

ФИБОНАЧИЕВИ БРОЕВИ И ПОЛИНОМИ СО ЦЕЛОБРОЈНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Во оваа статија ќе покажеме, како на еден едноставен начин, можеме да докажеме некои познати формули за Фибоначиевите броеви. Како што знаеме:

- Членовите на низата ненегативни цели броеви 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... ги нарекуваме Фибоначиеви броеви, а n – от член на низата го означуваме со f_n .

- Низата Фибонечиеви броеви најчесто ја дефинираме со рекурентната (диференцната) равенка

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ за } n \geq 2. \quad (1)$$

- Карактеристичната равенка за диференцната равенка (1) е

$$x^2 = x + 1, \quad (2)$$

и нејзините решенија се $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, па затоа општиот член на низата Фибоначиеви броеви се задава со формулата

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], n \geq 0. \quad (3)$$

Во натамошните разгледувања за решенијата на диференцната равенка (2) ќе ги користиме ознаките

$$x_1 = \alpha, x_2 = 1 - \alpha. \quad (4)$$

Пред да преминеме на докажување на споменатите формули за Фибоначиевите броеви ќе го докажеме следново тврдење.

Тврдење 1. За секој природен број $n \geq 2$ точна е формулата

$$x^n = (x^2 - x - 1)(f_1 x^{n-2} + f_2 x^{n-3} + f_3 x^{n-4} + \dots + f_{n-2} x + f_{n-1}) + f_n x + f_{n-1}. \quad (5)$$

Доказ. Со непосредна проверка се убедуваме дека формулата (5) е точна за $n = 2$. Понатаму, ако ја искористиме рекурентната равенка (1), за $n \geq 3$ добиваме:

$$\begin{aligned} (x^2 - x - 1)(f_1 x^{n-2} + f_2 x^{n-3} + f_3 x^{n-4} + \dots + f_{n-2} x + f_{n-1}) + f_n x + f_{n-1} = \\ = f_1 x^n + f_2 x^{n-1} + f_3 x^{n-2} + f_4 x^{n-3} + \dots + f_{n-2} x^3 + f_{n-1} x^2 + f_n x + f_{n-1} \\ - f_1 x^{n-1} - f_2 x^{n-2} - f_3 x^{n-3} - \dots - f_{n-3} x^3 - f_{n-2} x^2 - f_{n-1} x \\ - f_1 x^{n-2} - f_2 x^{n-3} - \dots - f_{n-4} x^3 - f_{n-3} x^2 - f_{n-2} x - f_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 \cdot x^n + 1 \cdot x^{n-1} - 1 \cdot x^{n-1} + (f_3 - f_2 - f_1)x^{n-2} + (f_4 - f_3 - f_2)x^{n-3} + \dots \\
&\quad + (f_{n-2} - f_{n-3} - f_{n-4})x^3 + (f_{n-1} - f_{n-2} - f_{n-3})x^2 + (f_n - f_{n-1} - f_{n-2})x \\
&= x^n + 0 \cdot x^{n-1} + 0 \cdot x^{n-2} + 0 \cdot x^{n-3} + \dots + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x = x^n,
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

Задача 1. Ако во равенството (5) ставиме $x=1$ и прво искористиме дека $f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$, а потоа $f_n + f_{n+1} = f_{n+2}$ и последователно добиваме:

$$\begin{aligned}
1^n &= (1^2 - 1 - 1)(f_1 \cdot 1^{n-2} + f_2 \cdot 1^{n-3} + f_3 \cdot 1^{n-4} + \dots + f_{n-2} \cdot 1 + f_{n-1}) + f_n \cdot 1 + f_{n-1} \\
f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_{n-2} + f_{n-1} &= f_n + f_{n-1} - 1 \\
f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_{n-2} + f_{n-1} + f_n &= f_n + f_{n-1} - 1 + f_n \\
f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_{n-2} + f_{n-1} + f_n &= f_{n+1} - 1 + f_n \\
f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_{n-2} + f_{n-1} + f_n &= f_{n+2} - 1,
\end{aligned}$$

и тоа е познатата формула за збирот на првите n Фибоначиеви броеви. ♦

Задача 2. Прво да забележиме дека

$$\alpha(1-\alpha) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1^2 - \sqrt{5}^2}{2^2} = \frac{1-5}{4} = -1. \quad (6)$$

Ако во (5) замениме $x=\alpha$ и земеме предвид дека α е корен на полиномот $x^2 - x - 1$ добиваме

$$\alpha^n = f_n \alpha + f_{n-1}. \quad (7)$$

Слично, ако во (5) замениме $x=1-\alpha$ и земеме предвид дека $1-\alpha$ е корен на полиномот $x^2 - x - 1$ добиваме

$$(1-\alpha)^n = f_n(1-\alpha) + f_{n-1}. \quad (8)$$

Ги множаме равенствата (7) и (8) и ако го искористиме равенството (6) и фактот дека $f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$ последователно добиваме

$$\begin{aligned}
\alpha^n(1-\alpha)^n &= (f_n \alpha + f_{n-1})(f_n(1-\alpha) + f_{n-1}) \\
[\alpha(1-\alpha)]^n &= f_n^2 \alpha(1-\alpha) + f_{n-1} f_n \alpha + f_{n-1} f_n - f_{n-1} f_n \alpha + f_{n-1}^2 \\
(-1)^n &= -f_n^2 + f_{n-1}(f_n + f_{n-1}) \\
f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2 &= (-1)^n,
\end{aligned}$$

и тоа е познатиот Cassini-ев идентитет, т.е. уште една позната формула за Фибоначиевите броеви. ♦

Задача 3. Нека се $m, n \geq 2$. Од (7) имаме

$$\alpha^n = f_n \alpha + f_{n-1}, \quad \alpha^m = f_m \alpha + f_{m-1} \quad \text{и} \quad \alpha^{n+m} = f_{n+m} \alpha + f_{n+m-1},$$

па затоа

$$f_{n+m} \alpha + f_{n+m-1} = \alpha^{n+m} = \alpha^n \alpha^m = (f_n \alpha + f_{n-1})(f_m \alpha + f_{m-1})$$

и како $\alpha^2 = \alpha + 1$ последователно ги добиваме следниве еквивалентни равенства

$$f_{n+m}\alpha + f_{n+m-1} = f_n f_m \alpha^2 + f_{n-1} f_m \alpha + f_n f_{m-1} \alpha + f_{n-1} f_{m-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$f_{n+m}\alpha + f_{n+m-1} = f_n f_m \alpha + f_n f_m + f_{n-1} f_m \alpha + f_n f_{m-1} \alpha + f_{n-1} f_{m-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$f_{n+m}\alpha + f_{n+m-1} = (f_n f_m + f_{n-1} f_m + f_n f_{m-1})\alpha + f_n f_m + f_{n-1} f_{m-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$f_{n+m}\alpha + f_{n+m-1} = (f_n f_{m+1} + f_{n-1} f_m)\alpha + f_n f_m + f_{n-1} f_{m-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$(f_{n+m} - f_n f_{m+1} - f_{n-1} f_m)\alpha = f_{n+m-1} - f_n f_m - f_{n-1} f_{m-1},$$

и како во последното равенство левата страна е ирационален, а десната страна е цел број добиваме

$$f_{n+m-1} = f_n f_m + f_{n-1} f_{m-1}. \quad \blacklozenge \quad (9)$$

Задача 4. Ако во равенството (9) ставиме $m = n + 1$ и ако искористиме дека $f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$, т.е. $f_n = f_{n+1} - f_{n-1}$ последователно добиваме

$$f_{n+n+1-1} = f_n f_{n+1} + f_{n-1} f_{n+1-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$f_{2n} = f_{n+1}(f_{n+1} - f_{n-1}) + f_{n-1} f_n \quad \Leftrightarrow$$

$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n+1} f_{n-1} + f_{n-1} f_n \quad \Leftrightarrow$$

$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - (f_n + f_{n-1}) f_{n-1} + f_{n-1} f_n \quad \Leftrightarrow$$

$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_n f_{n-1} - f_{n-1}^2 + f_{n-1} f_n \quad \Leftrightarrow$$

$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2,$$

и ова е уште едно позната формула за Фибоначиевите броеви. $\blacklozenge$

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Ставете во равенството (5) $x = -1$ и $n = 2k$ и докажете дека

$$f_1 - f_2 + f_3 - \dots - f_{2k-2} + f_{2k-1} = f_{2k-2} + 1$$

2. Во равенството (9) земете $m = n + 2$, а потоа $n = 2n + 1$ и ќе добиете уште две интересни формули за Фибоначиевите броеви.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Abbas Roohol Amini:** *Fibonacci Numbers a Long Division Formula*, Mathematical Spectrum, Vol. 40, Number 2, 2007/08
2. **Jens Carstensen, Alija Muminagić:** *Fibonacci division*, Matematik Magasinet 40, juni, 2008