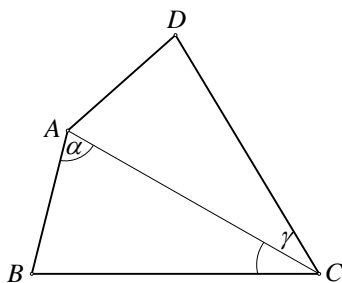


XVIII олимпијада

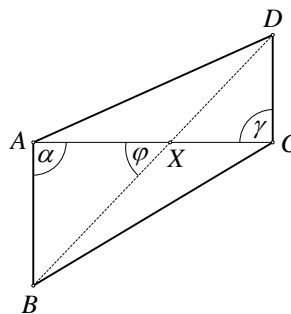
1. Даден е конвексен четириаголник со плоштина 32 cm^2 и збир на должините на две негови спротивни страни и една дијагонала, еднаков на 16 cm . Определи ги сите вредности кои може да ги има должината на другата дијагонала.

Решение. Нека во четириаголникот $ABCD$

$$\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{CD} = 16. \quad (1)$$



Црп. 18.1.



Црп. 18.2.

Неговата плоштина е еднаква на

$$2P = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \sin \alpha + \overline{AC} \cdot \overline{CD} \sin \gamma,$$

каде што $\alpha = \angle CAB$ и $\gamma = \angle ACD$. Понатаму, точна е оценката

$$2P \leq \overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{AC} \cdot \overline{CD} = \overline{AC}(\overline{AB} + \overline{CD}),$$

па од (1) имаме

$$2P \leq \overline{AC}(16 - \overline{AC}),$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\alpha = \gamma = 90^\circ$. Изразот $x(16 - x)$ прима најголема вредност 64 (за $x = 8$), па затоа

$$2P \leq 64. \quad (2)$$

Според условот од задачата во (2) важи знак за равенство, па затоа $\overline{AC} = 8$ и $\alpha = \gamma = 90^\circ$. Понатаму, $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{CD}$, а тоа е можно ако аголот $\angle AXB = \varphi$ меѓу AC и BD е еднаков на 45° . Тогаш $\overline{BD} = 8\sqrt{8}$.

2. Нека

$$P_1(x) = x^2 - 2, \quad P_k(x) = P_1(P_{k-1}(x)), \quad \text{за } k = 2, 3, \dots$$

Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ сите корени на равенката $P_n(x) = x$ се реални и меѓусебно различни.

Решение. Лесно се забележува дека $P_n(x)$ е полином со степен 2^n . Ќе докажеме дека секое реално решение на $P_n(x) = x$ е од интервалот $(-2, 2]$, за да потоа докажеме дека сите корени на разгледуваната равенка се реални и различни.

Нека $x > 2$, т.е. $x = 2 + t$, за некое $t > 0$. Тогаш, последователно добиваме

$$\begin{aligned} P_1(x) &= 2 + 4t + t^2 > 2 + 4t \\ P_2(x) &= [P_1(x)]^2 - 2 > (2 + 4t)^2 - 2 > 2 + 4^2 t \\ &\vdots \\ P_n(x) &= [P_{n-1}(x)]^2 - 2 > (2 + 4^{n-1}t)^2 - 2 = 2 + 4^n t > x, \end{aligned}$$

За $x < -2$, т.е. $x = -2 - t$ па $P_1(x) = 2 + 4t + t^2 > 2 + 4t > 2$. Како и погоре се докажува дека $P_n(x) > 2$. Затоа $x < -2$ не може да биде решение на равенката $P_n(x) = x$. За $x = -2$, $P_n(x) > 0$, па $x = -2$ не може да биде решение на равенката.

Сега можеме да претпоставиме дека $x = 2 \cos \alpha$, $\alpha \in [0, \pi)$. Имаме

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x^2 - 2 = 4 \cos^2 \alpha - 2 = 2 \cos 2\alpha \\ P_2(x) &= P_1(P_1(x)) = 4 \cos^2 2\alpha - 2 = 2 \cos 2^2 \alpha \\ &\vdots \\ P_n(x) &= P_1(P_{n-1}(x)) = 2 \cos 2^n \alpha \end{aligned}$$

што значи дека почетната равенка го добива обликот $\cos 2^n \alpha = \cos \alpha$.

Графикот на функцијата $f(\alpha) = \cos 2^n \alpha$ го сече графикот на функцијата $f(\alpha) = \cos \alpha$ на интервалот $[0, \pi)$ во 2^n различни точки α_i , $i = 1, 2, \dots, 2^n$. На секоја од тие точки соодветствува по едно реално решение $x_i = 2 \cos \alpha_i$. Такви решенија има 2^n и сите тие се реални и различни.

- Кутија во облик на квадар може потполно да се исполни со коцки со должина на раб 1. Ако во неа се ставаат коцки чиј волумен е еднаков на 2, така што нивните рабови се паралелни со рабовите на кутијата, тогаш максималниот можев број на такви коцки потполнува точно 40% од волуменот на кутијата. Најди ги димензиите на сите кутии со тоа својство.

Решение. Ако димензиите на кутијата се m, n и p ($m \geq n \geq p$) тогаш коцките со волумен 2 зафаќаат волумен $2 \left[\frac{m}{\sqrt[3]{2}} \right] \left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right] \left[\frac{p}{\sqrt[3]{2}} \right]$ па условот на задачата се сведува на

$$q = \frac{mnp}{\left[\frac{m}{\sqrt[3]{2}} \right] \left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right] \left[\frac{p}{\sqrt[3]{2}} \right]} = 5. \quad (1)$$

Во натамошните разгледувања ќе ја користиме таблицата

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lfloor \frac{m}{\sqrt[3]{2}} \rfloor$	1	2	3	3	4	5	6	7	7

и неравенството

$$\sqrt[3]{2} < \frac{m}{\lfloor \frac{m}{\sqrt[3]{2}} \rfloor} < \sqrt[3]{2} \frac{m}{m - \sqrt[3]{2}}. \quad (2)$$

Таблицата се добива со пресметување, а неравенството (2) следува од неравенството $x - 1 < [x] \leq x$ и фактот дека $\frac{m}{\sqrt[3]{2}}$ не е цел број ако m е цел број.

Можеме да претпоставиме дека $m \geq n \geq p$. Ќе покажеме дека $p = 2$. Ако $x > 10$ тогаш

$$\frac{x}{\lfloor \frac{x}{\sqrt[3]{2}} \rfloor} < \sqrt[3]{2} \frac{10}{10 - \sqrt[3]{2}} < 1,26 \cdot \frac{10}{8,5} < \frac{3}{2}$$

па од неравенството и од таблицата се добива $q \leq (\frac{5}{3})^2 = \frac{125}{27} < 5$, што противречи на (1). Значи $p = 2$ (инаку би било $q < 5$).

Ако $n = 2$, тогаш би имале $\frac{m}{\lfloor \frac{m}{\sqrt[3]{2}} \rfloor} = \frac{5}{4} < \sqrt[3]{2}$ што противречи на (2). Значи,

$n \geq 3$.

Ако ниту еден од броевите m и n не е еднаков на 5, тогаш имаме $q \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 = \frac{9}{2} < 5$ (бидејќи за $x > 2$ и $x \neq 5$ исполнето е $\frac{x}{\lfloor \frac{x}{\sqrt[3]{2}} \rfloor} \leq \frac{3}{2}$). Имаме

уште два случаи:

1° $p = 2$, $n = 5$, $\frac{m}{\lfloor \frac{m}{\sqrt[3]{2}} \rfloor} = \frac{3}{2}$ и $m \geq 5$, па според тоа $m = 6$;

2° $p = 2$, $m = 5$, $\frac{n}{\lfloor \frac{n}{\sqrt[3]{2}} \rfloor} = \frac{3}{2}$ и $2 \leq n \leq 5$, па според тоа $n = 3$.

Значи, димензиите на кутијата можат да бидат 2, 5, 6 или 2, 3, 5.

4. Најди го најголемиот производ на природни броеви чиј збир е еднаков на 1976.

Решение. Со N да го означиме најголемиот таков број. Нека

$$N = a_1 a_2 \dots a_n \text{ и } a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1976.$$

Ќе докажеме дека $a_i \leq 4$. Ако за некој i е исполнето $a_i \geq 5$, тогаш наместо a_i можеме да земеме 2 или $a_i - 2$, па во тој случај добиваме поголем производ (бидејќи $2(a_i - 2) > a_i$), а збирот на множителите ќе остане непроменет. Исто така наместо четири земеме две двојки.

Затоа $N = 2^k 3^l$ при што $2k + 3l = 1976$. Од $2^3 < 3^2$ и $2 + 2 + 2 = 3 + 3$, следува дека $k \in \{0, 1, 2\}$. Конечно, од $1976 = 3 \cdot 658 + 2$, добиваме $k = 1$ и $N = 2 \cdot 3^{658}$.

5. Даден е систем од p равенки со $q = 2p$ непознати

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1q}x_q &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2q}x_q &= 0 \\ \dots & \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pq}x_q &= 0 \end{aligned}$$

во кој $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ ($i = 1, 2, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, q$). Докажи дека постои решение (x_1, x_2, \dots, x_q) на овој систем, такво што:

- а) секој x_j ($j = 1, 2, \dots, q$) е цел број,
- б) барем за еден j ($1 \leq j \leq q$) важи $x_j \neq 0$, и
- в) за секој $j = 1, 2, \dots, q$ важи $|x_j| \leq p$.

Решение. За секоја q -торка (y_1, y_2, \dots, y_q) цели броеви можеме да определиме p -торка цели броеви $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ со формулите

$$\beta_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{iq}y_q, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (1)$$

При тоа, ако $|y_i| \leq p$, тогаш

$$|\beta_i| \leq |a_{i1}| \cdot |y_1| + |a_{i2}| \cdot |y_2| + \dots + |a_{iq}| \cdot |y_q| \leq |y_1| + |y_2| + \dots + |y_q| \leq qp.$$

Вкупниот број на q -торки (y_1, y_2, \dots, y_q) од цели броеви такви што $|y_j| \leq p$ (за $j = 1, 2, \dots, q$) е еднаков на

$$(2p + 1)^q = (4p^2 + 4p + 1)^p.$$

Бројот на сите p -торки $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ такви што $|\beta_i| \leq qp$ (за $i = 1, 2, \dots, p$) е еднаков на $(2pq + 1)^p = (4p^2 + 1)^p$.

Бидејќи

$$(2p + 1)^q > (2pq + 1)^p,$$

постојат две различни q -торки (y_1, y_2, \dots, y_q) и (z_1, z_2, \dots, z_q) кои со формулата (1) определуваат иста p -торка. Лесно се проверува дека (x_1, x_2, \dots, x_q) , $x_j = y_j - z_j$ е решение на дадениот систем кое ги задоволува условите (а), (б) и (в).

6. Низата u_0, u_1, \dots е дефинирана со

$$u_0 = 2, u_1 = \frac{5}{2}, u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Докажи дека за секој $n = 1, 2, \dots$ важи

$$[u_n] = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}.$$

Решение. Ќе докажеме дека $u_n = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}} + 2^{-\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$, за секој $n = 0, 1, \dots$

Равенството ќе го докажеме со математичка индукција по n . За $n = 0$ и $n = 1$ тврдењето е точно. Ако тврдењето е точно за $n = k - 1$ и $n = k$, тогаш

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \left(2^{\frac{2^k - (-1)^k}{3}} + 2^{-\frac{2^k - (-1)^k}{3}} \right) \left(2^{\frac{2^{k-1} - (-1)^{k-1}}{3}} + 2^{-\frac{2^{k-1} - (-1)^{k-1}}{3}} \right) - \frac{5}{2} \\ &= 2^{\frac{2^k - (-1)^k + 2^k - 2(-1)^{k-1}}{3}} + 2^{\frac{2^k - (-1)^k - 2^k + 2(-1)^{k-1}}{3}} + \\ &\quad + 2^{\frac{-2^k + (-1)^k + 2^k - 2(-1)^{k-1}}{3}} + 2^{\frac{-2^k + (-1)^k - 2^k + 2(-1)^{k-1}}{3}} - \frac{5}{2} \\ &= 2^{\frac{2^{k+1} - (-1)^{k+1}}{3}} + 2^{(-1)^{k+1}} + 2^{-(-1)^{k+1}} + 2^{\frac{-2^{k+1} + (-1)^{k+1}}{3}} - \frac{5}{2} \\ &= 2^{\frac{2^{k+1} - (-1)^{k+1}}{3}} + 2^{-\frac{2^{k+1} - (-1)^{k+1}}{3}}, \end{aligned}$$

бидејќи $2^{(-1)^{k+1}} + 2^{-(-1)^{k+1}} = \frac{5}{2}$, т.е. тврдењето е точно и за $n = k + 1$.

За $n > 0$ вториот собирок во $u_n = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}} + 2^{-\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$ е помал од еден и

$$2^n - (-1)^n \equiv 0 \pmod{3}, \text{ па затоа } [u_n] = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$$