Алија Муминагиќ
Фредериксберг, Данска

ЗА ЕДНА ПОЗНАТА ЗАДАЧА - „МАГИЧНИОТ“ БРОЈ 1089

Васил и Елена завршиле шесто одделение основно образование и тие ја играле следнава игра. Елена му вели на Васил:

1. Замисли (и запиши го) произволен троцифрен број во кој последната цифра е помала од првата цифра на бројот.
2. Запиши го бројот чии цифри се како кај замислениот број, но во обратен редослед.
3. Така добиениот број одземи го од замислениот и добиената разлика означи ја со d .
4. Запиши го бројот кој има исти цифри како и бројот d , но во обратен редослед.
5. Собери ги последните два добиени броја.

- Дали направи се према упатството кое ти го дадов?
- Да, одговорил Васил.
- Го доби бројот 1089 рекла Елена.
- Интересно, рекол Васил. Да проверам:

1) Го замислив бројот 631 (тоа е добро бидејќи $1<6$, т.е. последната цифра е помала од првата)
2) Од бројот 631 го добив бројот 136.
3) Понатаму, добива $d=631-136=495$.
4) Од бројот $d=495$ го добив бројот 594.
5) Добиениот збир е $495+594=1089$.

Васил ја прашал Елена, дали секогаш според горната постапка се добива бројот 1089, на што Елена одговорила ДА.

Тогаш, Васил и рекол на Елена: гледај сега,

1. Го замислив бројот 291 ($1<2$)
2. Го добив бројот 192
3. Нивната разлика е $291-192=99$
4. Од бројот d запишан со истите цифри но во обратен редослед се добива пак 99,
5. Збирот на овие два броја е $99+99=198$.

Што е ова Елена?

Елена има објаснување: Ако е d двоцифрен број, тогаш на тој број од лева страна ќе му ја допишеме цифра 0. Така да во овој случај имаме

3. 099

4. 990

5. Нивнот збир е $990+99=1089$.

По две години Елена и Васил се веќе ученици во осмо одделение. Тие се сетиле на играта која ја играле пред две години. Елена забележала дека нивното знаење по математика е сега поголемо отколку што било порано, па затоа решиле да пробаат строго математички да објаснат и да откријат зошто секогаш го добиваме бројот 1089. Така,тие го испишале следниов:

Доказ. Одиме по ред:

1. Нека бројот е $100x+10y+z$ (притоа $z<x$, т.е. $x>z$)

2. Го добиваме бројот $100z+10y+x$

3. Според тоа

$d=100x+10y+z-(100z+10y+x)$ и поради $z<x$ (објасни!)

$d=100x+10(y-1)+z+10-(100z+10y+x)$

$$d=100(x-1)+100+10(y-1)+z+10-(100z+10y+x)$$
$$=100(x-1-z)+90+(z+10-x)$$

4. Го запишуваме бројот чии цифри се цифритена бројот d, но во обратен редоследи добиваме:

$$100(z+10-x)+90+(x-1-z).$$

5. Со собирање на двата последни броја добиваме

$$100(x-1-z)+90+(z+10-x)+100(z+10-x)+90+(x-1-z)=$$
$$=100(x-1-z+z+10-x)+180+9=100\cdot 9+189=1089.$$

Веројато ќе се запрашате што се случува ако замислениот број е четирицифрен? Природно е да се проба со истата процедура како и кога замислениот број е трицифрен. Да пробаме:

1) Нека Елена го замислила бројот 4972 ($2<4$).

2) Васил го запишува бројот запишан со истите цифри но во обратен редослед и го добива бројот 2794.

3) Тој број го одзема од замислениот број и добива

$$4972-2794=2178=d.$$

4) Од бројот d го запишува бројот со истите цифри, но во обратен редослед и го добива бројот 8712.

5) Конечно го добива бројот $2178+8712=10890$.

Дали овој резултат е очекуван? Дали секогаш добиваме резултат 10890?

На пример: нека е замислен бројот 8691. Редоследно имаме:

2) 1968, 3) $8691-1968=6723$,

4) 3276 5) $3276+6723=9999$

Нека сега замислениот број е 6883. Редолседно добиваме:

2) 3886, 3) $6883-3886=2997$,

4) 7992 5) $7992+2997=10989$.

Не е лесно, но да пробаме сега да ги објасниме добиените резултати 10890, 9999 и 10989.

Мала помош: кога како резултат го добивме бројот 10890 замислениот број беше 4972, а кај него зебележуваме дека бројот на стотките (9) е поголем од бројот на десетките (7). Замислениот пак број 8691 е таков што бројот на стотките (6) е помал од бројот на десетките (9). Во третиот случај, т.е. кога е замислен бројот 3886, бројот на стотките (8) е еднаков на бројот на десетките (8). Понатаму, треба да го искористиме равенството $\overline{abcd}=a\cdot10^3+b\cdot10^2+c\cdot10+d$. Сега, користејќи го доказот за троцифрените броеви, пробај со дадените податоци да докажеш дека секогаш се добива еден од трите броја: 10890, 9999 или 10989.

Освен тоа, Васил забележал дека во случајот на трицифрените броеви е исполнето равенството $9\cdot1089=9801$, и одма се запрашал: дали постои друг четвороцифрен број кој помножен со 9 дава четирицифрен број запишан со истите цифри но во обратен редослед (освен бројот 1089).

По кратко истражување тој заклучил дека бројот 1089 е единствен таков четирицфрен број.

Доказ. Да го наречеме еден четирицифрен број „среќен“ ако тој број помножен со бројот 9 дава резултат број запишан со истите цифри како и почетниот број, но цифрите се во обратен редослед.

Четирицифрениот број мора да биде помал од 1112, бидејќи $9\cdot1111=9999$ и $9\cdot1112=10008$, а последниот резултат е петцифрен број. Бидејќи првата цифра во евентуалниот „среќен“ број е еднаква на 1, последната цифра мора да биде 9 (множејќи со 9 добиваме дека $9\cdot9=81$, каде последната цифра е 1). Според тоа, таквиот број има облик $1bc9$, каде што b и c се цифри. Видовме погоре дека таквиот „среќен“ број може да биде најмногу 1112, па мора цифрата b да биде 0 или 1. Да претпоставиме дека е $b=1$. Така сега бараниот број е од облик $11c9$, но поради условот дека може да биде најмногу 1112 следува дека $c=0$. Но тогаш $1109\cdot9=9981$, што значи дека бројот 1109 не е „среќен“ број. Нека сега $b=0$. Можниот среќен број е сега $10c9$. Конечно, со множење на броевите $1009,1019,1029,1039,1049,1059,1069,1079,1089,1099$, добиваме дека само бројот 1089 е „среќен“ број.