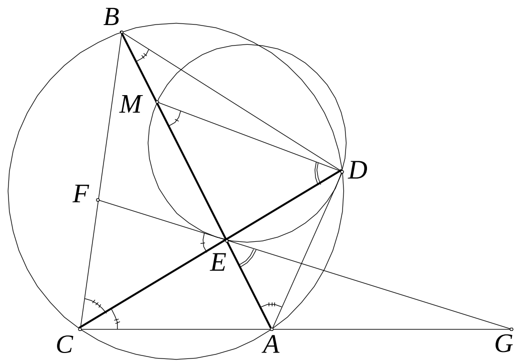
## *XXXI олимпијада*

1. Тетивите $AB$ и $CD$ се сечат во точката $E$ во внатрешноста на дадената кружница. Нека $M$ е внатрешна точка на отсечката $BE$. Тангентата на кружницата која минува низ точките $D, E$ и $M$, повлечена во точката ги сече правите $BC$ и $AC$ во точките $F$ и $G$, соодветно. Пресметај $\frac{\overline{EG}}{\overline{EF}}$, ако $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = t$.

**Решение.** Бидејќи аголот меѓу тангентата и секантата низ допирната точка е еднаков на аголот над тетивата која припаѓа на секантата добиваме $\measuredangle GEA = \measuredangle EDM$. Значи:

$$\begin{aligned}\measuredangle GEC &= \measuredangle AEC + \measuredangle GEA\\ &= \measuredangle MED + \measuredangle EDM\\ &= 180^\circ - \measuredangle DME\\ &= \measuredangle BMD.\end{aligned}$$




*Црт. 31.1.*

Исто така $\measuredangle DBM = \measuredangle ECA$ (како агли над иста тетива), па триаголниците $BDM$ и $CGE$ имаат еднакви агли кај темињата $B$ и $C$, односно, $M$ и $E$, од каде следува дека тие се слични. Од сличноста на триаголниците $BDM$ и $CGE$ следува:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{EG}} \quad \Rightarrow \quad \overline{BM} \cdot \overline{EG} = \overline{DM} \cdot \overline{CE}.$$

Понатаму, $\measuredangle FCE = \measuredangle MAD$ (како агли над иста тетива ) и

$$\measuredangle CEF = 180^\circ - (\measuredangle AEC + \measuredangle GEA) = 180^\circ - (180^\circ - \measuredangle DME) = \measuredangle DME,$$

што значи дека триаголниците $CEF$ и $AMD$ се слични, па затоа

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{DM}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AM} \cdot \overline{EF} = \overline{DM} \cdot \overline{CE} = \overline{BM} \cdot \overline{EG}$$

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{EF}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{EG}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB} - \overline{AM}} = \frac{1}{\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} - 1} = \frac{t}{1-t}$$

2. На кружница е дадено множество $E$ од $2n-1\,(n \geq 3)$ различни точки, меѓу кои точно $k$ точки се обоени со црна боја. За боењето на точките велиме дека е „добро“ ако постојат две црни точки такви што во внатрешноста на еден од соодветните лаци кои тие точки ги определуваат се наоѓаат точно $n$ точки од $E$.

Најди го најмалиот број $k$ за кој секое боење на множеството $E$ е „добро“.

**Решение.** Да ги означиме точките со броеви $1, 2, ..., 2n-1$. Ќе го определиме најголемиот број $k$ таков што постои боење кое не е „добро". Тогаш $k+1$ е решение на задачата.
Нека на некој лак меѓу точките со броеви $p$ и $q$ постојат точно $n$ точки од $E$ (таквите точки ќе ги наречеме „соседни"). Тогаш:

$$|p-q| \equiv n+1 \pmod{2n-1}.$$

Да ги разгледаме броевите од облик

$$a_i \equiv p+i(n+1) \pmod{2n-1} \qquad (*)$$

каде $i, a_i \in \{0,1,2,...,2n-2\}$. Секои два последователни члена од оваа низа се парови соседни точки (бидејќи $a_{i+1}-a_i \equiv n+1 \pmod{2n-1}$).
Ако боењето не е добро, соседните точки не смеат истовремено да бидат црни. Доволно е точките да се прикажат со помош на членови од низата (*) и да се констатира дека соседните членови не се црни, па обоени се најмногу половина од членовите на низата. Разликуваме два случаи:
а) $\text{NZD}(n+1, 2n-1) = 1$. Нека $a_i \equiv 1+i(1+n) \pmod{2n-1}$. Броевите $a_i$ формираат полн систем на остатоци по модул $2n-1$. Од тука следува дека може да бидат обоени најмногу

$$[\tfrac{2n-1}{2}] = [n-\tfrac{1}{2}] = n-1$$

членови на низата. Сега бараниот број е еднаков на $n$.
б) $\text{NZD}(n+1, 2n-1) = 3$. Нека

$$a_i \equiv 1+i(n+1) \pmod{2n-1}, \quad b_i \equiv 2+i(n+1) \pmod{2n-1},$$

$$c_i \equiv 3+i(n+1) \pmod{2n-1}, \quad i = 0, 1, ..., \tfrac{2n-1}{3}-1.$$

Низите $a_i, b_i, c_i$ имаат различни членови.
Слично како во предходниот случај можеме да обоиме најмногу

$$[\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2n-1}{3}] = [\tfrac{n-2}{3} + \tfrac{1}{2}] = \tfrac{n-2}{3}$$

членови на низата. Значи можеме да обоиме најмногу $3 \cdot \frac{n-2}{3} = n-2$ точки, а притоа боењето да не биде добро. Решението во овој случај е $n-1$.
Јасно, $\text{NZD}(n+1, 2n-1)$ не може да има некоја друга вредност, бидејќи според Евклидовиот алгоритам важи

$$\text{NZD}(2n-1, n+1) = \text{NZD}(n+1, n-2) = \text{NZD}(n-2, 3) \in \{1,3\}.$$

3. Најди ги сите природни броеви $n$, $n>1$, такви што $\frac{2^n+1}{n^2} \in \mathbb{N}$.

**Решение.** Јасно бројот 3 е решение на задачата. Ќе докажеме дека тој е единствено решение. Нека $n = 3^k d, (k \geq 0, \text{NZD}(d, 3) = 1)$ е решение, т.е. $(3^k d)^2 \mid (2^{3^k d}+1)$, при што $d$ е непарен број. Имаме:

$$2^{3^k d}+1=(2^d+1)\prod_{m=0}^{k-1}(2^{2\cdot 3^m d}-2^{3^m d}+1) \qquad (1)$$

Ако $t$ е непарен број, тогаш $2^{2t}-2^t+1\equiv 3(\mathrm{mod}\,9)$, што лесно се докажува со индукција по $t$. Од овде следува:

$$3^k \mid \prod_{m=0}^{k-1}(2^{2\cdot 3^m d}-2^{3^m d}+1) \quad \text{и} \quad 3^{k+1}\nmid \prod_{m=0}^{k-1}(2^{2\cdot 3^m d}-2^{3^m d}+1).$$

Бидејќи $d$ е непарен број, $3\mid(2^d+1)$, но $9\nmid(2^d+1)$, (имено, $9\mid 2^d+1$ ако и само ако $d=3+6r$ што не е можно, бидејќи $\mathrm{NZD}(d,3)=1$). Затоа

$$3^{k+1}\mid(2^{3^k d}+1), \quad \text{но} \quad 3^{k+2}\nmid(2^{3^k d}+1).$$

Бидејќи $(3^k)^2$ е делител на $(2^{3^k d}+1)$, следува дека $k+1\geq 2k$, т.е. $k=0$ или $k=1$. Ќе докажеме дека $d=1$, од што непосредно ќе следува дека $k=1$ и $n=3$.

Нека $d>1$ и $p$ е најмалиот прост делител на $d$. Бројот $d$ е непарен и $\mathrm{NZD}(d,3)=1$, па затоа $p\geq 5$, $p\mid(2^n+1)$, т.е. $2^n\equiv -1\,(\mathrm{mod}\,p)$, односно $2^{2n}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p)$. Од малата теорема на Ферма следува $2^{p-1}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p)$. Понатаму, со помош на Евклидовиот алгоритам може да се докаже дека ако $j=\mathrm{NZD}(2n,\ p-1)$ тогаш $2^j\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p)$. Бројот $j$ мора да биде делив со 2, но не и со 4, и може да биде делив со 3, но не и со 9, бидејќи $2n$ не е делив со 9. Затоа $j$ може да биде 2 или 6. Бидејќи $p\mid(2^j-1)$, следува дека $p$ е делител на еден од броевите 3 или 63. Бидејќи $p\geq 5$, се добива дека $p=7$. Но бројот 7 не е делител на бројот $2^m+1$, за ниту еден цел број $m$, што противречи на претпоставката $p\mid(2^n+1)$.

Според тоа, единствената можност за $n=3^k d$ е $k=1$ и $d=1$, т.е. $n=3$. За $k=0$, добиваме $n=1$, што противречни на претпоставката).

4. Најди функција $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$, таква што $f(xf(y))=\frac{f(x)}{y}$, за секои $x,y\in\mathbb{Q}^+$.

**Решение.** Ако $f(y_1)=f(y_2)$, тогаш од дадената функционална равенка добиваме дека $y_1=y_2$. Ако земеме $y=1$ и искористиме дека $f$ е инјекција добиваме $f(1)=1$. За $x=1$ имаме $f(f(y))=\frac{1}{y}$, за секој $y\in\mathbb{Q}^+$. Ако $f$ ја примениме на последното равенство, добиваме $f(\frac{1}{y})=\frac{1}{f(y)}$, за секој $y\in\mathbb{Q}^+$.

Конечно од $y=f(\frac{1}{t})$, следува $f(xt)=f(x)f(t)$, за секои $x,t\in\mathbb{Q}^+$.

Обратно, лесно се докажува дека, ако $f$ ги задоволува условите:

(а) $f(xt)=f(x)f(t)$

(б) $f(f(x))=\frac{1}{x}$, за сите $x,t\in\mathbb{Q}^+$,

тогаш таа е решение на функционалната равенка.

Функција $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ која го задоволува условот (а), може да се конструира со соодветно дефинирање на простите броеви и нивни степени како:

$$f(p_1^{n_1}p_2^{n_2}...p_k^{n_k})=(f(p_1))^{n_1}(f(p_2))^{n_2}\dots(f(p_k))^{n_k},$$

каде $p_j$ е $j$-тиот прост број, а $n_j$ е цел број. Таква функција ќе го задоволува условот (б) ако и само ако го задоволува за секој прост број. Можна е следната конструкција:

$$f(p_j)=p_{j+1}\text{, ако } j \text{ е непарен број и } f(p_j)=\frac{1}{p_{j-1}}\text{, ако } j \text{ е парен број.}$$

Сега се гледа дека $f(f(p))=\frac{1}{p}$, за секој прост број $p$, и дека $f$ ја задоволува функционалната равенка.

5. Нека $n_0\in\mathbb{N}$. Играчите $A$ и $B$ наизменично избираат цели броеви $n_1,n_2,n_3,...$ според следните правила:

- играчот $A$ го знае бројот $n_{2k}$ и избира природен број $n_{2k+1}$ таков што

$$n_{2k}\le n_{2k+1}\le n_{2k}^2,$$

- играчот $B$ го знае бројот $n_{2k+1}$ и може да избере природен број $n_{2k+2}$ таков што $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ е степен на прост број или на бројот $1$.

Играчот $A$ победува ако го избере бројот 1990, а играчот $B$ победува ако го избере бројот 1. За кое $n_o$

$(a)$ играчот $A$ може да победи,

$(b)$ играчот $B$ може да победи, и

$(c)$ ниту еден од играчите нема победничка стратегија?

**Решение.** Со $W$ да го означиме множеството од сите природни броеви $n_0$ такви да играчот $A$ може да победи започнувајќи ја играта со $n_0$.

*Лема.* Да претпоставиме дека $\{m,m+1,...,1990\}\in W$, $s\le 1990$, $\frac{s}{p^r}\ge m$, каде $p$ е прост број (или $p=1$) и $p^r$ е најголемиот степен на $p$, кој е делител на $s$.

Тогаш сите природни броеви $n_0$, за кои што важи $\sqrt{s}\le n_0<m$, се содржани во $W$.

*Доказ.* Ако $n_0 = 1990$, тогаш $A$ го избира тој број и со тоа победува. Нека сега $n_0 < 1990$. Играчот $A$ може да избере $n_1 = s$. Тогаш играчот $B$ мора да, избере број $n_2 \in W$, таков што

$$m \le \frac{s}{p^r} \le n_2 < s \le 1990 .$$

Бидејќи $n_2 \in W$ играчот $A$ може сигурно да победи. Со тоа лемата е докажана. ■

Бидејќи $45^2 = 2025 > 1990,$ сите $n_0$ такви што $45 \le n_0 \le 1990$ се наоѓаат во $W.$ Понатаму, броевите $m = 45$ и $s = 420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ ги задоволуваат условите од лемата и $\sqrt{420} < 21 \le 45,$ од каде се добива дека $\{21, 22, ..., 44\} \subset W.$ Користејќи ја лемата за $m = 21$ и $s = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7,$ се добива дека $\{13, 14, ..., 20\} \subset W.$ За $m = 13$ и $s = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7,$ од лемата се добива дека $\{11, 12\} \subset W.$ Земајќи $m = 11$ и $s = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5,$ од лемата следува дека $\{8, 9, 10\} \subset W.$ Со тоа докажавме дека

$$\{8, 9, ..., 1990\} \subset W.$$

За $n_0 > 1990$ играчот $A$ може да најде природен број $r$ таков што

$$2^r \cdot 3^2 < n_0 \le 2^{r+1} \cdot 3^2 < n_0^2$$

и тогаш избира

$$n_1 = 2^{r+1} \cdot 3^2.$$

Сега независно од изборот на играчот $B$ мора $n_2 = 2^{r+1} \ge 8$ или $n_2 = 3^2 \ge 8$, т.е. $8 \le n_2 < n_0$. По конечен број на чекори ќе биде $8 \le n_{2k} \le 1990,$ а тогаш играчот $A$ победува во играта.

Да го разгледаме сега случајот $n_0 \le 5.$ Бидејќи најмалиот производ на три различни прости броеви е еднаков на $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 > 5^2,$ играчот $A$ мора да избере $n_1 = p^r \cdot q^s$, каде $p$ е прост број, $q$ е прост број или еднаков на 1, $p^r > q^s$ и $r, s \ge 1$. Тогаш играчот $B$ може да избере $n_2 = q^s = \frac{n_1}{p^r} < \sqrt{n_1} \le n_0.$

По конечен број на чекори, играчот $B$ ќе добие $n_{2k} = 1$ и победува.

За $n_0 = 6$ или $n_0 = 7,$ играчот $A$ мора да избере $n_1 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ или $n_1 = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7,$ па играчот $B$ мора да избере $n_2 = 6$. Понатаму $A$ и $B$ мораат да бираат 30, 6, 30, 6, ... наизменично, за да избегнат пораз и никој нема да победи.

6. Да се докаже дека постои конвексен 1990-аголник со следните својства:

$(a)$ сите агли на многуаголникот се еднакви, и

$(b)$ должините на неговите страни се еднакви на $1^2, 2^2, ..., 1989^2, 1990^2$ во некој редослед.

**Решение.** Да претпоставиме дека 1990-аголникот $A_0 A_1 ... A_{1989}$ ги има својствата (а) и (б). Да го поставиме многуаголникот во комплексна рамнина, со координатен почеток во точката $A_0$, а полуправата $A_0 A_1$ да биде позитивен дел од реалната оска. Сега секој вектор $\overrightarrow{A_r A_{r+1}}$ можеме да претставиме со комплексен број

$$n_r e^{ir\alpha}, \quad \text{каде} \quad \alpha = \tfrac{2\pi}{1990}, \quad r \in \{0,1,2,...,1989\},$$

а со $A_{1990}$ е означено $A_0$. Тогаш $(n_0, n_1, ..., n_{1989})$ е пермутација на броевите ( $1^2, 2^2, ..., 1990^2$ ). Проблемот сега може да се преформулира на следниот начин: да се одреди пермутација $(n_0, n_1, ..., n_{1989})$ на броевите ( $1^2, 2^2, ..., 1989^2$ ), така што важи

$$\sum_{r=0}^{1989} n_r e^{ir\alpha} = 0 .$$

Прво, дадените 1990 броеви да ги поделиме на 995 пара

$$(1^2, 2^2), (3^2, 4^2), ..., (1989^2, 1990^2),$$

и да го поставиме секој пар на крајните точки на некој $\overline{A_k A_{k+995}}$ , при што на $k$-тиот пар $((2k-1)^2, (2k)^2)$ му соодветствуваат броевите $(2k-1)^2 e^{ik\alpha}$ и $(2k)^2 e^{i(k\alpha+\pi)}$. На збирот на овие два комплексни броеви соодветствува бројот

$$(2k)^2 - (2k-1)^2 = 4k - 1 .$$

Сега е доволно тие 995 броеви да се поставаат во темињата на правилен 995-аголник, така што збирот биде еднаков на 0. Бидејќи $995 = 5 \cdot 199$ овие броеви ќе ги поделиме на 199 групи од по 5 броеви на следниот начин:

(3, 7, 11, 15, 19), (23, 27, 31, 35, 39), ... , (3963, 3967, 3971, 3975, 3979). (*)

Нека $\beta = \frac{2\pi}{199}, \gamma = \frac{2\pi}{5}$ . Со $F_1$ да го означиме петаголникот со темиња: $1, e^{i\gamma}, e^{2i\gamma}, e^{3i\gamma}, e^{4i\gamma}$, а со $F_{k+1}$ петаголникот $e^{ki\beta} F_1$. Ставајќи пет броеви од $(k+1)-$та група од броевите (*) во темињата на петаголникот $F_{k+1}$, добиваме $(k+1)-$ва група на комплексни броеви

$$(20k+3)e^{ki\beta}, \quad (20k+7)e^{i(k\beta+\gamma)}, \quad (20k+11)e^{i(k\beta+2\gamma)},$$
$$(20k+15)e^{i(k\beta+3\gamma)}, \quad (20k+19)e^{i(k\beta+4\gamma)},$$

каде $k$ =0, 1, 2, ... ,198. Збирот на овие броеви е

$$\sum_{k=0}^{198}\sum_{l=0}^{4}(20k+4l+3)\,e^{i(k\beta+l\gamma)}=\sum_{k=0}^{198}\sum_{l=0}^{4}[(10k+2l+2)^2-(10k+2l+1)^2]e^{i(k\beta+l\gamma)}$$
$$=\sum_{k=0}^{198}\sum_{l=0}^{4}\sum_{m=1}^{2}(10k+2l+m)\,e^{i(k\beta+l\gamma+m\pi)}=0.$$

Бидејќи $k$ прима вредности од $\{0,1,2,...,198\}$, $l$ од $\{0,1,2,3,4\}$, и $m$ од $\{1,2\}$, изразот $10k+2l+m$ прима вредности од 1, 2, ... , 1990, при што секоја вредност ја зема точно еднаш, добиваме дека $e^{i(k\beta+l\gamma+m\pi)}=e^{i\frac{10k+398l+995m}{1990}\pi}$ ги прима вредностите $1,\ e^{i\alpha},...,\ e^{1989i\alpha}$, и тоа секоја по еднаш.

Останува уште да се докаже дека вака конструираниот $1990-$аголник е конвексен. Ќе докажеме дека за секоја страна на многуаголникот сите останати негови темиња се наоѓаат од една страна на правецот на кој што е избрана страната на многуаголникот. Избираме произволна страна на многуаголникот и ја означуваме со $A_0A_1$, а $1990-$аголникот со $A_0A_1...A_{1989}$. Бидејќи

$$\operatorname{Im}(A_k)=\begin{cases}\sum\limits_{m=0}^{k-1}n_m\operatorname{Im}(e^{mi\alpha})\ge n_1\sin\frac{2\pi}{1990}>0, & 2\le k\le 995;\\ -\sum\limits_{m=k}^{1989}n_m\operatorname{Im}(e^{im\alpha})\ge n_{1989}\sin\frac{2\pi}{1990}>0, & 996\le k\le 1989,\end{cases}$$

добиваме дека сите $A_k$, $(k=2,3,...,1989)$ се од иста страна на правата $A_0A_1$.