

ПРИМЕНА НА ЕДНО ОБОПШТУВАЊЕ НА ТЕОРЕМАТА НА ПТОЛОМЕЈ

Позната ни е теоремата на античкиот математичар Птоломеј (100-170):

Теорема 1. Еден четириаголник може да се впише во кружница ако и само ако производот на должините на неговите дијагонали е еднаков на збирот од производите на неговите спротивни страни.

Ќе ја формулираме таканаречената теорема на Бретшнајдер, која уште е позната и како косинусна теорема за четириаголник.

Теорема 2. Даден е четириаголник $ABCD$, во кој $\angle BAD = \alpha$ и $\angle BCD = \beta$. Да се докаже дека

$$AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot CD^2 + BC^2 \cdot DA^2 - 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \cos(\alpha + \beta).$$

Коментар. Бидејќи $\cos(\alpha + \beta) \geq -1$, добиваме

$$-2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \cdot \cos(\alpha + \beta) \leq 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA$$

и од теорема 2 следува дека

$$AC^2 \cdot BD^2 \leq AB^2 \cdot CD^2 + BC^2 \cdot DA^2 + 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA = (AB \cdot CD + BC \cdot DA)^2.$$

Оттука

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot DA.$$

Последното равенство е познато како обопштена теорема на Проломеј, бидејќи во случајот повторно од теорема 2 имаме, дека $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$ ако и само ако $\cos(\alpha + \beta) = -1$, т.е. кога $\alpha + \beta = 180^\circ$. Да забележиме, дека во формулацијата на теорема 2 наместо $\alpha + \beta$ можеме да го земеме збирот на другите два агли во четириаголникот, бидејќи збирот на внатрешните агли во четириаголник е 360° .

Доказ на теорема 2. Нека точката K е внатрешна за $ABCD$ и важи $\angle KDA = \angle BAC$ и $\angle KAD = \angle ACB$ (направи цртеж). Нека исто така точката M е внатрешна за $ABCD$ и $\angle MAB = \angle ACD$, $\angle MBA = \angle CAD$. Од $\triangle ADK \sim \triangle CAB$ следува дека $AK = \frac{BC \cdot DA}{AC}$ и $DK = \frac{AB \cdot DA}{AC}$, а од $\triangle ABM \sim \triangle CAD$ следува дека

$$AM = \frac{CD \cdot AB}{AC} \text{ и } BM = \frac{DA \cdot AB}{AC}.$$
 Заклучуваме дека $DK = BM$. Од друга страна

$$\angle KDA + \angle ADB + \angle DBA + \angle ABM = \angle ADB + \angle DBA + \angle BAD = 180^\circ$$

(агли во $\triangle ABD$). Следствено $\angle KDB + \angle DBM = 180^\circ$ и значи DK и BM се паралелни, од што заедно со $DK = BM$ следува дека четириаголникот $KMBD$ е

паралелограм. Заклучуваме дека $KM = BM$. Сега да ја примениме косинусната теорема за $\triangle AMK$. Добиваме

$$\begin{aligned} BD^2 &= KM^2 = AK^2 + AM^2 - 2AK \cdot AM \cos(\alpha + \beta) \\ &= \frac{BC^2 \cdot DA^2}{AC^2} + \frac{CD^2 \cdot AB^2}{AC^2} - 2 \frac{BC \cdot DA \cdot CD \cdot AB}{AC^2} \cos(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

и следствено

$$AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot CD^2 + BC^2 \cdot DA^2 - 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \cos(\alpha + \beta). \blacklozenge$$

Ќе разгледаме две задачи во кои ќе ја примениме теорема 2.

Задача 1. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$, чии должини на страни и дијагонали се рацвионални броеви. Ако дијагоналите AC и BD се сечат во точката O , докажи дека должините на отсечките AO , BO , CO и DO исто така се рационални броеви.

Решение. Ќе докажеме дека AO и CO се рационални броеви. За BO и DO доказот е очигледен. Доволно е да се констатира дека $\frac{AO}{CO}$ е рационален број. Навистина,

ако $\frac{AO}{CO} = \frac{m}{n}$, каде m и n се природни броеви, тогаш $\frac{AO}{AO+CO} = \frac{m}{m+n}$ и значи

$AO = \frac{m}{m+n} AC$ е рационален број, од каде што следува дека и CO е рационален

број (како разлика од рационални броеви).

Нека $AH_1 \perp BD$ ($H_1 \in BD$) и $CH_2 \perp BD$ ($H_2 \in BD$). Тогаш $\triangle AOH_1 \sim \triangle COH_2$, па затоа $\frac{AO}{CO} = \frac{AH_1}{CH_2}$. Од друга страна $\frac{P_{ABD}}{P_{BDC}} = \frac{BD \cdot AH_1}{BD \cdot CH_2} = \frac{AH_1}{CH_2}$. Според тоа,

$$\frac{AO}{CO} = \frac{S_{ABD}}{S_{BDC}} = \frac{AB \cdot DA \sin \angle BAD}{BC \cdot CD \sin \angle BCD} = r \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle BCD},$$

каде $r = \frac{AB \cdot DA}{BC \cdot CD}$ е рационален број. Од досега изнесеното следува дека

$$\frac{AO}{CO} = r \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle BCD} = r \frac{\sin^2 \angle BAD}{\sin \angle BCD \cdot \sin \angle BAD} = r \frac{1 - \cos^2 \angle BAD}{\sin \angle BCD \cdot \sin \angle BAD}.$$

Но, од косинусната теорема за $\triangle ABD$ следува, дека

$$\cos \angle BAD = \frac{AB^2 + DA^2 - BD^2}{2AB \cdot DA} = q,$$

каде q е рационален број. Тогаш $\cos^2 \angle BAD$ исто така е рационален број, од што следува дека и бројот $1 - \cos^2 \angle BAD = 1 - q^2$ е рационален. Според тоа, добиваме

дека $\frac{AO}{CO} = \frac{r(1-q^2)}{\sin \angle BCD \cdot \sin \angle BAD}$. Понатаму, ја применуваме теорема 2 за четириаголникот $ABCD$. Имаме

$$\cos(\angle BAD + \angle BCD) = \frac{AB^2 \cdot CD^2 + BC^2 \cdot DA^2 - AC^2 \cdot BD^2}{2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA} = s,$$

каде s е рационален број. Добиваме дека

$$s = \cos(\angle BAD + \angle BCD) = \cos \angle BAD \cdot \cos \angle BCD - \sin \angle BAD \cdot \sin \angle BCD.$$

Но, како и претходно, од косинусната теорема за триаголниците ABD и BCD следува, дека $\cos \angle BAD$ и $\cos \angle BCD$ се рационални броеви. Добиваме дека

$\sin \angle BAD \cdot \sin \angle BCD$ е рационален број. Конечно $\frac{AO}{CO}$ е рационален број, што и

требаше да се докаже.

Задача 2. (Американска олимпијада, 23 април 2003 година) Должините на страните и дијагоналите на конвексен многуаголник се рационални броеви. Во многуаголникот се повлечени сите дијагонали и тие го разделуваат на помали многуаголници. Докажи дека должините на страните на помалите многуаголници се рационални броеви.

Решение. Нека PQ е произволна страна на некој од помалите многуаголници. Нека P е пресечна точка на дијагоналите XS и ZT на почетниот многуаголник, а Q е пресечна точка на дијагоналите ZT и YU на почетниот многуаголник. Ако ја примениме задача 1 за четириаголниците $XTYZ$ и $UTYZ$, добиваме, дека должините на отсечките ZP и QT се рационални броеви. Но, тогаш

$$PQ = ZT - (ZP + QT)$$

исто така е рационален број, што и требаше да се докаже.

Литература

1. Шаригин, И.: Задачи по геометрија, Наука, Москва, 1986 (на руски)