Љубомир Давидов
Софија

ГЕНЕРАТОРНИ ФУНКЦИИ

Поимот генераторна функција е тесно поврзан со поимот степенски ред, кој овде нема да го воведуваме. Притоа, само ќе наведеме некои својства на степенските редови, при што прашањето за конвергенција на истите нема посебно да го истакнуваме, туку ќе сметаме дека сите разгледувања се во областа на конвергенција на разгледуваниот степенски ред.

1. БЕЛЕШКА ЗА СТЕПЕНСКИТЕ РЕДОВИ

1.1. Нека $|x|<1$. Ако искористиме дека $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, добиваме дека низата $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$, определена со $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, $n = 0,1,2,\dots$ конвергира и притоа важи $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-x}$, што значи

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-x}. \qquad (1)$$

1.2. Дефиниција, Нека $a_n \in \mathbf{R}$, $n = 0,1,2,\dots$. Изразот од облик

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \in \mathbf{R} \qquad (2)$$

го нарекуваме ***степенски ред***. Броевите $a_n \in \mathbf{R}$, $n = 0,1,2,\dots$ ги нарекуваме ***коефициенти на степенскиот ред***. Ќе велиме дека степенскиот ред (2) ***конвергира во точката*** x_0 ако низата $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$, определена со $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x_0^k$, $n = 0,1,2,\dots$ конвергира.

1.3. Теорема. Нека $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $B(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ се степенски редови. Точни се следните тврдења:

Т.1. $A(x) = B(x)$ ако и само ако $a_n = b_n$, за $n = 0,1,2,\dots$.

Т.2. $A(x) + B(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$.

Т.3. $(1 \pm x)A(x) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm a_{n-1}) x^n$

T.4. $A(x)\cdot B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{n}a_j b_{n-j})x^n$. **T.5.** $\frac{A(x)-a_0}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^n$.

T.6. $xA(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n$. **T.7.** $A'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n x^{n-1}$.

1.4. Да забележиме дека од (1) и Т.4 непосредно добиваме:

$$A(x)\cdot\tfrac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k\cdot\sum_{k=0}^{\infty}1\cdot x^k=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{n}a_j\cdot 1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{n}a_j)x^n . \qquad (3)$$

1.5. Во следните разгледувања ќе ја користиме, без да ја докажуваме следната теорема.

Теорема. За секој $\alpha\in\mathbf{R}$ постојат позитивен реален број r_α и низа реални броеви $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ такви, што за секој $x\in(-r_\alpha,r_\alpha)$ степенскиот ред $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ конвергира и притоа важи

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \text{, за секој } x\in(-r_\alpha,r_\alpha). \qquad (4)$$

1.6. Лема. За членовите на низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ во теорема 1.5 важи $a_0=1$ и $a_n=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}$, за секој $n\geq 1$.

Доказ. Навистина, ако во (4) ставиме $x=0$ добиваме

$$1=(1+0)^\alpha=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot 0^n=a_0 .$$

Понатаму, од тврдењето Т.3 следува дека

$$(1+x)^{\alpha+1}=(1+x)(1+x)^\alpha=(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n-1})x^n .$$

Ако на последното равенство го примениме тврдењето Т.7 добиваме

$$[(1+x)^{\alpha+1}]'=(a_0+a_1)+2(a_1+a_2)x+3(a_2+a_3)x^2+\ldots+n(a_{n-1}+a_n)x^{n-1}+\ldots.$$

Од друга страна

$$[(1+x)^{\alpha+1}]'=(1+\alpha)(1+x)^\alpha=(1+\alpha)a_0+(1+\alpha)a_1x+(1+\alpha)a_2x^2+\ldots+(1+\alpha)a_{n-1}x^{n-1}+\ldots.$$

Од последните две равенства и од Т.1 непосредно следува дека

$$a_0+a_1=(1+\alpha)a_0 \text{ и } n(a_{n-1}+a_n)=(1+\alpha)a_{n-1}\text{, за } n\geq 1$$

од каде непосредно следува дека $a_1=\alpha$ и $a_n=\frac{\alpha-n+1}{n}a_{n-1}$, за $n\geq 1$, што значи за секој $n\geq 1$ важи

$$a_n=\frac{\alpha-n+1}{n}a_{n-1}=\frac{\alpha-n+1}{n}\cdot\frac{\alpha-n+2}{n-1}a_{n-2}=\ldots=\frac{\alpha-n+1}{n}\cdot\frac{\alpha-n+2}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{\alpha-1}{2}a_1=\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!},$$

што и требаше да се докаже. ♦

1.7. Забелешка. Коефициентите на степенскиот ред (4), според обликот на записот потсетуваат на биномните коефициенти, па затоа во натамошните разгледувања за истите ќе ги користиме ознаките $a_n = \binom{\alpha}{n}$, $n \geq 0$.

1.8. Два примери. Јасно, за различни вредности на α се добиваат записите на различни функции од облик $(1+x)^{\alpha}$ во вид на степенски редови, но за нас од посебен интерес се случаите кога $\alpha = -(k+1)$, $k \geq 0$ е цел број и $\alpha = \frac{1}{2}$. Да ги разгледаме овие два случаи.

i) Нека $\alpha = -(k+1)$, $k \geq 0$ е цел број. Имаме

$$\binom{\alpha}{n} = \binom{-k-1}{n} = \frac{(-k-1)(-k-2)...(-k-n)}{n!} = (-1)^n \frac{(k+1)(k+2)...(k+n)}{n!} = (-1)^n \frac{(k+n)!}{n!k!} = (-1)^n \binom{k+n}{n} .$$

Според тоа, за секој ненегативен цел број k точно е равенството

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = (1-x)^{-k-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \binom{n+k}{n}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}x^n \quad . \tag{5}$$

ii) Нека $\alpha = \frac{1}{2}$. Ако $n \geq 1$, тогаш

$$\binom{\alpha}{n} = \binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)...(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot ...\cdot(2n-3)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot(2n-3)(2n-2)}{n!}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n-1}}\cdot\binom{2n-2}{n-1}.$$

Според тоа,

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n-1}}\cdot\binom{2n-2}{n-1}x^n \quad . \tag{6}$$

1.9. На крајот од овој дел ќе го воведеме поимот за генераторна функција, кој ќе го користиме во натамошните разгледувања.

Дефиниција. Нека $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е низа реални броеви. Степенскиот ред

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

го нарекуваме ***генераторна функција*** за за низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

1.10. Забелешка. Основната идеја за примена на генераторните функции при решавање на различни проблеми се состои во следното.

Нека $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е низа реални броеви за која имаме некои информации, на пример истата да е зададена со рекурзивна релација. Прво, ја наоѓаме генераторната функција за оваа низа и со соодветни трансформации истата ја запишуваме во затворен облик, што значи го сумираме редот. Јасно, од ваквиот запис можеме да изведеме дополнителни својства за низата, на пример експлицитно да ги изразиме членовите на низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

2. ФИБОНАЧИЕВИ БРОЕВИ

2.1. Во овој дел ќе ја разгледаме низата на Фибоначи, која како што знаеме е определена со следната рекурзивна формула:

$$f_0=0,\ f_1=1,\quad f_{n+2}=f_{n+1}+f_n \text{, за } n\geq 0 .$$

Нека $F(x)$ е генераторната функција на низата на Фибоначи, т.е.

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n .$$

Од $f_0=0$ и $f_1=1$ последователно следуваат следните равенства

$$\frac{F(x)}{x}=\frac{F(x)-f_0}{x}=f_1+f_2x+f_3x^2+\ldots+f_{n+1}x^n+\ldots \text{ и}$$

$$\frac{F(x)-x}{x^2}=\frac{F(x)-f_0-f_1x}{x^2}=f_2+f_3x+f_4x^2+\ldots+f_{n+2}x^n+\ldots.$$

Ако во последното равенство замениме $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$, за $n\geq 0$ добиваме

$$\begin{aligned}\frac{F(x)-x}{x^2}&=f_0+f_1+(f_1+f_2)x+(f_2+f_3)x^2+\ldots+(f_n+f_{n+1})x^n+\ldots\\&=[f_0+f_1x+f_2x^2+\ldots+f_nx^n+\ldots]+[f_1+f_2x+f_3x^2+\ldots+f_{n+1}x^n+\ldots]\\&=F(x)+\frac{F(x)}{x}\end{aligned}$$

од каде наоѓаме $F(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$.

Нека a и b се корените на равенката $1-x-x^2=0$, т.е. $a=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $1-x-x^2=-(a-x)(b-x)$. Понатаму, ќе ги определиме константите A и B такви, што $\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{A}{a-x}+\frac{B}{b-x}$. Ако последното равенство го помножиме со $1-x-x^2$ последователно добиваме

$$-x=A(b-x)+B(a-x)$$

$$-x=-(A+B)x+Ab+Ba$$

од каде го добиваме системот

$$\begin{cases}A+B=1\\Ab+Ba=1\end{cases}$$

чие решение е $A=-\frac{a}{b-a}$ и $B=\frac{b}{b-a}$. Од досега изнесеното, со непосредна примена на равенството (1) и Т.2 добиваме

$$F(x)=\frac{A}{a-x}+\frac{B}{b-x}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b}{b-x}-\frac{a}{a-x}\right)=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{b}}-\frac{1}{1-\frac{x}{a}}\right)=\frac{1}{b-a}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{b}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{b^n}-\frac{1}{a^n}\right)\cdot\frac{1}{b-a}x^n.$$

Конечно, од тврдењето Т.1 следува дека

$$f_n = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{b^n} - \frac{1}{a^n}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a^n - b^n}{(ab)^n} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \qquad (7)$$

2.2. Забелешка. Равенството (7) ги дава во експлицитна форма Фибоначиевите броеви, кое го добивме и со помош на диференцните равенки. На крајот од овој дел ви препорачуваме самостојно да ги докажете следните релации за Фибоначиевите броеви:

а) $f_k^2 = f_{k-1} f_{k+1} - (-1)^2$, за $k \geq 1$ и б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3. ДВЕ ЗАДАЧИ

Во следните два примери ќе покажеме како идејата изнесена при добивањето на експлицитен израз за Фибоначиевите броеви може да се искористи за решавање на слични проблеми.

3.1. Пример. Низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е зададена со рекуретната релација

$$a_0 = 2, a_1 = 7, \quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + 3^n, n \geq 0.$$

Најдете експлицитен израз за a_n.

Решение. Нека $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е генераторната функција за низта $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Од $a_0 = 2$ и $a_1 = 7$ последователно следуваат следните равенства

$$\frac{A(x)-2}{x} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_{n+1} x^n + \ldots \text{ и}$$
$$\frac{A(x)-2-7x}{x^2} = a_2 + a_3 x + a_4 x^2 + \ldots + a_{n+2} x^n + \ldots.$$

Ако во последното равенство замениме $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + 3^n$, за $n \geq 0$ и земеме во предвид дека $1 + 3x + 3^2 x^2 + \ldots + 3^n x^n + \ldots = \frac{1}{1-3x}$ добиваме

$$\frac{A(x)-2-7x}{x^2} = 4 \cdot \frac{A(x)-2}{x} - 4A(x) + \frac{1}{1-3x},$$

од каде наоѓаме

$$A(x) = \frac{4x^2 - 7x + 2}{(1-3x)(1-2x)^2} = \frac{(1-3x)+(1-2x)^2}{(1-3x)(1-2x)^2} = \frac{1}{1-3x} + \frac{1}{(1-2x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{n}(2x)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)2^n + 3^n]x^n,$$

од каде согласно тврдењето Т.1 следува дека $a_n = (n+1)2^n + 3^n$, за $n \geq 0$. ♦

3.2. Пример (УСАМО '89). За секој природен број n, нека

$$S_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{n},$$
$$T_n = S_1 + S_2 + \ldots + S_n,$$
$$U_n = \tfrac{T_1}{2} + \tfrac{T_2}{3} + \ldots + \tfrac{T_n}{n+1}.$$

За секој n најдете константи a_n, b_n, c_n, d_n такви, што

$$T_n = a_n S_{n+1} + b_n \text{ и } U_n = c_n S_{n+1} + d_n.$$

Решение. Нека

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n, \quad T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n x^n \text{ и } U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n x^n$$

се генераторните функции за разгледуваните низи. Од условот на задачата имаме $T_n - T_{n-1} = S_n$ и $S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n}$ па затоа

$$(1-x)T(x) = T_1 x + (T_2 - T_1)x^2 + \ldots + (T_n - T_{n-1})x^n + \ldots = S_1 x + S_2 x^2 + \ldots + S_n x^n + \ldots = S(x)$$

и

$$(1-x)^2 T(x) = (1-x)S(x) = S_1 x + (S_2 - S_1)x^2 + \ldots + (S_n - S_{n-1})x^n + \ldots = x + \tfrac{x^2}{2} + \ldots + \tfrac{x^n}{n} + \ldots$$

Според тоа,

$$[(1-x)^2 T(x)]' = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \tfrac{1}{1-x}$$

т.е.

$$-2(1-x)T(x) + (1-x)^2 T'(x) = \tfrac{1}{1-x}$$

од што следува

$$-2T(x) + (1-x)T'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n . \qquad (8)$$

Од друга страна имаме

$$(1-x)T'(x) = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} nT_n x^{n-1} = T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)T_{n+1} - nT_n]x^n$$

$$= T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)S_{n+1} x^n = T(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)S_{n+1} x^n$$

од што според (8) добиваме

$$-T(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)S_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

т.е.

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)S_{n+1} - (n+1)]x^n$$

од што според Т.1 следува $T_n = (n+1)S_{n+1} - (n+1)$, што значи

$$a_n = n+1 \text{ и } b_n = -(n+1).$$

Слично, за $U(x)$ имаме

$$(1-x)U(x)=U_1x+(U_2-U_1)x^2+\ldots+(U_n-U_{n-1})x^n+\ldots=\tfrac{T_1}{2}x+\tfrac{T_2}{3}x^2+\ldots+\tfrac{T_n}{n+1}x^n+\ldots$$

$$=(S_2-1)x+(S_3-1)x^2+\ldots+(S_{n+1}-1)x^n+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}S_ix^{i-1}-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\tfrac{S(x)}{x}-\tfrac{1}{1-x}$$

од што следува

$$U(x)=\tfrac{1}{1-x}\cdot\tfrac{S(x)}{x}-\tfrac{1}{(1-x)^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{n+1}S_j)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}[T_{n+1}-(n+1)]x^n$$

што според Т.1 значи дека $U_n=T_{n+1}-(n+1)$. Според тоа,

$$U_n=(n+2)S_{n+2}-(n+2)-(n+1)=(n+2)(S_{n+1}+\tfrac{1}{n+2})-1-2(n+1)=(n+2)S_{n+1}-2(n+1)$$

од што добиваме $c_n=n+2$ и $d_n=-2(n+1)$. ♦

3.3. Во овој дел видовме како може да се реализира основната идеја за примена на генераторните функции. Со цел истата целосно да ја совладате ви предлагаме самостојно да ги решите следните задачи.

Задача 1. Низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е определена со равенствата

$$a_0=3,\quad a_1=9,\quad a_2=29,\quad a_{n+3}=9a_{n+2}-26a_{n+1}+24a_n.$$

Најдете експлицитен израз за a_n.

Задача 2. Низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е определена со равенствата

$$a_0=1,\quad a_1=0,\quad a_{n+2}-2a_{n+1}-3a_n=1.$$

Најдете експлицитен израз за a_n.

Задача 3. За природниот број n со A_n да го означиме множеството $\{1,2,\ldots,n\}$. Нека $f(n)$ е бројот од подмножествата од A_n кои не содржат два ниту едни два последователни елементи. Најдете формула за $f(n)$.

4. ЗБИРОВИ ОД СТЕПЕНИ НА ПРИРОДНИ БРОЕВИ

4.1. Нека $k\geq 1$ е природен број и да означиме

$$S(n,k)=1^k+2^k+\ldots+n^k.$$

Знаеме дека за $k=1$ и произволен n важи $S(n,1)=\frac{n(n+1)}{2}$. Во овој дел ќе најдеме експлицитен израз за $S(n,k)$ за произволни n и k.

Нека $f_k(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^kx^n$ е генераторната функција за низата $1^k,\ldots,n^k,\ldots$. Од Т.4 непосредно следува дека

$$\tfrac{1}{1-x}\cdot f_k(x)=(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)(\sum_{n=1}^{\infty}n^kx^n)=\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{n}j^k)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}S(n,k)x^n,$$

што според дефиниција 1.9 значи дека $F_k(x) = \frac{1}{1-x} \cdot f_k(x)$ е генераторната функција за низата $\{S(n,k)\}_{n=1}^{\infty}$.

Прво ќе најдеме експлицитен израз за $f_k(x)$. За таа цел ќе ја докажеме следната теорема.

4.2. Теорема. За секој природен број k, функцијата $f_k(x)$ е дадена со

$$f_k(x) = \frac{xp_k(x)}{(1-x)^{k+1}}, \tag{9}$$

каде $p_k(x)$ е полином со целобројни коефициенти, $\deg p_k = k-1$ и неговиот водечки коефициент е 1.

Доказ. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по k. Ако $k=1$, тогаш

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = x\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{n}x^n = \frac{x}{(1-x)^2},$$

што значи дека тврдењето важи и во овој случај $p_1(x)=1$.

Нека претпоставиме дека теоремата важи за некој природен број k. Јасно,

$$f_k'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{k+1}x^{n-1},$$

и затоа имаме

$$f_{k+1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{k+1}x^n = xf_k'(x).$$

Според тоа,

$$f_{k+1}(x) = x\left(\frac{xp_k(x)}{(1-x)^{k+1}}\right)' = x \cdot \frac{(1-x)(p_k(x)+xp_k'(x))+(k+1)xp_k(x)}{(1-x)^{k+2}}$$
$$= x \cdot \frac{(1+kx)p_k(x)+x(1-x)p_k'(x)}{(1-x)^{k+2}} = \frac{xp_{k+1}(x)}{(1-x)^{k+2}},$$

каде

$$p_{k+1}(x) = (1+kx)p_k(x) + x(1-x)p_k'(x).$$

Од претпоставката имаме дека $p_k(x) = x^{k-1} + \ldots$, па ако замениме во претходното равенство добиваме

$$p_{k+1}(x) = (1+kx)(x^{k-1}+\ldots) + x(1-x)[(k-1)x^{k-2}+\ldots] = [k-(k-1)]x^k + \ldots = x^k + \ldots$$

што значи дека $p_k(x)$ е полином со целобројни коефициенти, $\deg p_k = k-1$ и неговиот водечки коефициент е 1.

Конечно, тврдењето на теоремата следува од принципот на математичка индукција. ♦

4.3. Ако се земе предвид дека за секој природен број k функцијата $F_k(x)=\frac{1}{1-x}\cdot f_k(x)$ е генераторната за низата $\{S(n,k)\}_{n=1}^{\infty}$, тогаш од теорема 4.2 непосредно следува точноста на следната теорема.

Теорема. За секој природен број k генераторната функција на низата $\{S(n,k)\}_{n=1}^{\infty}$ е

$$F_k(x)=\frac{xp_k(x)}{(1-x)^{k+2}}=xp_k(x)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k+1}{k}x^n\ , \tag{10}$$

каде $p_k(x)$ е полином со целобројни коефициенти, $\deg p_k=k-1$ и неговиот водечки коефициент е 1. ♦

4.4. Забелешка. Од доказот на теорема 4.2 непосредно следува дека низата полиноми $\{p_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ е определена со равенствата

$$p_1(x)=1,\quad p_{k+1}(x)=(1+kx)p_k(x)+x(1-x)p_k^{'}(x)\,. \tag{11}$$

Ако ги искористиме равенствата (11), тогаш последователно добиваме

$$\begin{aligned}
&p_1(x)=1\\
&p_2(x)=(1+x)\cdot 1+x(1-x)\cdot 1'=1+x\\
&p_3(x)=(1+2x)(1+x)+x(1-x)(1+x)'=x^2+4x+1\\
&p_4(x)=(1+3x)(x^2+4x+1)+x(1-x)(x^2+4x+1)'=x^3+11x^2+11x+1
\end{aligned} \tag{12}$$

4.5. Пресметување на членовите на низата $\{S(n,k)\}_{n=1}^{\infty}$. Нека

$$p_k(x)=x^{k-1}+a_1^{(k)}x^{k-2}+\ldots+a_{k-2}^{(k)}x+a_{k-1}^{(k)}\,. \tag{13}$$

Од (4) и (10) следува

$$F_k(x)=\sum_{n=1}^{\infty}S(n,k)x^n=\frac{xp_k(x)}{(1-x)^{k-2}}=\frac{x^k}{(1-x)^{k-2}}+\frac{x^{k-1}a_1^{(k)}}{(1-x)^{k-2}}+\frac{x^{k-2}a_2^{(k)}}{(1-x)^{k-2}}+\ldots+\frac{xa_{k-1}^{(k)}}{(1-x)^{k-2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{k+1}x^n+a_1^{(k)}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{k+1}x^n+\ldots+a_{k-1}^{(k)}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k+1}x^n\,.$$

Според тоа,

$$S(n,k)=1^k+2^k+\ldots+n^k=\binom{n+1}{k+1}+a_1^{(k)}\binom{n+2}{k+1}+\ldots+a_{k-1}^{(k)}\binom{n+k}{k+1}\,. \tag{14}$$

Сега, ако се земе предвид (11) можеме да ги пресметаме вредностите на $S(n,k)$. Така, на пример, користејќи ги формулите (12) добиваме

$$S(n,1)=1+2+\ldots+n=\binom{n+1}{2}=\frac{n(n+1)}{2}\ ,$$

$$S(n,2)=1^2+2^2+\ldots+n^2=\binom{n+1}{3}+\binom{n+2}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ \text{ и}$$

$$S(n,3)=1^3+2^3+\ldots+n^3=\binom{n+1}{4}+4\binom{n+2}{4}+\binom{n+3}{4}=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

5. БЕРНУЛИЕВИ ПОЛИНОМИ И БЕРНУЛИЕВИ БРОЕВИ

5.1. Нека $m \geq 0$ е цел број и $\binom{x}{m}$ е полиномот

$$\binom{x}{m} = \frac{x(x-1)\dots(x-m+1)}{m!}.$$

Јасно, полиномот $\binom{x}{m}$ е од $m-$ти степен и неговиот водечки коефициент е еднаков на $\frac{1}{m!}$ и неговите корени се $0,1,2,\dots,m-1$. Ако $k \geq 1$ и (13) е експлицитниот израз на полиномот p_k да означиме

$$B_k(x) = \binom{x}{k+1} + a_1^{(k)}\binom{x+1}{k+1} + \dots + a_{k-1}^{(k)}\binom{x+k-1}{k+1} \tag{15}$$

и за $k=0$ да ставиме $B_0(x) = x-1$. Полиномите $B_k(x), k=0,1,2,\dots$ ги нарекуваме **Бернулиеви полиноми.** Очигледно

$$B_1(x) = \binom{x}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x,$$

$$B_2(x) = \binom{x}{3} + \binom{x+1}{3} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x,$$

$$B_3(x) = \binom{x}{4} + 4\binom{x+1}{4} + \binom{x+4}{4} = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2.$$

Понатаму, ако се има предвид равенството (14) добиваме дека

$$S(n,k) = 1^k + 2^k + \dots + n^k = B_k(n+1) \tag{16}$$

за секој $n \geq 1$ и за секој $k \geq 0$.

5.2. Теорема. За секој цел број $k \geq 0$ степенот на полиномот $B_k(x)$ е $k+1$ и неговиот водечки коефициент е еднаков на $\frac{1}{k+1}$.

Доказ. Од $B_0(x) = x-1$ следува дека тврдењето е точно за $k=0$. Понатаму, степенот на секој од полиномите $\binom{x}{k+1}, \binom{x+1}{k+1}, \dots, \binom{x+k-1}{k+1}$ е $k+1$, па од (15) следува дека и степенот на полиномот $B_k(x)$ е $k+1$ и коефициентот пред мономот x^{k+1} е еднаков на

$$\frac{1}{(k+1)!}[1 + a_1^{(k)} + \dots + a_{k-1}^{(k)}] = \frac{p_k(1)}{(k+1)!}.$$

Меѓутоа, од (11) следува

$$p_k(1) = [1+(k-1)]p_{k-1}(1) = kp_{k-1}(1) = k(k-1)p_{k-2}(1) = \dots = k!\,p_1(1) = k!$$

и ако замениме во последното равенство добиваме дека водечкиот коефициент на полиномот $B_k(x)$ е еднаков на $\frac{1}{(k+1)!}[1 + a_1^{(k)} + \dots + a_{k-1}^{(k)}] = \frac{p_k(1)}{(k+1)!} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1}$. ♦

5.3. Теорема. $B_k(0) = 0$, ако $k \geq 1$ и $B_k(1) = 0$, ако $k \geq 0$.

Доказ. Непосредно следува од дефиницијата на Бернулиевите полиноми. ♦

5.4. Теорема. $B_k(x+1) - B_k(x) = x^k$, за секој $k \geq 0$.

Доказ. Од равенството (16) следува дека $B_k(n+1)-B_k(n)=n^k$, за секој природен број n. Според тоа, полиномите $B_k(x+1)-B_k(x)$ и x^k примаат еднакви вредности во произволен број точки, па затоа тие се идентични. ♦

5.5. Теорема. $[B_k(x+1)-B_k(x)]'=k[B_{k-1}(x+1)-B_{k-1}(x)]$, за секој $k\geq 1$.

Доказ. Од теорема 5.4 непосредно следува

$$[B_k(x+1)-B_k(x)]'=(x^k)'=kx^{k-1}=k[B_{k-1}(x+1)-B_{k-1}(x)]\,. ♦$$

Пред да преминеме на следното својство на Бернулиевите полиноми ќе ја докажеме следната лема.

5.6. Лема. Ако за полиномот $p(x)$ важи

$$p(x)=p(x+1)\,,$$

тогаш $p(x)=\mathrm{const}$.

Доказ. Нека $p(0)=a$. Да претпоставиме дека $p(n)=a$. Имаме

$$p(n+1)=p(n)=a\,,$$

па од принципот на математичка индукција следува дека $p(m)=a$, за секој природен број m.

Според тоа, полиномот $p(x)$ е констнтен за бесконечно многу вредности на променливата, па затоа $p(x)=\mathrm{const}$. ♦

5.7. Теорема. За секој $k=1,2,3,\ldots$ постои реален број b_k таков, што

$$B_k'(x)=kB_{k-1}(x)+b_k\,.$$

Доказ. Од теорема 5.5 имаме

$$B_k'(x+1)-kB_{k-1}(x+1)=B_k'(x)-kB_{k-1}(x)$$

и ако ставиме $p_k(x)=B_k'(x)-kB_{k-1}(x)$, добиваме дека полиномот $p_k(x)$ ги задоволува условите од лема 5.6. Според тоа, за секој $k=1,2,3,\ldots$ постои реален број b_k таков, што $p_k(x)=b_k$, т.е. $B_k'(x)=kB_{k-1}(x)+b_k$. ♦

5.8. Ако искористиме дека $B_k(1)=0$, ако $k\geq 0$, од теорема 5.7 добиваме дека

$$b_k=B_k'(1) \tag{17}$$

за секој $k=1,2,3,\ldots$.

Да ставиме $b_0=1$. Броевите b_k, $k=0,1,2,3,\ldots$ ги нарекуваме **Бернулиеви броеви**. За првите неколку Бернулиеви броеви имаме

$$b_0=1, b_1=\tfrac{1}{2}, b_2=\tfrac{1}{6}, b_3=0,\ldots.$$