Валерија Пендалиева,
Илиана Цветкова,
Софија, Бугарија

"Еден за сите, сите за еден" или "што е тоа математичка индукција"

Често пати при решавањето на некои задачи, но и во други прилики, ни се случува да знаеме дека дадена група предмети има некое заедничко својство. Тогаш сме сигурни, дека ако земеме еден претставник од таа група, тој сигурно го има тоа својство. На пример: "сите ученици од VII^3 живеат во населбата Илинден". Марко е ученик во VII^3 и следствено тој живее во населбата Илинден. Или "сите броеви кои завршуваат на 0, се деливи со 5. Бројот 150 завршува на 0, па затоа тој се дели со 5."

Логичкиот метод, при кој од општи тврдења преминуваме кон поединечни случаи, се нарекува ***дедукција***.

Се разбира, понекогаш се среќаваме и со обратниот случај. Имено, ако неколку елементи од едно множество имаат определено својство, тогаш логично е да се запрашаме како да заклучиме дали сите елементи од тоа множество го имаат разгледуваното својство. Овој логички метод се нарекува ***индукција***. Меѓутоа, при индуктивното размислување често пати може да се згреши. На пример: "150 е трицифрен број и се дели со 5. Бројот 215 е исто така трицифрен и се дели со 5. Следствено сите трицифрени броеви се делат со 5. Грешка, бројот 101 е трицифрен и не се дели со 5." Постојат примери на многу математички тврдења кои се точни во илјадници поединечни случаи, но сепак има случај кога тие не се точни. Постојат и недокажани тврдења, кои и не се негирани, како на пример: "Секој парен број поголем од 4 може да се запише како збир на два непарни прости броеви.", кое е познато како хипотеза на Голдбах.

Меѓутоа и покрај "подводните мини", кои ги кријат, сепак индуктивните методи на докажување се едни од главното оружје во математиката, бидејќи со нивна помош се добиваат мошне важни резултати. Во оваа статија ќе разгледаме еден метод кој само навидум припаѓа во индуктивните методи, но сепак тој во суштина е дедуктивен метод. Тоа е **методот на математичка индукција (ММИ)**, кој гласи:

Ако треба да ја докажеме точноста на некое математичко тврдење T, кое зависи од природниот број n, и ако за T знаеме дека:

(i) T е точно за природниот број 1;

(ii) од претпоставката дека T е точно за некој природен број $k \geq 1$ следува дека T е точно и за $k+1$;

тогаш ова тврдење T е точно за секој природен број n.

Пример 1. Докажи, дека збирот на првите n природни броеви е еднаков на $\frac{n(n+1)}{2}$.

Решение. Да означиме $S_1 = 1; S_2 = 1+2; .., S_n = 1+2+\ldots+n$, т.е. S_n е збирот на првите n природни броеви. Треба да докажеме дека

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (1)$$

Прв чекор. Да провериме, дека за бројот 1 оваа формула е точна. Навистина $S_1 = 1$, а од (1) добиваме дека $S_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$.

Втор чекор. Нека претпоставиме дека за некој природен број $k \geq 1$ формулата (1) е точна, т.е. за збирот на првите k природни броеви знаеме, дека $S_k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Ќе докажеме дека формулата (1) важи и за следниот природен број $k+1$, т.е. дека $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Имаме:

$$S_{k+1} = \underbrace{(1+2+\ldots+k)}_{S_k} + (k+1) = S_k + (k+1).$$

Сега од претпоставката во вториот чекор следува

$$S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left[\frac{k}{2}+1\right] = (k+1)\frac{k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Според тоа, во првиот чекор докажавме дека условот (i) од **ММИ** е исполнет, а во вториот и третиот чекор дека условот (ii) од **ММИ** се исто така исполнети. Следствено, согласно со **ММИ** формулата (1) важи за секој природен број $n \geq 1$.

Забелешка 1. Да помислиме заедно дали навистина **ММИ** не убедува дека тврдењето навистина е точно. Докажавме, дека за природниот број 1 тоа навистина е точно (чекор 1). Од чекор 2 и точноста на равенството (1) за бројот 1 следува дека ова равенство е точно за природниот број 2. Ако повторно го искористиме чекор 2 за природниот број 2, добиваме дека равенството (1) е точно за природниот број 3 итн. Според тоа, последователно можеме да ја распространиме точноста на тврдењето од условот на задачата на целото множество природни броеви погоилеми од бројот 1, за кој направивме проверка во првиот чекор.

Често пати проверката во чекор 1 се нарекува ***база на индукцијата*** **(БИ)** а претпоставката во чекор 2 ***индуктивна претпоставка*** **(ИП).**

Забелешка 2. За да сме сигурни, дека при примената на **ММИ** добиваме точни резултати, мораме последователно да ги реализираме двата чекори во доказот. Имено, **БИ** и **ИП** се подеднакво важни етапи при примената на **ММИ**. Ако не тргнеме од **БИ**, тогаш можеме да добиеме грешен резултат, како што може да се види од следниот “пример”.

Да се докаже дека секој природен број е еднаков на својот следбеник, т.е.

$$n = n+1 \qquad (2)$$

за секој природен број n.

“Доказ”. Нека претпоставиме дека равенството (2) е точно за некој природен број k, т.е. $k = k+1$. Ако во последното равенство на двете страни додадеме по 1 добиваме $k+1 = k+2,$ што значи дека равенството (2) е точно и за природниот број $k+1$, па од **ММИ** треба да следува дека равенството (2) е точно за секој природен број $n \geq k$.

Знаеме дека претходното тврдење не е точно. Каде е грешката? Дали **ММИ** не е добар? Проблемот е во тоа што ние се обидовме да распространиме едно тврдење на сите природни броеви, без да докажеме дека тоа е точно за еден природен број. Имено, прескокнувањето на **БИ** е причината за “доказот” на едно апсурдно тврдење, кој доказ на прв поглед ни изгледа дека е коректен.

Забелешка 3. Со помош на аксиомата за индукција може да се докаже и **вториот принцип на математичка индукција**, кој гласи:

Ако треба да ја докажеме точноста на некое математичко тврдење *T*, кое зависи од природниот број n, и ако за *T* знаеме дека:

(iii) *T* е точно за некој конкретен природен број m;

(iv) од претпоставката дека *T* е точно за некој природен број $k \geq m$ следува дека *T* е точно и за $k+1$;

тогаш ова тврдење е точно за секој природен број $n \geq m$.

Да разгледаме уште неколку примери.

Пример 2. Со $n!$ да го означиме производот на првите n природни броеви, т.е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, каде $0! = 1! = 1$. Докажи дека

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1. \quad (3)$$

Решение. Да означиме $F_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!$. Ќе го примениме **ММИ**. Имаме

Чекор 1 (БИ). За $n=1$, имаме $(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 1 \cdot 2 - 1 = 1 = F_1$, што значи дека формулата (3) важи за $n=1$.

Чекор 2 (ИП). Нека претпоставиме дека за некој природен број k важи $F_k = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! = (k+1)! - 1$.

Ќе докажеме дека формулата (3) е точна и за бројот $k+1$. Од **ИП** имаме

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! = F_k + (k+1)! - 1 \\ &= (k+1)! - 1 + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+1)![(k+1)+1] - 1 = (k+2)! - 1 \end{aligned}$$

што значи дека равенството (3) е точно и за природниот број $k+1$, па од **ММИ** следува дека тоа е точно за секој природен број n. ♦

Во следната задача ќе покажеме како **ММИ** се применува во задачи од деливост.

Пример 3. Докажи дека за секој природен број n бројот $A_n = 2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$ се дели со 25.

Решение. **Чекор 1. БИ:** Ќе провериме дали бројот A_1 се дели со 25. Имаме, $A_1 = 2^{1+2} \cdot 3^1 + 5 \cdot 1 - 4 = 2^3 \cdot 3^1 + 5 - 4 = 25$ што значи дека $25 | A_1$.

Чекор 2. (ИП). Нека претпоставиме дека за некој природен број k важи $25 | A_k = 2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4$.

Ќе докажеме, дека $25 | A_{k+1} = 2^{(k+1)+2} \cdot 3^{k+1} + 5(k+1) - 4$ Од својствата на степените добиваме

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= 2^{k+3} \cdot 3^{k+1} + 5(k+1) - 4 = 2 \cdot 2^{k+2} \cdot 3 \cdot 3^k + 5k + 5 - 4 \\ &= 2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4 + 5(2^{k+2} \cdot 3^k + 1) = A_k + 5(4 \cdot 6^k + 1) \end{aligned}$$

За секој природен број k бројот $4\cdot 6^k$ завршува на цифрата 4, па затоа за секој природен број k бројот $4\cdot 6^k+1$ завршува на цифрата 5, т.е. тој е делив со 5. Според тоа, за секој природен број k важи $25|[5(6^k+1)]$ и како според **ИП** важи $25\,|\,A_k$ добивема дека $25|[A_k+5\{6^k+1)]=A_{k+1}$, со што задачата е решена. ♦

Во следните два примери ќе покажеме како **ММИ** се применува при докажување на неравенства.

Пример 4. Докажете дека $(2n)!<2^{2n}(n!)^2$, за $n>1$.

Решение. **Чекор 1. (БИ).** За $n=2$ имаме $(2\cdot 2)!=4!=24<64=2^{2\cdot 2}(2!)^2$, т.е. неравенството важи.

Чекор 2. (ИП). Нека претпоставиме дека за некој природен број k важи $(2k)!<2^{2k}(k!)^2$. Од **ИП** за $k+1$ имаме

$$\begin{aligned}[2(k+1)]! &= (2k)!(2k+1)(2k+2)<2^{2k}(k!)^2(2k+1)2(k+1)\\ &< 2^{2k+1}k!(k+1)k!2(k+1)=2^{2(k+1)}[(k+1)!]^2\end{aligned}$$

т.е. неравенството важи и за $k+1$, па значи важи за секој $n\in\mathbf{N}$. ♦

Пример 5. Докажете дека за $n\geq 3$ е точно неравенството

$$n^{n+1}>(n+1)^n\,.$$

Решение. **Чекор 1. (БИ).** За $n=3$ имаме $3^4=81>64=4^3$, т.е. неравенството е точно.

Чекор 2. (ИП). Нека претпоставиме дека за некој природен број $k\geq 3$ важи $k^{k+1}>(k+1)^k$.

Од ИП за природниот број $k+1$ имаме

$$(k+1)^{k+2}>\frac{(k+1)^{k+2}(k+1)^k}{k^{k+1}}=\frac{[(k+1)^2]^{k+1}}{k^{k+1}}=(k+2+\tfrac{1}{k})^{k+1}>(k+2)^{k+1}$$

т.е. неравенството важи и за $k+1$, па значи важи за секој $n\in\mathbf{N}$. ♦

*Се надеваме дека **ММИ** ќе ви се допадне како "орудие" со кое во иднина ќе атакувате на најразлични задачи. Во оваа работа се обидовме да ве запознаеме со ова основно математичко орудие, неговите правила и начините на користење на истото. На крајот ви предлагаме самостојно да ги решите следните задачи.*

Задача 1. Докажи дека за секој природен број n бројот $B_n=5^{n+1}-4n-5$ се дели со 16.

Задача 2. Докажи дека за секој природен број n важи

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}\,.$$

Задача 3. Најди го збирот на првите n непарни природни броеви.

Задача 4. Докажи, дека збирот на квадратите на првите n природни броеви е еднаков на $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.