ДВАДЕСЕТ ТРЕЋИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло. Припремна варијанта, 21. октобар 2001.
8-9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

---

поени задаци

4 **1.** Дати су трапез ABCD са основицама AD и BC и тачка K на његовом краку AB. Кроз тачку A конструисана је права l, паралелна правој KC, а кроз тачку B конструисана је права m, паралелна правој KD. Доказати да тачка пресека правих l и m лежи на краку CD.

4 **2.** Славко је помножио првих n природних бројева, а Валерије је помножио првих m парних природних бројева (n и m су већи од 1). Обојица су добили један те исти број. Доказати да је бар један од дечака погрешио.

4 **3.** У Кољиној колекцији се налазе четири царска новчића од по пет рубаља. Рекли су му да су нека два међу њима неисправна. Кольа хоће да провери (да докаже или да оповргне), да ли су међу новчићима тачно два неисправна. Може ли он то да уради помоћу два мерења на теразијама без тегова? (Неисправни новчићи су једнаких тежина, исправни су такође једнаких тежина, али су неисправни лакши од исправних.)

4 **4.** По правој се у једном смеру крећу 5 једнаких куглица, а у сусрет им се крећу 5 других истих таквих куглица. Брзине свих куглица су једнаке. Приликом судара било које две куглице оне се одбију на супротне стране с истом брзином с којом су се кретале до судара. Колико ће се укупно судара десити међу куглицама?

4 **5.** Одабрано је неколико (више од три) тачака у равни. Познато је да ако се избаци произвољна тачка, преостале ће бити симетричне у односу на неку праву. Да ли је тачно да је цео скуп тачака такође симетричан у односу на неку праву?

ДВАДЕСЕТ ТРЕЋИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло. Припремна варијанта, 21. октобар 2001.
10-11 разред (старији узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

---

поени задаци

**1.** Назовимо висином петоугла отсечак нормале спуштене из
4 темена на наспрамну страницу. Назовимо медијаном пето-
угла отсечак који повезује теме са средиштем наспрамне
странице. Познато је да су дужине свих висина и свих
медијана неког петоугла једнаке једном истом броју.
Доказати да је тај петоугао правилан (то јест да су му
странице једнаке и да су му углови једнаки).

**2.** Постоји 1000 узастопних природних бројева међу којима
4 ниједан није прост (на пример: 1001!+2, 1001!+3, ... ,
1001!+1001). А да ли постоји 1000 узастопних природних
бројева, међу којима је тачно 5 простих?

**3.** По правој се у једном смеру крећу 5 једнаких куглица,
4 а у сусрет им се крећу 5 других истих таквих куглица.
Брзине свих куглица су једнаке. Приликом судара било
које две куглице оне се одбију на супротне стране с
истом брзином с којом су се кретале до судара. Колико
ће се укупно судара десити међу куглицама?

**4.** На квадратној торти су распоређене ~~квадратне~~ ТРОУГЛАСТЕ чоколади-
4 це, које се међусобно не додирују. Да ли је увек могу-
ће исећи торту на конвексне полигоне, тако да сваки
полигон садржи тачно једну чоколадицу? (Сматрамо да је
торта раван квадрат. Фигуру називамо конвексном, ако
она са произвољне две своје тачке садржи и дуж која их
повезује.)

**5.** У левом доњем углу шаховске табле, а такође на сусед-
4 ном горњем и суседном десном пољу налази се по бели
топ. Дозвољено је повлачити потезе по уобичајеним пра-
вилима, али тако да после сваког потеза сваки од топо-
ва буде под заштитом неког другог топа. Могу ли се у
неколико потеза преместити та три топа тако да сваки
доспе на поље симетрично полазном у односу на дијаго-
налу која повезује десни доњи и леви горњи угао табле?

ДВАДЕСЕТ ТРЕЋИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло. Основна варијаната, 28. октобар 2001.
8 - 9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена.)

---

поени задаци

4 — **1.** Постоје ли такви природни бројеви $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_{100}$, да је $[a_1,a_2]>[a_2,a_3]>\ldots>[a_{99},a_{100}]$?
([a,b] је најмањи заједнички садржалац бројева a и b, тј. најмањи природан број који је делив и са a и са b.)

5 — **2.** N црвених и N плавих тачака, које се строго смењују, деле кржницу на 2N лукова, тако да произвољна два суседна лука имају различите дужине. При томе је дужина сваког од тих лукова једнака једном од три броја: a, b или c. Доказати да N-тоугао с црвеним теменима и N-тоугао с плавим теменима имају једнаке обиме и једнаке површине.

5 — **3.** Дата је таблица $(n-2)\times n$, $n>2$, у чије је свако поље уписан цео број од 1 до n, при чему су у свакој врсти сви бројеви различити и у свакој колони сви бројеви различити. Доказати да је ту таблицу могуће допунити до квадратне таблице $n\times n$, у чије је свако ново поље такође уписан неки цео број од 1 до n, тако да као и раније у свакој врсти и свакој колони бројеви буду различити.

5 — **4.** Правилан $(2n+1)$-угао је разложен дијагоналама на $2n-1$ троуглова. Доказати да су међу њима бар три једнакокраки.

6 — **5.** Саша поставља топове на празну шаховску таблу: првог - где хоће, а сваког следећег поставља тако да туче непаран број раније постављених топова. Који највећи број топова он може тако да постави? (Као и обично, топови туку један другог по вертикали и хоризонтали само ако међу њима нема других топова.)

8 — **6.** У врсти је записано неколико бројева. Сваке секунде робот бира неки пар бројева који стоје један до другог, у коме је леви број већи од десног, мења им места и при том оба броја множи са 2. Доказати да после неког времена неће бити могуће да се изврши следећа таква операција.

8 — **7.** Познато је да број $2^{333}$ има 101 цифру и да почиње цифром 1. Колико бројева у низу 2, 4, 8, 16, ... , $2^{333}$ почиње цифром 4?

ДВАДЕСЕТ ТРЕЋИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло. Основна варијанта, 28. октобар 2001.
10 - 11 разред (старији узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

---

поени задаци

**1.** У равни су дате три црвене тачке, три плаве тачке и
4 још тачка O. Познато је да тачка O лежи унутар троугла
с црвеним теменима и унутар троугла с плавим теменима,
при чему је растојање од O до произвољне црвене тачке
мање од растојања од O до произвољне плаве тачке. Могу
ли све црвене и све плаве тачке да леже на једној кружници?

**2.** Постоје ли такви природни бројеви $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_{100}$,
5 да је $[a_1,a_2]>[a_2,a_3]>\ldots>[a_{99},a_{100}]$?
($[a,b]$ је најмањи заједнички садржалац бројева a и b,
тј. најмањи природан број који је делив и са a и са
b.)

**3.** Пола шаховске табле су нумерисана бројевима од 1 до
6 64, тако да суседни бројеви леже на суседним пољима
(са заједничком страницом). Која је најмања могућа сума бројева на дијагонали?

**4.** Нека је $F_1$, $F_2$, $F_3$, ... низ конвексних четвороуглова,
6 где се $F_{k+1}$ (за $k=1,2,3,\ldots$) добија овако: $F_k$ се расече по дијагонали, један од делова се преврне и слепи
по линији расецања с другим делом. Који највећи број
различитих четвороуглова може да садржи тај низ?
(Различити су они многоуглови, који се не могу пресликати кретањем један у другог.)

**5.** У бесконачној аритметичкој прогресији сви су бројеви
7 природни. У сваком члану је могуће подвући једну или
неколико узастопних цифара, тако да је у првом члану
подвучена цифра 1, у другом - 2, и тако даље (за произвољан природан број n у n-том члану су подвучене цифре које формирају број n). Доказати да је разлика прогресије степен броја 10.

**6.** У реду стоје 23 кутије са куглицама, при чему за про-
7 извољно n од 1 до 23 постоји кутија у којој се налази
тачно n куглица. У једној операцији је могуће преместити у произвољну кутију још толико куглица колико се
у њој већ налази, из било које друге кутије у којој је
више куглица. Да ли је увек могуће таквим операцијама
добити да се у првој кутији нађе 1 куглица, у другој -
2 куглице, и тако даље, у 23-ој - 23 куглице?

**7.** У координатној равни је постављен троугао, тако да се
његове слике добијене транслацијама за векторе с целобројним координатама не прекривају.
3 а) Може ли површина таквог троугла бити већа од 1/2?
6 б) Нађи највећу могућу површину таквог троугла.

ДВАДЕСЕТ ТРЕЋИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло. Припремна варијанта, 24. фебруар 2002.
8 - 9 разред (млађи узраст)

---

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају.)

---

поени задаци

4 **1.** Дато је пуно једнаких правоугаоних картона димензија $a \times b$ cm, где су a и b цели бројеви, при чему је a мање од b. Познато је да се од таквих картона могу саставити правоугаоник $49 \times 51$ cm, и правоугаоник $99 \times 101$ cm. Да ли се на основу тих података могу једнозначно одредити a и b?

5 **2.** Може ли се било који троугао разрезати на четири конвексне фигуре: троугао, четвороугао, петоугао и шестоугао?

5 **3.** За природне бројеве x и y број $x^2+xy+y^2$ се у декадном запису завршава нулом. Доказати да се он завршава са бар две нуле.

5 **4.** Странице AB, BC, CD и DA четвороугла ABCD додирују неку кружницу у тачкама K, L, M и N редом, S је тачка пресека дужи KM и LN. Познато је да се око четвороугла SKBL може описати кружница. Доказати да се око четвороугла SNDM такође може описати кружница.

3 **5.** а) Дато је 128 новчића двеју различитих тежина, новчића сваке од тежина подједнако много. Како да се помоћу теразија без тегова сигурно нађу два новчића различите тежине са не више од 7 мерења?

3 б) Дато је осам новчића двеју различитих тежина, новчића сваке од тежина подједнако много. Како да се помоћу теразија без тегова сигурно нађу два новчића различите тежине са два мерења?

ДВАДЕСЕТ ТРЕЋИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло. Припремна варијанта, 24. фебруар 2002.
10 - 11 разред (старији узраст)

---

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена.)

---

| поени | задаци |
|---|---|
| 4 | **1.** За природне бројеве x и y број $x^2+xy+y^2$ се у декадном запису завршава нулом. Доказати да се он завршава са бар две нуле. |
| 5 | **2.** Од папира су изрезана два једнака троугла ABC и A'B'C' и положена на сто, при чему је један од њих преврнут. Доказати да средишта дужи AA', BB' и CC' леже на једној правој. |
| 5 | **3.** Дато је 6 комада сира различитих тежина. Познато је да се сир може поделити на две гомиле од по три комада, тако да обе гомиле имају једнаке тежине. Како је то могуће извести са два мерења на теразијема без тегова, ако се за свака два комада види одока који је тежи? |
| 5 | **4.** На колико је начина могуће распоредити бројеве од 1 до 100 у правоугаоник 2 × 50, тако да било која два броја који се разликују за 1 буду у пољима која имају заједничку страницу? |
| 6 | **5.** Да ли постоји правилна троугаона призма коју је могуће облепити (без преклапања) различитим једнакостраничним троугловима? (Дозвољено је превијати троуглове преко ивица призме.) |

ДВАДЕСЕТ ТРЕЋИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло. Основна варијанта, 3. март 2002.
8 - 9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена.)

---

поени задаци

4 **1.** Нека су a, b и c дужине страница троугла. Доказати неједнакост $a^3+b^3+3abc>c^3$.

4 **2.** На шаховској табли димензија 23×23 поља стоје четири фигуре: у левом доњем и десном горњем углу табле по бела фигура, а у левом горњем и десном доњем углу табле по црна. Беле и црне фигуре се померају наизменично, почињу беле. Сваким потезом једна од фигура се помера на произвољно суседно (са заједничком страницом) слободно поље. Беле фигуре настоје да стигну на два суседна поља. Могу ли црне фигуре да их спрече у томе?

6 **3.** У конвексном четвороуглу ABCD тачке E и F су средишта страница BC и CD редом. Дужи AE, AF и EF разлажу четвороугао на четири троугла чије су површине једнаке узастопним природним бројевима. Која је највећа могућа површина троугла ABD?

7 **4.** У низ је поређано n сијалица и неке од њих су упаљене. Сваког минута после тога све сијалице које су биле упаљене протеклог минута се гасе, а угашене сијалице које су протеклог минута биле суседне са тачно једном упаљеном сијалицом се пале. За које n је могуће тако упалити неке сијалице на почетку, да после тога у сваком моменту бар једна сијалица буде упаљена?

7 **5.** Оштроугли троугао се разрезује праволинијским резом на два (не обавезно троугаона) дела, затим се један од тих делова опет разрезује на два дела, и тако даље: у сваком кораку се бира један од већ постојећих делова и разрезује се (по правој) на два дела. После неколико корака се испоставило да је полазни троугао разложен на неколико троуглова. Могу ли сви они бити тупоугли?

7 **6.** У растућем бесконачном низу природних бројева сваки број, почев од 2002-ог, је делилац збира претходних бројева. Доказати да је у том низу сваки број, почев од неког места, једнак збиру претходних бројева.

8 **7.** С низом домина, поређаним по уобичајеним правилима, дозвољено је обављати следећу операцију: бира се одсечак од неколико узастопних домина са једнаким ознакама на крајевима одсечка, обрће се и поставља на исто место. Доказати да ако два низа састављена од два једнака комплета домина имају једнаке ознаке на крајевима, онда се дозволеним операцијама може добити да поредак домина у другом низу буде једнак поретку домина у првом низу.

ДВАДЕСЕТ ТРЕЋИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло. Основна варијанта, 3. март 2002.
10 - 11 разред (старији узраст)
*(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена.)*

---

поени задаци

4 **1.** Тангенси углова неког троугла су цели бројеви. Наћи те тангенсе.

4 **2.** Да ли је тачно да на графику функције $y=x^3$ постоји тачка A, а на графику функције $y=x^3+|x|+1$ постоји тачка B, тако да растојање AB није веће од 1/100?

5 **3.** У растућем бесконачном низу природних бројева сваки број, почев од 2002-ог, је делилац збира претходних бројева. Доказати да је у том низу сваки број, почев од неког места, једнак збиру претходних бројева.

5 **4.** Група гледалаца је купила све карте у једном реду, али су тамо поседали на произвољан начин, при чему нико није сео на своје место. Разводник може да промени места произвољним суседима који не седе на својим местима, и тако више пута. Да ли је тачно да при произвољном почетном распореду разводник може, радећи тако, сваког гледаоца да смести на своје место?

6 **5.** Нека су $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ висине оштроуглог троугла ABC; $O_A$, $O_B$ и $O_C$ - центри кругова уписаних у троуглове $AB_1C_1$, $BC_1A_1$ и $CA_1B_1$ редом; $T_A$, $T_B$ и $T_C$ - тачке додира круга уписаног у троугао ABC са страницама BC, CA и AB редом. Доказати да су све странице шестоугла $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ једнаке.

7 **6.** Шпил од 52 карте је распоређен у облику правоугаоника $4\times13$. Познато је да ако две карте леже једна до друге по вертикали или по хоризонтали, онда су оне исте боје или исте вредности. Доказати да су у сваком хоризонталном реду (од 13 карата) све карте исте боје.

8 **7.** Да ли постоје такви ирационални бројеви a и b, да је $a>1$, $b>1$, и да је $[a^m]$ различито од $[b^n]$ за произвољне природне бројеве m и n? ([x] означава цео део броја x, то јест највећи цео број који није већи од x.)