоремата на Лагранж.

1) Ако е $f(x)$ диференцијабилна функција во интервалот (a,b) и ако $f'(x)=0$, за секој $x\in(a,b)$, тогаш $f(x)$ е константна функција во интервалот (a,b).

Доказ. Нека $x\in(a,b)$ и нека ја разгледаме $f(x)$ во сегментот $[a,x]$. Според теоремата на Лагранж постои $c\in(a,b)$ таков што е $f(x)=f(a)+(x-a)f'(c)$, а бидејќи $f'(c)=0$ добиваме $f(x)=f(a)$.

2) Ако функциите имаат еднакви изводи во сегментот $[a,b]$, тогаш тие функции или се еднакви или пак се разликуваат за една адитивна константа.

Доказ. За функцијата $h(x)=f(x)-g(x)$ се исполнети условите од првата последица, па според тоа важи:

$$h(x)=k,\ k=const, \text{ т.е } f(x)=g(x)+k.$$

Пример 13. Да се докаже равенството

$$\mathrm{arctg}\frac{a+x}{a-x}-\mathrm{arctg}\frac{x}{a}=\frac{\pi}{4}, \text{ ако } x\in(-a,a).$$

Решение. Да ја разгледаме помошната функција

$$f(x)=\mathrm{arctg}\frac{a+x}{a-x}-\mathrm{arctg}\frac{x}{a}.$$

Го определуваме нејзиниот прв извод:

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)'-\frac{1}{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2}\left(\frac{a}{x}\right)'=\frac{2a}{2a^2+2x^2}-\frac{a}{a^2+x^2}=0.$$

Значи $f'(x)=0$, па според последица 1) $f(x)=k$, односно доволно е да определиме колку е, на пример, $f(0)$ за да ја определиме константата k.

$$f(0)=\mathrm{arctg}\frac{a+0}{a-0}-\mathrm{arctg}\frac{0}{a}=\mathrm{arctg}1-\mathrm{arctg}0=\frac{\pi}{4},$$

со што равенството е докажано.

Теорема 9. (Теорема на Коши). Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ ги задоволуваат следните услови:

1) $f(x)$ и $g(x)$ се непрекинати функции на сегментот $[a,b]$;

2) $f(x)$ и $g(x)$ се диференцијабилни функции на интервалот (a,b);

3) $g'(x) \neq 0$ во интервалот (a,b),

Тогаш постои точка $c \in (a,b)$ таква што е точно равенството:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (13)$$

Доказ. Да ја формираме помошната функција:

$$h(x) = f(x) + k \cdot g(x),\ k = const.$$

Функцијата $h(x)$ е непрекината на сегментот $[a,b]$ и диференцијабилна во неговата внатрешност. Константата k ќе ја определиме така да биде задоволен условот $h(a)=h(b)$, па тогаш според теоремата на Рол ќе имаме дека е $h'(c)=0$ за некој $c \in (a,b)$. Од $h(a)=h(b)$ имаме:

$$f(a)+k\cdot g(a) = f(b)+k\cdot g(b),$$

а од тука поради $g(a) \neq g(b)$ добиваме

$$k = \frac{f(b)-f(a)}{g(a)-g(b)}.$$

Бидејќи пак е $h'(x) = f'(x) + k \cdot g'(x)$ имаме

$$0 = h'(c) = f'(c) + \frac{f(b)-f(a)}{g(a)-g(b)} g'(c),$$

од каде што следува точноста на равенството (13).

Ако $g(a)=g(b)$, тогаш функцијата $g(x)$ ги задоволува условите од теоремата на Рол, па c од равенството (13) е исто со c од теоремата на Рол за функцијата $g(x)$.

Да забележиме дека за $g(x) = x$ од теоремата на Коши ја добиваме теоремата на Лагранж. Значи теоремата на Коши претставува обопштување на теоремата на Лагранж. Ќе дадеме едно кинематичко толкување на теоремата на Коши.

Нека една материјална точка врши праволиниско движење и нека во секој момент на времето t изминува пат $s(t)$ и притоа има брзина $\nu(t)$ и забрзување $a(t)$. Од кинематичкото толкување на изводот знаеме дека важи:

$$\nu(t) = s'(t),\ a(t) = \nu'(t).$$

Нека t_1 и t_2 се два различни момента од времето t и нека $a(t) \neq 0$ за секој момент на времето t, кој е помеѓу моментите на време t_1 и t_2. Јасно е дека во математичка смисла функциите $s(t)$ и $\nu(t)$ ги задоволуваат условите од теоремата на Коши на сегментот $[t_1,t_2]$. Па според тоа точно е равенството:

$$\frac{s(t_2)-s(t_1)}{\nu(t_2)-\nu(t_1)}=\frac{s'(t_3)}{\nu'(t_3)}=\frac{\nu(t_3)}{a(t_3)}.$$

Ако броителот и именителот од левата страна на последната равенка ги поделиме со t_2-t_1, добиваме:

$$\frac{\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}}{\dfrac{\nu(t_2)-\nu(t_1)}{t_2-t_1}}=\frac{\nu_{sr}}{a_{sr}},$$

што значи го добивме односот на средната брзина и средното забрзување на материјалната точка на временскиот интервал $[t_1,t_2]$. Односно добивме дека количникот од средната брзина и средното забрзување на материјалната точка на временскиот интервал $[t_1,t_2]$ е еднаков на количникот на моменталната брзина и моменталното забрзување на материјалната точка во некој момент на времето $t=t_3$ што припаѓа на временскиот интервал $[t_1,t_2]$.

Теорема 10. (Правило на Лопитал). Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ се такви да важи:

1) $f(x)$ и $g(x)$ се диференцијабилни функции во околината на точката a, освен можеби во самата точка a;

2) $g'(x)\neq 0$, за $x\neq a$;

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ или $f(a)=g(a)=0$.

Ако постои границата $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, тогаш постои и границата $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и тие две се еднакви, односно точно е равенството:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (14)$$

Доказ. Од условите на теоремата јасно е дека за функциите $f(x)$ и $g(x)$ во сегментот $[a,x]$ применлива е теоремата на Коши, па според тоа постои $c\in(a,x)$ таков што

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Кога $x\to a$, тогаш и $c\to a$, па од последното равенство имаме:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

со што теоремата е докажана.

Да забележиме дека теоремата важи и за $x=\infty$. Исто така може да се примени кога имаме неопределености од видот $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(0\cdot\infty)$, $(\infty)^0$, $(0)^0$, $(1)^\infty$. Притоа треба да се внимава да биде задоволен третиот услов. За примената на Лопиталовото правило ги даваме следните илустрирачки примери:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{2x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2}=\frac{1}{2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$;

в)

$$\lim_{x\to 0}\frac{ctg\pi x}{(\ln x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\pi x}{\sin^2\pi x\cdot 2\ln x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\pi x}{\sin\pi x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin\pi x\cdot 2\ln x}=(-1)\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin\pi x}}{2\ln x}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{-\pi x\cos\pi x}{2\sin^2\pi x}=\frac{1}{0}=\infty;$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{-x}=-\lim\limits_{x\to 0}x=0$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}=A$, со логаритмирање имаме $\ln A=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1$, добивме $\ln A=1$, $A=e$. Значи $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}=e$.

ѓ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+3}{x^2+x+1}\right)^{2x+1}=A$, со логаритмирање добиваме

$$\ln A=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+2x+3)-\ln(x^2+x+1)}{\frac{1}{2x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x+2}{x^2+2x+3}-\frac{2x+1}{x^2+x+1}}{-\frac{2}{(2x+1)^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^2\left[(2x+2)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2+2x+3)\right]}{-2(x^2+2x+3)(x^2+x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^2(1-x^2)}{-2(x^2+2x+3)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(2+\frac{1}{x}\right)^2\left(-1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)}{-2x^4\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{-4}{-2}=2.$$ Добивме $\ln A=2$, значи $A=e^2=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+3}{x^2+x+1}\right)^{2x+1}$.

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x\cos x}{x^2+x\sin x}$, со оглед на тоа дека функциите $\sin x$ и $\cos x$ не се определени во точката $x=\infty$ и немаат граници во неа, следува дека лопиталовото правило за овој пример не е применливо. Непосредно добиваме:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x\cos x}{x^2+x\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2\cos x}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}=\frac{1+0}{1+0}=1.$$

8.11. Задачи за самостојно решавање

1. При кој услов меѓу параметрите n, r, p и s, равенката

$$x^n + rx^{n-p} + s = 0$$

има двоен корен.

2. Со помош на теоремата на Рол докажи дека полиномот

$$f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

има барем еден реален корен $x_1 \in [0,1]$, ако за полиномот

$$g(x) = \frac{a_o}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2} x^2 + a_n x$$

важи $g(1) = 0$.

3. Со помош на теоремата на Лагранж применета на функцијата

$$f(x) = \ln(1+x)$$

да се докаже точноста на неравенството

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x .$$

4. Да се покаже дека разликата од квадратните корени на два последователни природни броеви поголеми од 25 е помала од 0,1.

5. Да се покаже дека полиномот

$$f(x) = a_o + a_1 x + \ldots + a_k x^k - (a_{k+1} x^{k+1} + \ldots + a_n x^n),$$

каде што $a_i > 0$ за $i = 0,1,\ldots,n$ има само еден реалнем позитивен корен.

Упатство. Да се примени теоремата на рол за помошната функција $y(x) = \dfrac{f(x)}{x^k}$.

6. Ако полиномот $f(x)$ има реални корени тогаш и изводниот полино има само реални корени.

7. Со Лопиталово правило да се пресметаат следните гранични вредности:

а) $\lim\limits_{x\to o} \dfrac{\ln(1+x+x^2)}{\sin 3x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(a+x+x^2)}{x}$,

в) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\log_a x - x + a - 1}{x^2 - a^2}$, г) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}$,

д) $\lim\limits_{x\to o} \dfrac{\cos(xe^x) - 1}{x^2}$, ѓ) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x^2-3)}{3x^2+5x-22}$,

е) $\lim\limits_{x\to o} \left[\dfrac{a}{x\sin x} - \dfrac{b}{x^2}\right]$, ж) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[tgx - \dfrac{1}{1-\sin x}\right]$,

з) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[(ax^2+2)e^{\frac{k}{x^2}} - bx^2\right]$, ѕ) $\lim\limits_{x\to\infty} [x^n e^{-x}]$,

и) $\lim\limits_{x\to o} \left[x^n e^{\frac{1}{x}}\right]$, ј) $\lim\limits_{x\to a} (x-a)\ln(x-a)$,

к) $\lim\limits_{x\to o} \dfrac{tg3x - \sin 3x}{x^3}$.

8. Претходно логаритмирајќи, а потоа применувајќи го лопиталовото правило да се пресметаат границите:

а) $\lim\limits_{x\to o}\left[e^{3x}+2x\right]^{\frac{x^2+3}{x}}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}[1+\ln x]^{\frac{1}{x-1}}$,

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[tgx]^{\cos^2 x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[e^{kx}+1\right]^{\frac{a}{x}}$,

д) $\lim\limits_{x\to o}\left[\frac{\cos x+\cos 2x}{2}\right]^{\frac{1}{x^2+x}}$, ѓ) $\lim\limits_{x\to o}\left[\frac{\sin x}{x}+x\right]^{\frac{1}{x^2}}$,

е) $\lim\limits_{x\to\infty}[x+1]e^{\frac{1}{x}}$, ж) $\lim\limits_{x\to 1}[1+\ln(2-x)]^{\frac{1}{x^2-1}}$,

з) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{2}}\right]^{\frac{1}{16x^2-\pi^2}}$.

8.12. Монотоност и локални екстреми

Следните две теореми ги даваат како критериумите, така и можностите за определување на интервалите во кои една непрекината функција е монотоно растечка или монотоно опаднувачка, а исто така и критериумите за определување на локалните екстреми и нивната природа.

Теорема 11. Нека функцијата $f(x)$ е диференцијабилна во (a,b) ако $f'(x)>0$ за секој $x\in(a,b)$, тогаш $f(x)$ монотоно расте на тој интервал. Ако пак $f'(x)<0$ за секој $x\in(a,b)$, тогаш $f(x)$ монотоно опаѓа на тој интервал.

Доказ. Нека $x_1,x_2\in(a,b)$ и нека $x_1<x_2$, тогаш на сегментот $[x_1,x_2]$ функцијата f ги задоволува условите од теоремата на Лагранж, па според тоа постои точка $c\in(x_1,x_2)$ таква што важи

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1).$$

Ако $f'(x)>0$, за секој $x\in(a,b)$, тогаш и $f'(c)>0$, па следува дека $f(x_2)-f(x_1)>0$, што значи дека $f(x)$ е монотоно растечка функција на интервалот (a,b).

Ако пак $f'(x)<0$, за секој $x\in(a,b)$, тогаш и $f'(c)<0$, па следува дека $f(x_2)-f(x_1)<0$, што значи дека $f(x)$ е монотоно опаднувачка функција на интервалот (a,b).

Со теоремата на Ферма беше даден потребен услов за една диференцијална функција да има екстрем. Со следната теорема ќе дадеме потребни и доволнни услови за една функција, во некоја точка c да има екстрем, а воедно ќе ја определиме неговата природа.

Теорема 12. Нека непрекинатата функција f е диференцијабилна во околината $\nu(c,h)$ на точката c, освен можеби во самата точка c. Ако $f(c)$ е екстрем тогаш точни се тврдењата:

1) $f(c)$ е максимум за $f(x)$, ако $f'(x)>0$, за $x\in(c-h,c)$ и $f'(x)<0$ за $x\in(c,c+h)$;

2) $f(c)$ е минимум за $f(x)$, ако $f'(x)<0$ за $x\in(c-h,c)$ и $f'(x)>0$ за $x\in(c,c+h)$.

Доказ. Нека $f(c)$ е локален максимум. Тоа значи за секој x од $\nu(c,h)$, $f(c+h)-f(c)<0$, односно $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}>0$, за $h<0$ и $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}<0$, за $h>0$. Ако сега во неравенствата преминеме на граница добиваме:

$$f'(c-0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}>0,\ \text{за } h<0,$$

$$f'(c+0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}<0,\ \text{за } h>0,$$

што значи, согласно со теоремата за запазување на знакот на изводната функција во околината на точката c, точност на тврдењето 1).

Нека сега $f(c)$ е локален минимум. Тоа значи за секој x од $\nu(c,h)$, $f(c+h)-f(c)>0$, односно $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}<0$, за $h<0$ и $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}>0$, за $h>0$. Ако сега во неравенствата преминеме на граница добиваме:

$$f'(c-0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}<0,\ \text{за } h<0,$$

$$f'(c+0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}>0,\ \text{за } h>0,$$

што значи, согласно со теоремата за запазување на знакот на изводната функција во околината на точката c, точност на тврдењето 2).

Последните две теореми ни укажуваат на тоа дека екстремните точки, за функцијата $f(x)$, треба да ги бараме меѓу оние $c\in D_f$ за кои $f'(c)=0$ или f не е диференцијабилна во c. Таквите точки ги викаме критични. Ако D_f ја разделиме на интервали со критичните точки тогаш јасно, согласно теоремата за запазување на знакот, дека во секој таков интервал изводот има постојан знак, односно таквите интервали ги викаме интервали на монотоност. Ако функцијата расте во наведениот интервал тогаш тоа го означуваме со запишување на знакот $\nearrow$ над интервалот , а ако опаѓа во наведениот интервал тоа го означуваме со запишување на знакот $\searrow$ над интервалот.

Пример 14. Да се определат екстремните точки и интервалите на монотоност за функцијата:

а) $y=x^4-2x^2$, б) $y=\sqrt{6x^2-x^3}$.

Решение. а) Функцијата како полиномна функција дефинирана е на $(-\infty,+\infty)$. Определуваме прв извод $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2-1)$. Од равенката $y'=0$, следуваат следните критични точки $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$. А тоа значи дека интервалите на монотоност се:

$$(-\infty,-1),\ (-1,0),\ (0,1),\ (1,+\infty).$$

Понатаму од секој интервал избираме по една точка и го определуваме знакот на првиот извод:

$y'(-2)=-24<0$, значи на $(-\infty,-1)$ функцијата опаѓа;

$y'(-\frac{1}{2})=\frac{3}{2}>0$, значи на $(-1,0)$ функцијата расте;

$y'(\frac{1}{2})=-\frac{3}{2}<0$, значи на $(0,1)$ функцијата опаѓа;

$y'(2)=24>0$, значи на $(1,+\infty)$ функцијата расте.

Оваа анализа со интервалските ознаки ја означуваме

$$\overset{\searrow}{(-\infty,-1)},\ \overset{\nearrow}{(-1,0)},\ \overset{\searrow}{(0,1)},\ \overset{\nearrow}{(1,+\infty)}.$$

Сега е јасно дека точката $E_1(-1,-1)$ е локален минимум, точката $E_2(0,0)$ е локален ммаксимум и точката $E_3(1,-1)$ е локален минимум за графикот на функцијата $y=x^4-2x^2$.

б) Функцијата како трети корен од полиномна функција дефинирана е на $(-\infty,+\infty)$. Определуваме прв извод $y'=\dfrac{12x-3x^2}{3\sqrt[3]{\left(6x^2-x^3\right)^2}}=\dfrac{4-x}{\sqrt[3]{x(6-x)^2}}$. Од равенката $y'=0$, следуваат следните критични точки $x_1=0$, $x_2=4$, $x_3=6$. А тоа значи дека интервалите на монотоност се:

$$(-\infty,0),\ (0,4),\ (4,6),\ (6,+\infty).$$

Понатаму од секој интервал избираме по една точка и го определуваме знакот на првиот извод:

$y'(-2)<0$, значи на $(-\infty,0)$ функцијата опаѓа;

$y'(2)>0$, значи на $(0,4)$ функцијата расте;

$y'(5)=<0$, значи на $(4,6)$ функцијата опаѓа;

$y'(7)<0$, значи на $(6,+\infty)$ функцијата опаѓа.

Оваа анализа со интервалските ознаки ја означуваме

$$\overset{\searrow}{(-\infty,0)},\ \overset{\nearrow}{(0,4)},\ \overset{\searrow}{(4,6)},\ \overset{\searrow}{(6,+\infty)}.$$

Сега е јасно дека точката $E_1(0,0)$ е локален минимум, точката $E_2\left(4,2\sqrt[3]{4}\right)$ е локален максимум, а точката $E_3(6,0)$ не е локален екстрем за графикот на функцијата $y=\sqrt{6x^2-x^3}$.

Забелешка. Определувањето на најмалата и најголемата вредност на функцијата на зададен интервал во теоријата се среќава како процес на оптимизација. Да се направи оптимизација значи да се определи најмалото или најголемото, односно да се определат условите при кои некој процес овозможува добивање најповолни резултати од работењето. Во математичка смисла се сведува на определување најмала и најголема вредност на некоја непрекината функција на зададен интервал.

Нека функцијата $f(x)$ е непрекината на сегментот $[a,b]$ и нека точките x_i, за $i=1,2,...,n$; се критичните точки на оваа функција што припаѓаат на интервалот $[a,b]$ и се такви да $a<x_1<x_2<...<x_n<b$. Сега е јасно дека на секој од овие интервали (a,x_1), (x_1,x_2), . . . , (x_{n-1},x_n), (x_n,b) функцијата или расте или опаѓа, па спрема тоа најмалата и најголемата вредност на функцијата треба да се бараат меѓу вредностите: $f(a),f(x_1),f(x_2),...,f(x_n),f(b)$. Значи најмалата вредност на функцијата $f(x)$ се достига во еден од локалните минимуми или во една од точките a и b, а најголемата вредност се достигнува во еден од локалните максимуми или во една од точките a и b.

Пример 15. Определи најмала и најголема вредност на функцијата $y=xe^{x-x^2}$, на сегментот $[-1,2]$.

Решение. Определуваме прв извод и изедначуваме на 0.

$$y'=e^{x-x^2}+x(1-2x)e^{x-x^2}=e^{x-x^2}\left(1+x-2x^2\right),\ y'=0 \text{ следува}$$

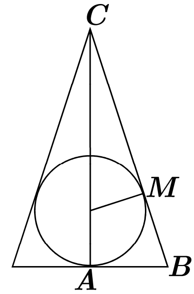
$$2x^2-x-1=0.$$

Решенија на оваа равенка се: $x_1=-\frac{1}{2}$ и $x_2=1$. Сега имаме $y(-1)=-e^{-2}$, $y(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$, $y(1)=e^o=1$, $y(2)=2e^{-2}$. Со споредување на овие величини добиваме дека најмалата вредност на функцијата е $-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$ и ја достига за $x=-\frac{1}{2}$, а најголема вредност е 1 и се достига за $x=1$.

Исто така решавањето на многу проблеми од оптимизацијата се сведува на примена на резултатите од овие теореми и погоре наведениот проблем за определување на најмала и најголема вредност на непрекинатата функција $y=f(x)$ на сегментот $[a,b]$. За илустрација ќе наведеме неколку проблеми со нивните решенија.

Пример 16. Околу топка со радиус R да се опише конус со најмал волумен.

Решение. Оскиниот пресек на конусот опишан околу топката даден е на сл.5 и притоа триаголникот ABC е сличен со триаголникот MDC, затоа што аголот при темето C е заеднички, а аголот при темето A е еднаков со аголот при темето M како прави агли. Од сличноста следува пропорционалноста на страните



сл. 5

$$\overline{AB}:\overline{DM}=\overline{AC}:\overline{MC}.$$

Бидејќи $\overline{AB}=r$, $\overline{DM}=R$, $\overline{AC}=H$ и $\overline{MC}=\sqrt{H^2-2RH}$, добиваме

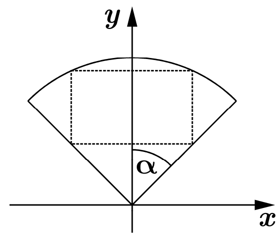
$$r=\frac{RH}{\sqrt{H^2-2RH}},$$

па сега за волуменот добиваме $V(H)=\frac{\pi R^2H^2}{3(H-2R)}$. Понатаму определуваме прв извод на оваа функција по променливата H и го изедначуваме со 0.

$V'(H)=\frac{\pi R^2(H^2-4RH)}{3(H-2R)^2}$, $V'(H)=0$, следува $H=4R$ и $r=R\sqrt{2}$.

Пример 17. Во кружен сегмент со централен агол $2\alpha<\pi$ и радиус R да се впише правоаголник со најголема плоштина.

Решение. Нека кружниот сегмент е делот од централниот круг $x^2+y^2\le R^2$, ограничен со правите $y=\pm x ctg\alpha$, така што оска на симетрија на сегментот е $y-$оската (види сл.6)



сл. 6

Согласно сл.6 за половината од плоштината на правоаголникот добиваме

$$P(x)=x\left(\sqrt{R^2-x^2}-x ctg\alpha\right),$$

каде што x е апсцисата на соодветната ордината од кружната линија. Нашиот оптимизационен проблем има решение ако $x\in(0,x_1)$, каде што $x_1=R\sin\alpha$ е решение на равенката

$$\sqrt{R^2-x^2=}x\operatorname{ctg}\alpha.$$

Барајќи прв извод за функцијата $P(x)$ и изедначувајќи го со 0 добиваме

$$P'(x)=\sqrt{R^2-x^2}-x ctg\alpha+x\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}-ctg\alpha\right)=\frac{R^2-2x^2-2x\sqrt{R^2-x^2}ctg\alpha}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

сега од $P'(x)=0$, следува $R^2-2x^2-2x\sqrt{R^2-x^2}ctg\alpha=0$,од што следува биквадратната равенка

$$4x^4-4R^2x^2+R^4\sin^2\alpha=0.$$

За нејзините решенија имаме

$(x^2)_{1/2}=R^2\frac{1\pm\cos\alpha}{2}$, односно $(x^2)_1=R^2\frac{1-\cos\alpha}{2}=R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$,

$x_1=R\sin\frac{\alpha}{2}<R\sin\alpha$ и $(x^2)_2=R^2\frac{1+\cos\alpha}{2}=R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$,

$x_2=R\cos\frac{\alpha}{2}<2R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=R\sin\alpha$, ако важи

$\sin\frac{\alpha}{2}\ge\frac{1}{2}$, $\alpha\ge\frac{\pi}{3}$. Значи ако $\alpha<\frac{\pi}{3}$, тогаш решение е $x_1=R\sin\frac{\alpha}{2}$, па за плоштината добиваме

$$P(x_1)=\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Ако пак $\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, тогаш и двете решенија го задоволуваат условот. Решението на проблемот е една од вредностите $P(x_1)$ и $P(x_2)$. Пресметувајќи ги и споредувајќи добиваме

$$P(x_2)=R^2\frac{3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1+tg^2\frac{\alpha}{2}\right)},$$

$$P(x_1)-P(x_2)=\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-R^2\frac{3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{R^2\left[\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)-3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1\right]}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{R^2\left[\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right]^2}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}>0$$

Добивме дека во секој случај речение на проблемот е

$$P(x_1)=\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

8.13. Задачи за самостојно решавање

1. Докажи дека равенката

$$x^3-3x^2+6x+10=0,$$

има само, еден реален корен.

2. Равенката

$$x^3+ax^2+bx+c=0,$$

при која врска меѓу параметрите a и b а за било кое c, има само еден корен. А при која врска меѓу параметрите a, b и c има само еден реален корен.

3. Да се определат коефициентите на полиномот

$$y(x)=x^3+ax^2+bx+c,$$

така што тој да има максимум за $x=-1$, минимум за $x=4$ и минува низ точката $M(-2,1)$.

4. Да се определи бројот на реалните решенија на равенката

$$x^5-2x^4+x^3+a=0,$$

во зависност од реалниот параметар a.

5. На параболата

$$y=x^2+3x+3,$$

да се најде точка $M_o(x_o,y_o)$, која е најблиску до правата $y=2x-4$.

6. Се знае дека сумата од едната катета и хипотенузата на еден правоаголен триаголник изнесува 18 cm. Колку треба да биде секоја од нив и другата катета за да плоштината на триаголникот биде најголема.

7. Да се определат димензиите на прав кружен цилиндар што е вписан во прав кружен конус со висина H и радиус R.

8. Низ која точка од елипсата
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$
треба да повлече тангента па таа со координатните оски да формира триаголник со најмала плоштина.

9. Од сите правоаголници со страни паралелни со координатните оски,а впишани во елипсата
$$4x^2 + 9y^2 = 36,$$
да се определат димензиите на оној со најголема плоштина.

10. Во ликот ограничен со параболата $y^2 = 2px$ и правата $x = a$ да се впише правоаголник чија една страна лежи на правата $x = a$ и е со најголема плоштина.

11. Канал A со ширина a под прав агол се влева во канал B со ширина b. Да се определи најдолгата греда што од каналот A ќе помине во каналот B.

12. Населбите A и B се на различни страни од реката приштo населбата A е оддалечена од реката 2 km, а населбата B е оддалечена 3 km. Нивното меѓусебно (паралелно со реката) растојание е 7 km. Од населбата A до реката е песочен појас, а од населбата B до реката е ливада. По ливадата се оди два пати побрзо отколку по песокот. Каде треба да се направи мост за да се стасуванајбрзо од населбата A до населбата B и обратно?

8.14. Тејлорова формула и нејзина примена

Со оглед на фактот дека вредноста на секоја полиномна функција за одредена вредност на независно променливата се пресметува со конечен број примени на основните математички операции, секако дека претставува интерес можноста вредноста на произволна функција да биде приближно пресметана со вредноста на некој полиноми при тоа да се знае степенот на точностна направената пресметка . Во таа смисла се следните теореми.

Теорема 13. Секој полином од $n-$ти степен
$$p(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n, \qquad (15)$$
може на единствен начин да се претстави по степените од $(x-a)$ со
$$p(x) = A_o + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + A_3(x-a)^3 + ... + A_n(x-a)^n. \qquad (16)$$

Доказ. Нека од (16) ги најдеме изводите на $p(x)$ до $n-$ти ред, а тоа се
$$p'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + 3A_3(x-a)^2 + 4A_4(x-a)^3 + ... + nA_n(x-a)^{n-1},$$
$$p''(x) = 2A_2 + 3\cdot 2A_3(x-a) + 4\cdot 3A_4(x-a)^2 + ... + n(n-1)A_n(x-a)^{n-2}, \qquad (17)$$
....
$$p^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)....3\cdot 2\cdot A_n = n!A_n.$$
Ако сега во секоја од равенките замениме $x = a$ добиваме:
$$p(a) = A_o,\ p'(a) = A_1,\ p''(a) = 2A_2,\ p'''(a) = 3\cdot 2A_3, \ldots, p^{(n)}(a) = n!A_n.$$

Евидентно е дека коефициентите на полиномот (16) се наполно определени броеви и се пресметуваат со формулите:

$$A_i = \frac{p^{(i)}(a)}{i!}\text{, за } i = 1,2,\ldots,n\text{,}$$

сега јасно е дека полиномот (16) има облик

$$p(x) = \frac{p(a)}{0!} + \frac{p'(a)}{1!}(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (18)$$

Претставува интерес прашањето за можноста произволна функција $f(x)$ која е $n+1$ пати диференцијабилна функција во околината $V(a,\varepsilon)$ на точката a, да може да се развие во обликот (18). Одговорот е потврден и е даден со следната теорема.

Теорема 14. (Тејлорова формула за произволна функција) Нека функцијата $f(x)$ е $n+1$ пати диференцијабилна функција во околината $V(a,\varepsilon)$ на точката a, тогаш точна е формулата

$$f(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n +$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\text{, } \xi = a + m(x-a)\text{, } 0 < m < 1\text{.} \quad (19)$$

Доказ. Од тоа што $f(x)$ е $n+1$ пати диференцијабилна функција во околината $V(a,\varepsilon)$ на точката a, следува дека постои полиномот

$$p(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

и притоа јасно е дека $f(x) \neq p(x)$. Разликата нека ја означиме со $R_n(x)$ и нека ја запишеме во облик $R_n(x) = \frac{R(x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, каде што $R(x)$ е некоја функција.

Сега функцијата $f(x)$ го добива обликот

$$f(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + .$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{R(x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (20)$$

Со цел за определување на функцијата $R(x)$ ја формираме помошната функција

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots -$$
$$- \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{R(x)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}.$$

Лесно се проверува дека се точни равенствата $F(x) = F(a) = 0$. А бидејќи $f(x)$ е $n+1$ пати диференцијабилна функција следува дека и $F(t)$ е диференцијабилна функција на интервалот (a,x), односно $F(t)$ на сегментот $[a,x]$ ги задоволува условите од теоремата на Рол па спрема тоа постои точка $\xi\in[a,x]$, таква што $F'(\xi)=0$. Сега определувајќи $F'(t)$ добиваме

$$F'(t)=-f'(t)+f'(t)-\frac{f''(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{1!}(x-t)-\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{R(x)}{n!}(x-t)^n.$$

Поништувајќи ги еднаквите членови и заменувајќи $t=\xi$, со изедначување на нула добиваме

$$-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{R(x)}{n!}(x-t)^n=0,$$

односно $R(x)=f^{(n+1)}(\xi)$, каде $a<\xi<x$, или $\xi=a+m(x-a)$, $0<m<1$. Со замена на добиената вредност за функцијата $R(x)$ во (20) се потврдува точноста на теоремата.

Забелешка. Ако е $a=0$, тогаш Тејлоровата формула гласи:

$$f(x)=\frac{f(0)}{0!}+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(mx)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

$0<m<1$. (21)

и е позната како Маклоренова формула.

Пример 18. Да се определи Маклореновата формула за функциите:

а) $y=\ln(1+x)$, б) $y=\sin x$, в) $y=\cos x$, г) $y=e^x$.

Решение. а) Определувајќи ги изводите ќе ги определиме и нивните вредности за $x=0$. Имаме

$$y=\ln(1+x),\ y(0)=\ln(1+0)=0,$$
$$y'=(1+x)^{-1},\ y'(0)=(1+0)^{-1}=1,$$
$$y''=(-1)(1+x)^{-2},\ y''(0)=(-1)(1+0)^{-2}=-1,$$
$$y'''=(-1)(-2)(1+x)^{-3},\ y'''(0)=(-1)(-2)(1+0)^{-3}=(-1)^2 2!,$$

Од досега добиеното се наметнува претпоставката дека $y^{(n)}$ има вредност

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n},\ y^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!,$$

сега за $y^{(n+1)}$ добиваме

$y^{(n+1)}=(-1)^{n-1}(n-1)!(-n)(1+x)^{-n-1}=(-1)^n n!(1+x)^{-(n+1)}$, со што се потврдува индуктивната претпоставка, значи $y^{(n+1)}(0)=(-1)^n n!$.

Сега за Маклореновата формула добиваме

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x).$$

За $R_n(x)$ имаме $R_n(x)=\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+mx)^{n+1}}$. Грешката е најголема за $m=0$, па следователно $R_n(x)<\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

б) За изводите и нивните вредности во $x=0$, добиваме:

$y=\sin x$, $y(0)=0$,

$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $y'(0)=\sin\left(0+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$,

$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$, $y''(0)=\sin\left(0+2\frac{\pi}{2}\right)=\sin\pi=0$,

$y'''=\cos\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right)$, $y'''(0)=\sin\left(0+3\frac{\pi}{2}\right)=\sin 3\frac{\pi}{2}=-1$,

$y^{(4)}=\cos\left(x+3\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+4\frac{\pi}{2}\right)=\sin(x+2\pi)$,

$y^{(4)}(0)=\sin(0+2\pi)=\sin 2\pi=0$,

Очигледно е дека $y^{(n)}$ има вредност $y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$, па во зависност од n добиваме

$$y^{(2n)}(0)=\sin\left(0+2n\frac{\pi}{2}\right)=\sin n\pi=0 \text{ и}$$

$$y^{(2n+1)}(0)=\sin\left(0+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n.$$

Сега за маклореновата формула се добива

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+R_{2n+2}(x).$$

За грешката ја имаме следната оценка

$$R_{2n+2}(x)=\frac{\sin mx}{(2n+2)!}x^{2n+2}<\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

в) За функцијата $y=\cos x$ на сличен начин се добива следната Маклоренова формула

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n+1}(x).$$

За грешката ја имаме следната оценка

$$R_{2n+1}(x)=\frac{\sin mx}{(2n+1)!}x^{2n+1}<\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

г) Со оглед на тоа што за изводите на функцијата $y=e^x$ имаме

$y=e^x$, $y(0)=e^0=1$, $y'=e^x$, $y'(0)=e^0=1$,

$y''=e^x$, $y''(0)=e^0=1$, . . ., $y^{(n)}=e^x$, $y^{(n)}(0)=e^0=1$,

за Маклореновата формула на оваа функција добиваме:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x),$$

За грешката ја имаме следната оценка

$$R_n(x)=\frac{e^{mx}}{(n+1)!}x^{n+1}<\frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}<\frac{3^x}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Посебно за $x=1$, имаме

$$e^1=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}+R_n(1),\ R_n(1)=\frac{e^m}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}.$$

Ако сега сакаме бројот e да го пресметаме со точност од две децимали треба да биде задоволена неравенката

$\frac{3}{(n+1)!}<\frac{1}{100}$, $300<(n+1)!$, $6!=720>300$, значи треба да се соберат првите шест члена од формулата за да се добие бројот e со точност од две децимали.

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}=2{,}71.$$

8.15. Задачи за самостојно решавање

1. Полиномот

$$f(x)=6x^5+7x^3+3x^2+2x-1,$$

да се напише по степените од $(x-1)$.

2. Да се докаже точноста на приближната формула

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2.$$

3. Да се докажат неравенствата:

а) $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$, за $x>0$;

б) $x-\frac{x^3}{3}<arctgx<x$, за $x>0$;

4. Користејќи Маклоренова формула за функцијата

$$y=\ln\frac{1+x}{1-x},$$

да се пресмета $\ln 2$ со точност од 10^{-2}. Колку членови треба да се земат во пресметката за да се добие посакуваната точност.

8.16. Конвексност на функциите

Од физика, во лекциите за леќи, се имаме сретнато со поимите конвекси и конкавни леќи во смисла на испупчени нанадвор и вдлабнати навнатре. И во математичката анализа овие поими исто така се среќаваат и се многу важни. Кај функциите од еден реален аргумент овие поими ќе ги разгледаме во однос на една од оските. Ако функцијата е зададена со $y=f(x)$, тогаш овие поими, конвексност и конкавност , ќе ги разгледаме во однос на $y-$ оската.

Нека во точката $M_o(x_o,y(x_o))$ е повлечена тангента, кон графикот на функцијата $y=f(x)$ и нека со $y_k(x)$ ја означиме ординатата на точката со апсциса x од графикот на функцијата $y=f(x)$, (види сл.7), а со $y_t(x)$ ја означиме ордината на точката од тангентата за истата апсциса x, тогаш можеме да ја формираме разликата

$$d = y_k(x) - y_t(x).$$

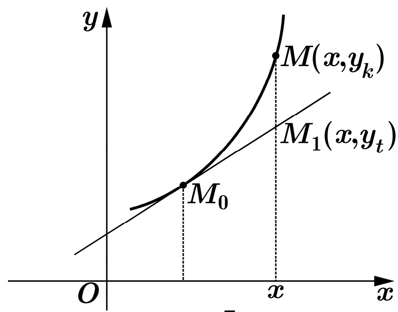
Деф.7. Ако за секој x од околината $V(x_o,\varepsilon)$ на точката x_o важи

$$d = y_k(x) - y_t(x) < 0,$$

тогаш велиме дека функцијата $y = f(x)$ во точката x_o е конвексна (длабната). Ако пак важи

$$d = y_k(x) - y_t(x) > 0,$$

тогаш велиме дека функцијата $y = f(x)$ во точката x_o е конкавна (бабната).



сл. 7

Да забележиме дека ако за секој $x \in (a,b)$ функцијата е конвексна (конкавна), тогаш ќе велиме дека функцијата е конвексна (конкавна) на интервалот. Понатаму предмет на интерес ќе биде определувањето на интервалите во кои функцијата е конвексна (конкавна).

Деф.8. Нека c е заедничка гранична точка за интервалите (a,c) и (c,b). За точката $C(c,f(c))$ велиме дека е превојна точка за графикот на функцијата $y = f(x)$, ако функцијата на еден од интервалите е конвексна а на другиот е конкавна.

Интерес претставува определувањето на превојните точки и интервалите на конвексност конкавност. За таа цел нека, за $n+1$ пати диференцијабилната функција $y = y(x)$, величините $y_k(x)$ и $y_t(x)$ користејќи ја равенката на тангентата и Тејлоровата формула ги запишеме во следните облици

$$y_t(x) = y(c) + y'(c)(x-c),$$

$$y_k(x) = y(c) + y'(c)(x-c) + \frac{y''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{y'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \dots +$$

$$+ \frac{y^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

Сега за разликата $d(x)$ добиваме

$$d(x) = \frac{y''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{y'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \dots +$$

$$\frac{y^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

Сите изводи во десната страна се конечни величини, а секоја од величините $(x-c)^i$, за $i = 2,3,\dots,n+1$, кога x тежи кон c се бесконечно мали од повисок ред во однос на претходната.

Сега ако $y''(c) \neq 0$ бидејќи $(x-c)^2 > 0$, знакот на разликата зависи од знакот на вториот извод.

а) Па ако $y''(c) < 0$, тогаш функцијата е конвексна во точката c.

б) Ако пак $y''(c) > 0$, тогаш функцијата е конкавна во точката c.

За $y''(c) = 0$ и $y'''(c) \neq 0$, тогаш разликата, со оглед на тоа што $(x-c)^3$ е негативен број за $x < c$, а позитивен број за $x > c$, го менува знакот, па точката $C(c, f(c))$ е превојна точка за графикот на функцијата $y = y(x)$.

Ако се случи $y'(c) = y''(c) = \ldots = y^{(n-1)}(c) = 0$ и $y^{(n)}(c) \neq 0$, тогаш знакот на разликата $d(x)$ зависи од $y^{(n)}(c) \cdot (x-c)^n$.

а) Па ако $n = 2k$, тогаш $(x-c)^{2k} > 0$ па знакот на разликата е со постојан знак еднаков на знакот на $y^{(2k)}(c)$.Па функцијата во точката c е конвексна за $y^{(2k)}(c) < 0$, а конкавна за $y^{(2k)}(c) > 0$.

б) Ако пак $n = 2k+1$, тогаш $(x-c)^{2k+1}$ го менува знакот, а тоа значи дека и разликата го менува знакот па точката $C(c, f(c))$ е превојна точка за графикот на функцијата $y = y(x)$.

Да забележиме дека за практична примена за определување на превојните точки доволно е да го определиме $y''(x)$, а потоа да ги определиме оние c за кои $y''(c) = 0$ или $y''(c)$ не постои, а припаѓаат на дефиниционата област на функцијата $y = y(x)$. Потоа D_y со таквите точки c ќе ја поделиме на интервали, за кои одпорано знаеме дека $y''(x)$ е со постојан знак. Доволно е да го определиме знакот на вториот извод во по една точка од секој од тие интервали за да знаеме дали функцијата е конвексна или конкавна.

Ако на интервалот (a,b) функцијата е конвексна тоа ќе го означиме со (a,b), ако пак е конкавна тоа ќе го означиме со (a,b).

Пример 19. Да се определат превојните точки и интервалите на конвексност конкавнст за функциите:

а) $y = x^3 + 3x^2 - 24x + 2$, б) $y = x^{\frac{4}{3}} - x$, в) $y = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - x + 2$.

Решение. а) $D_y = (-\infty, +\infty)$, $y' = 3x^2 + 6x - 24$, $y'' = 6x + 6$. Од $y'' = 0$ следува $6x + 6 = 0$, $x = -1$, па точката $P(-1, 28)$ може да биде превојна точка и интервалите $(-\infty, -1)$; $(-1, +\infty)$ се интервали на конвексност. Сега имаме $y''(-2) = -6 < 0$ па функцијата на $(-\infty, -1)$ е конвексна и $y''(2) = 18 > 0$, функцијата на $(-1, +\infty)$ е конкавна и тоа го означуваме со $(-\infty, -1)$; $(-1, +\infty)$.

б) $D_y=(-\infty,+\infty)$, $y'=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-1$, $y''=\frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}$. Јасно дека $y''(0)=\infty$ не постои, следува точката $P(0,0)$ може да биде превојна точка и интервалите $(-\infty,0)$; $(0,+\infty)$ се интервали на конвексност. Бидејќи $y''(x)>0$ за секој x функцијата е конкавна на $D_y=(-\infty,+\infty)$, а точката $P(0,0)$ не е превојна точка и тоа го означуваме со $(-\infty,-1)$; $(-1,+\infty)$.

в) $D_y=(-\infty,+\infty)$, $y'=x^{\frac{2}{3}}-1$, $y''=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$. Јасно дека $y''(0)=\infty$ не постои, следува точката $P(0,2)$ може да биде превојна точка и интервалите $(-\infty,0)$; $(0,+\infty)$ се интервали на конвексност. Бидејќи $y''(-1)=-\frac{2}{3}<0$ функцијата е конвексна на $(-\infty,0)$, а бидејќи $y''(1)=\frac{2}{3}>0$ функцијата е конкавна на $(0,+\infty)$, а точката $P(0,2)$ е превојна точка за графикот на функцијата $y=f(x)$ и тоа го означуваме со $(-\infty,0)$; $(0,\infty)$.

8.17. Конструкција на графици на функции

Сите досега разработени особини помагаат за испитување на текот на функциите и за цртање на нивните графици. За побрзо и полесно извршување на оваа работа потребно е и многу корисно ако ја следиме следната шема за испитување на функциите и цртање на нивните графици.

1) За функцијата $y=f(x)$ определуваме D_f и вредностите или граничните вредности на функцијата за граничните точки на D_f.

2) Ги определуваме пресечните точки на функцијата со координатните оски, односно ги решаваме равенките $f(x)=0$ и $y=f(0)$.

3) Ги определуваме равенките на асимптотите, ако ги има, и пресечните точки на асимптотите со графикот на функцијата, ако ги има.

4) Определуваме прв и втор извод на функцијата и ги определуваме апсцисите на точките можни екстреми, како решенија на равенката $f'(x)=0$ или првиот извод не постои а припаѓаат на D_f. Потоа ги определуваме интервалите на монотоност и екстремните точки и нивната природа, ако ги има.

5) Ги определуваме апсцисите, а потоа и ординатите, на точките можни превои, како решенија на равенката $f''(x)=0$ или за кои вториот извод не постои, а припаѓаат на D_f. Потоа ги определуваме интервалите на конвексност

конкавност и превојните точки, доколку ги има. Корисно е да се определи и правецот на тангентата во секоја од превојните точки.

Пример 20. Да се испита текот и да се нацрта графикот на секоја од функциите:

а) $y=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$, б) $y=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$,

в) $y=\dfrac{e\cdot\ln x}{x}$, г) $y=\dfrac{x^3}{x^2+3x+3}$.

Решение. а) $D_y=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\pm 0$, $\lim\limits_{x\to 2\pm o} y=-\infty$, од што е јасно дека правата $x=2$ е вертикална асимптота, а правата $y=0$ е хоризонтала асимптота. Точките $A(3,0)$ и $B(0,-3)$ се пресеците со координатните оски. За определување на екстремите и превоите имаме

$$y'=4\frac{4-x}{(x-2)^3}\,,\ y''=8\frac{x-5}{(x-2)^4}\,,$$

од $y'=0$ следува $x=4$, па можен екстрем е $E(4,1)$. Интервали на монотоност се

$$(-\infty,2)\,,\ (2,4)\,,\ (4,+\infty)\,.$$

Сега за секој од нив добиваме $y'(1)<0$, $y'(3)>0$, $y'(5)<0$. Ова нешто го означуваме на следниот начин:

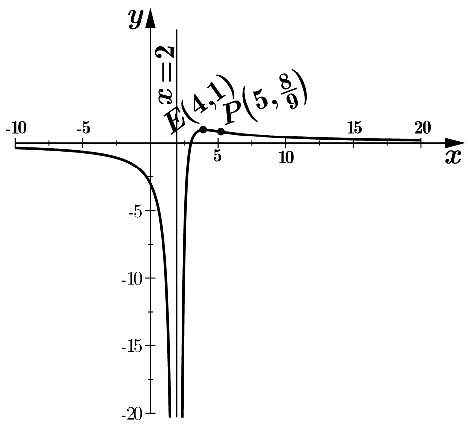
$$(\overset{\searrow}{-\infty,2})\,,\ (\overset{\nearrow}{2,4})\,,\ (\overset{\searrow}{4,+\infty})\,.$$

Точката $E(4,1)$ е локален максимум за функцијата.

Од $y''=0$ следува $x=5$, па точката $P\left(5,\frac{8}{9}\right)$ е можна превојна точка за графикот на функцијата. Интервали на конвексност конкавност се

$$(-\infty,2)\,,\ (2,5)\,,\ (5,+\infty)\,.$$

Бидејќи $y''(0)<0$ и $y''(3)<0$ на $(-\infty,2)$ и $(2,5)$ функцијата е конвексна. Бидејќи пак $y''(6)>0$ на $(5,+\infty)$ функцијата е конкавна. Точката $P\left(5,\frac{8}{9}\right)$ е превојна точка за графикот на функцијата. Конвексноста конкавноста ја означуваме:



сл. 8

$$(-\infty,2)\,,\ (2,5)\,,\ (5,+\infty)\,.$$

На сл. 8 нацртан е графикот на оваа функција.

б) $D_y=(-\infty,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\mp\infty$, , од што е јасно дека функцијата нема хоризонтала асимптота, а може да има коса асимптота. Точките $O(0,0)$ и $B(6,0)$ се пресеците со координатните оски. За определување на косата асимптота имаме:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{6x^2-x^3}}{x}=-1,$$

$$l=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{6x^2-x^3}+x\right)=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-x^3+x^3}{\sqrt[3]{(6x^2-x^3)^2}-x\sqrt[3]{6x^2-x^3}+x^2}=\frac{6}{3}=2\,.$$

Значи коса асимптота кон графикот на функцијата е правата $y=-x+2$. За пресечната точка на кривата со косата асимптота имаме

$$2-x=\sqrt[3]{6x^2-x^3}\,, 8-12x+6x^2-x^3=6x^2-x^3\,,\ 12x=8\,,$$

па пресечната точка е $A\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.

За определување на екстремите и превоите ги наѓаме првиот и вториот извод

$$y'=\frac{4-x}{\sqrt[3]{x(6-x)^2}}\,,\ y''=\frac{-8}{\sqrt[3]{x^4(6-x)^5}}\,.$$

Критичните точки за екстреми имаат апсциси $x=0$, $x=4$ и $x=6$. Можни екстреми се $E_1(0,0)$, $E_2(4,2\sqrt[3]{4})$ и $E_3(6,0)$. Интервали на монотоност се

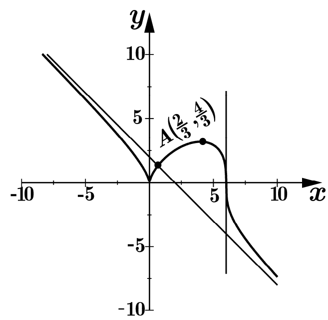
$$(-\infty,0)\,,\ (0,4)\,,\ (4,6) \text{ и } (6,+\infty)\,.$$

Сега за секој од нив добиваме $y'(-1)<0$, $y'(3)>0$, $y'(5)<0$ и $y'(7)<0$. Значи на $(-\infty,0)$ функцијата монотоно опаѓа, на $(0,4)$ монотоно расте и на $(4,6)$ и $(6,+\infty)$ функцијата монотоно опаѓа Ова нешто го означуваме на следниот начин: $(\overset{\searrow}{-\infty,0})$, $(\overset{\nearrow}{0,4})$, $(\overset{\searrow}{4,6})$ и $(\overset{\searrow}{6,+\infty})$.

Точката $E_1(0,0)$ е локален минимум, точката $E_2(4,2\sqrt[3]{4})$ е локален максимум а точката $E_3(6,0)$ не е екстрем. Точката $E_3(6,0)$ е точка на можен превој за функцијата бидејќи вториот извод е неопределен. Интервали на конвексност се

$$(-\infty,6)\,,\ (6,+\infty)$$

Бидејќи $y''(1)<0$, на $(-\infty,6)$ функцијата е конвексна. Бидејќи пак $y''(7)>0$ на $(6,+\infty)$ функцијата е конкавна. Точката $E_3(6,0)$ е превојна точка за графикот на функцијата. Конвексноста конкавноста ја означуваме: $(-\infty,6)$, $(6,+\infty)$.



сл. 9

На сл. 9 нацртан е графикот на оваа функција.

в) $D_y=(0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$, $\lim\limits_{x\to 0+o} y=-\infty$, од што е јасно дека правата $x=0$ е десна вертикална асимптота, а правата $y=0$ е хоризонтална асимптота. Точката $A(1,0)$ е пресек на кривата со $x-$ оската. За определување на екстремите и превоите имаме

$$y'=\frac{1-\ln x}{x^2},\; y''=\frac{2\ln x-3}{x^3},$$

од $y'=0$ следува $\ln x=1$, $x=e$ па можен екстрем е $E(e,1)$. Интервали на монотоност се

$$(0,e),\;(e,+\infty).$$

Сега за секој од нив добиваме $y'(1)>0$, па функцијата монотоно расте на $(0,e)$, а бидејќи $y'(3)<0$, функцијата монотоно опаѓа на $(e,+\infty)$. Ова нешто го означуваме на следниот начин:

$$\overset{\nearrow}{(0,e)},\;\overset{\searrow}{(e,+\infty)}.$$

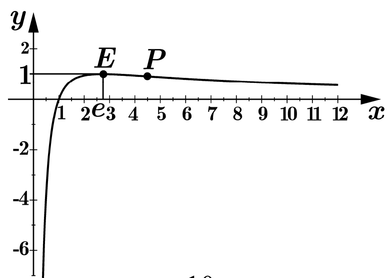
Точката $E(e,1)$ е локален максимум за функцијата.

Од $y''=0$ следува $2\ln x=3$, $x=e^{\frac{3}{2}}$ па точката $P\left(e^{\frac{3}{2}},\frac{3}{2\sqrt{e}}\right)$ е можна превојна точка за графикот на функцијата. Интервали на конвексност конкавност се

$$(0,e^{\frac{3}{2}}),\;(e^{\frac{3}{2}},+\infty).$$

Бидејќи $y''(1)<0$ функцијата е конвексна на $(0,e^{\frac{3}{2}})$, а бидејќи $y''(e^2)>0$ на $(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$, функцијата е конкавна. Точката $P\left(e^{\frac{3}{2}},\frac{3}{2\sqrt{e}}\right)$ е превојна точка за графикот на функцијата. Конвексноста конкавноста ја означуваме:

$$(0,e^{\frac{3}{2}}),\;(e^{\frac{3}{2}},+\infty).$$



сл. 10

На сл. 10 нацртан е графикот на оваа функција.

г) $D_y=(-\infty,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\pm\infty$, , од што е јасно дека функцијата нема хоризонтала асимптота, а може да има коса асимптота. Точката $O(0,0)$ е пресек со координатните оски. За определување на косата асимптота имаме:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2+3x+3)}=1,$$

$$\begin{aligned} l&=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+3x+3}-x\right)=\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3-3x^2-3x}{x^2+3x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2-3x}{x^2+3x+3}=-3\end{aligned}.$$

Значи коса асимптота кон графикот на функцијата е правата $y = x - 3$. За пресечната точка на кривата со косата асимптота имаме

$$x - 3 = \frac{x^3}{x^2 + 3x + 3}, 3x - 9 - 9x + 3x^2 - 3x^2 + x^3 = x^3, \; 6x = 9, \; x = \frac{3}{2}$$

па пресечната точка е $A\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$.

За определување на екстремите и превоите ги наѓаме првиот и вториот извод

$$y' = \left[\frac{x(x+3)}{x^2 + 3x + 3}\right]^2, \; y'' = 2\frac{x(x+3)(2x+3)}{(x^2 + 3x + 3)^3}.$$

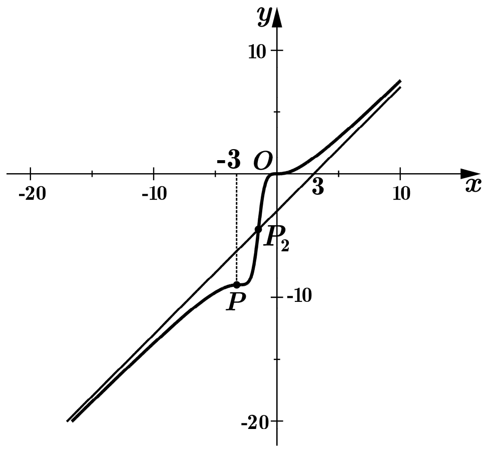
Бидејќи $y'(x) \geq 0$ за секој $x \in D_f$, следува функцијата е монотоно растечка и нема екстреми.

Од $y''(x) = 0$, следува $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{3}{2}$ и $x_3 = 0$, па интервали на конвексност конкавност се

$$(-\infty, -3), \left(-3, -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, 0\right) \text{ и } (0, +\infty).$$

Бидејќи $y''(-4) < 0$ на интервалот $(-\infty, -3)$ функцијата е конвексна. Бидејќи пак $y''(-2) > 0$ на интервалот $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$ функцијата е конкавна. Сега од $y''(-1) < 0$ на интервалот $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ функцијата е конвексна, а од $y''(1) > 0$ на интервалот $(0, +\infty)$ функцијата е конкавна. Ова нешто го означуваме: $(-\infty, -3), \left(-3, -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ и $(0, +\infty)$.

Точките $P_1(-3, -9)$, $P_2\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ и $P_3(0,0)$ се превојни точки за графикот на функцијата. Графикот на функцијата нацртан е на сл.11.



сл. 11

8.18. Задачи за самостојно решавање

1. Да се определат равенките на тангентата и нормалата повлечени во превојната точка од кривата $y = 2e\frac{\ln x}{x}$.

2. Низ превојната точка на кривата $y = x^2 \ln x$, да се повлече права паралелна со правата $2x + 3y - 1 = 0$.

3. За кои вредности на реалните параметри a и b функцијата $y=\frac{x^2+ax+b}{x^2+1}$, за превојна точка ја има точката $A(0,1)$.

4. Да се покаже дека кривата зададена со равенката $y(x^2+4)=4(2-x)$, има три превојни точки кои лежат на иста права. Да се определи равенката на заедничката права на превојните точки.

5. Кој услов треба да го задоволуваат реалните параметри a, b и c за функцијата $y=ax^4+bx^3+cx^2$, да има само една превојна точка, а кој за да има две превојни точки?

6. Да се испита текот и да се нацрта графикот на функцијата:

а) $y=x^3+3x^2-9x+5$, б) $y=\frac{x-1}{x^2}$,

в) $y=\frac{x^3}{(x-1)^2}$, г) $y=\frac{x-1}{x^2+1}$,

д) $y=x\ln x$, ѓ) $y=(x+1)^2e^{-x}$,

е) $y=x-\ln(x+1)$, ж) $y=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$,

з) $y=(x-2)e^{-\frac{1}{x}}$, ѕ) $y=\sqrt[3]{x-x^3}$,

и) $y=\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2+1}$, ј) $y=\sin x+\sin^2 x$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Атанасова, С. Георгиева: *Предавања по Математика I,* Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје, 1985.
2. C. Baba-Hamed, K. Benhabib, *Analyse I rappels de cours et exercices avec solutions,* Universite d'Oran, Oran 1985.
3. D. Blanuša, *Viša matematika I i II*, Zagreb 1965.
4. И. М. Гельфанд, *Лекции по линейной алгебре*, Москва, 1971.
5. E. Goursat, *Cours d'analyse mathematique*, Paris 1942.
6. Б. П. Демидович, И. А. Марон, *Основы вычислительной математики,* Москва 1970.
7. Н. Ивановски, *Математичка анализа I - функции од една независно променлива*, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје, 1981
8. S. Kurepa, *Matematička analiza I, II, III*, Tehnička knjiga, zagreb 1981
9. Л. Д. Кудрявцев, *Математический анализ, том I,II,* Вышая школа, Москва, 1973
10. П. Лазов, Ѓ. Ивановски, *Елементи на математичката анализа со некои примени*, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје, 1981.
11. И. Ляшко, А. К. Боярчук и др., *Справочное пособие по математическому анализу, часть первая*, Москва, „Виша школа“, 1978.
12. Р. Малчески, *Математичка анализа I,* Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје, 2002.
13. В. П. Минорскй, *Сборник задач по высшей математике,* Физматгиз, Москва, 1961.
14. Д. С. Митриновиќ, *Зборник математичких проблема*, Београд, 1958.
15. Б. М. Пиперевски, *Математичка анализа I*, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје, 2001.
16. Ј. Улчар, *Аналитичка геометрија со векторска алгебра,* Нумерус, Скопје, 1995.
17. Г. М. Фихтенгольц, *Основы математического анализа, том I,* наука, Москва, 1968.
18. Ѓ. Чупона, Б. Трпеновски, Н. Целакоски, *Виша математика, книга 1,2,3,4*, Просветно дело, Скопје, 1994.
19. И. Шапкарев, П. Кржовски, *Линеарна алгебра со аналитичка геометрија во простор*, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје, 1972.
20. И. Шапкарев, *Задачи за вежбање по математика I за студентите на техничките факултети*, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје, 1972.

СОДРЖИНА