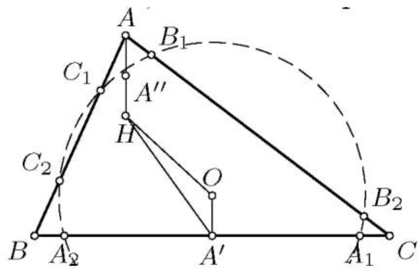
## *XLIX олимпијада*

1. Нека $H$ е ортоцентарот на остроаголниот триаголник $ABC$. Кружницата со центар во средината на отсечката $BC$ и која минува низ $H$ ја сече правата $BC$ во точките $A_1$ и $A_2$. Аналогно, кружницата со центар во средината на отсечката $CA$ и која ја содржи $H$ ја сече правата $CA$ во точките $B_1$ и $B_2$, а кружницата со центар во средината на отсечката $AB$ и која ја содржи точката $H$ ја сече правата $AB$ во точките $C_1$ и $C_2$. Докажи дека точките $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ припаѓаат на една кружница.

**Решение.** *Прв начин*. Нека $A'$ и $A''$ се соодветно средините на отсечките $BC$ и $AH$, $O$ е центарот на опишаната кружница околу триаголникот $ABC$ и $R$ е неговиот радиус. Тогаш од правилото на паралелограм применето на паралелограмите $OA'HA''$ и $OA'A''A$ следува




$$\overline{OA_1}^2 = \overline{OA'}^2 + \overline{A'A_1}^2 = \overline{OA'}^2 + \overline{A'H}^2 = \tfrac{1}{2}(\overline{A'A''}^2 + \overline{OH}^2) = \tfrac{1}{2}(R^2 + \overline{OH}^2) .$$

Истиот израз се добива и за отсечките $OA_2, OB_1, OB_2, OC_1, OC_2$, што значи дека точките $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на кружница со центар во $O$.

*Втор начин*. Со $A', B', C'$ да ги означиме средините на отсечките $BC, CA, AB$, соодветно. Тогаш

$$\overline{CA_1} \cdot \overline{CA_2} = (\overline{CA'} - \overline{A'A_1})(\overline{CA'} + \overline{A'A_1}) = \tfrac{b^2}{4} - \overline{A'H}^2$$

и аналогно

$$\overline{CB_1} \cdot \overline{CB_2} = \tfrac{a^2}{4} - \overline{B'H}^2 .$$

Бидејќи $CH \perp A'B'$, добиваме

$$\overline{A'H}^2 - \overline{B'H}^2 = \overline{A'C}^2 - \overline{B'C}^2 = \tfrac{b^2 - a^2}{4} ,$$

од каде следува дека

$$\overline{CA_1} \cdot \overline{CA_2} = \overline{CB_1} \cdot \overline{CB_2} ,$$

што значи дека $A_1, A_2, B_1, B_2$ припаѓаат на некоја кружница $k_c$. Аналогно точките $A_1, A_2, C_1, C_2$ припаѓаат на некоја кружница $k_b$ и точките $B_1, B_2$, $C_1, C_2$ припаѓаат на некоја кружница $k_a$.

Ако кружниците $k_a, k_b, k_c$ се мешусебно различни, тогаш нивните радикални оски по парови се $BC.CA, AB$, што не е можно бидејќи овие прави не припаѓаат на ист прамен. Затоа сите три кружници се совпаѓаат, т.е. точките

$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на една кружница.

2. а) Докажи, дека

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1 \qquad (1)$$

за секои реални броеви $x, y, z$ такви шту ниту еден од нив не е еднаков на 1 и за кои важи $xyz=1$.

б) Докажи, дека знак за равенство важи за бесконечно многу тројки рационални броеви $x, y, z$ такви што ниту еден од нив не е еднаков на 1 и за кои важи $xyz=1$.

**Решение.** а) Воведуваме смена $a=\frac{x}{x-1}$, $b=\frac{y}{y-1}$, $c=\frac{z}{z-1}$ и условот на задачата го добива обликот $a+b+c=ab+bc+ca+1$, а неравенството (1) го добива обликот

$$a^2+b^2+c^2\geq 1. \qquad (2)$$

Понатаму, имаме

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \\ &= (a+b+c)^2-2(a+b+c)+2 \\ &= (a+b+c-1)^2+1\geq 1, \end{aligned}$$

т.е. точно е неравенството (2), при што знак за равенство важи ако и само ако $a+b+c=1$ и $ab+bc+ca=0$.

б) Треба да докажеме, дека постојат бесконечно многу тројки $a,b,c\in\mathbb{Q}$ такви што $a+b+c=1$ и $ab+bc+ca=0$. Ако во второто равенство замениме $c=1-a-b$ добиваме $a^2+ab+b^2-a-b=0$. Во последното равенство земаме $b=ta$ и истото го добива обликот $(t^2+t+1)a^2=(t+1)a$, од каде наоѓаме $a=\frac{t+1}{t^2+t+1}$ и $b=\frac{t^2+t}{t^2+t+1}$. Сега, $c=1-a-b=\frac{-t}{t^2+t+1}$. Според тоа, за

$$(a,b,c)=\left(\frac{t+1}{t^2+t+1},\frac{t^2+t}{t^2+t+1},\frac{-t}{t^2+t+1}\right)$$

важи знак за равенство за секој $t\in\mathbb{Q}$.

3. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви $n$ такви што бројот $n^2+1$ има прост делител поголем од $2n+\sqrt{2n}$.

**Решение.** Како што знаеме, постојат бесконечно многу прости броеви од облик $p=4k+1, k\in\mathbb{N}$ и дека за секој таков број $p$ важи $(\frac{-1}{p})=1$, што значи дека постои точно еден природен број $n$, $n<\frac{p-1}{2}$ таков што $n^2\equiv -1(\mathrm{mod}\, p)$.

Тогаш $n^2+1$ има прост делител $p$ поголем од $2n$. Ќе докажеме дека за $p>20$ всушност важи $p>2n+\sqrt{2n}$.

Нека $k=p-2n$. Од $p\,|\,(2n)^2+4\equiv k^2+4 \pmod p$ и $k\geq\sqrt{p-4}>4$ следува дека $k^2\geq p-4=2n+k-4>2n$. Затоа, $p=2n+k>2n+\sqrt{2n}$ и $p\,|\,n^2+1$.

4. Определи ги сите функции $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ такви што

$$\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}, \qquad (1)$$

за секои позитивни реални броеви $x,y,z,w$ такви што $wx=yz$.

**Решение.** Ако во (1) земеме $x=y=z=w$, добиваме $f(x^2)=f(x)^2$, за секој $x>0$, па ако во последната равенка земеме $x=1$ наоѓаме $f(1)=1$. Сега за $w=1,\ y=z=\sqrt{x}$ од (1) следува

$$\frac{1+(f(x))^2}{2f(x)}=\frac{1+x^2}{2x},$$

што е еквивалентно со

$$(f(x)-x)(f(x)-\tfrac{1}{x})=0,$$

т.е. $f(x)\in\{x,\frac{1}{x}\}$, за секој $x>0$.

Нека претпоставиме дека за некои $x,w\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$ важи $f(x)=x$ и $f(w)=\frac{1}{w}$. Ако земеме $y=z=\sqrt{wx}$, тогаш од (1) следува

$$\frac{\frac{1}{w^2}+x^2}{2f(wx)}=\frac{w^2+x^2}{2wx}.$$

Меѓутоа, за $f(wx)=wx$ од последната равенка следува $w=1$, а за $f(wx)=\frac{1}{wx}$ повторно од последната равенка следува $x=1$, што е противречност. Според тоа, $f(x)=x$, за секој $x>0$ или $f(x)=\frac{1}{x}$ за секој $x>0$. Лесно се проверува дека овие функции ја задоволуваат равенката (1).

5. Нека се $n$ и $k$ природни броеви такви што $k>n$ и $k-n$ е парен број. Дадени се $2n$ сијалици означени со броевите $1,2,\dots,2n$; свака од кои може да биде запалена или изгасната. На почетокот сите сијалици се изгаснатаи. Разгледуваме низи од чекори: во секој чекор се менува состојбата на точно една сијалица (запалена станува изгасната, а изгасната - запалена).

Нека $N$ е бројот на такви низи од $k$ чекори кои даваат состојба во која сите сијалици од 1 до $n$ се запалени, а сите сијалици од $n+1$ до $2n$ се изгаснати.

Нека $M$ е бројот на такви низи од $k$ чекори кои даваат состојба во која сите сијалици од 1 до $n$ запалени, а сите сијалици од $n+1$ до $2n$ се изгаснати и притоа ниту еднаш не е променета состојбата на сјалиците од $n+1$ до $2n$. Пресметај $\frac{N}{M}$.

**Решение.** Низата чекори после која сите сијалици од 1 до $n$ се запалени а останатите се изгаснати ја нарекуваме *допустлива*. Ако притоа сијалиците од $n+1$ до $2n$ не ја менувале состојбата, тогаш низата ја нарекуваме *строга*. Значи, има $N$ допустливи низи, од кои $M$ се строги. Јасно, $M,N>0$. Секоја допустлива низа, на секоја сијалица од 1 до $n$ и ја менува состојбата непаран број пати, а на секоја од останатите сијалици парен број пати.

Набљудуваме строга низа чекори $P$. Нека со неа сијалицата $i$ $(1\le i\le n)$ ја менувала состојбата $m_i$ пати. Притоа важи $m_1+m_2+...+m_n=k$. Ако за секој $i$ избереме паран број од овие $m_i$ чекори и ги замениме во чекорите на сијалицата $n+i$, добиваме допустлива низа чекори. За дадено $i$, овие чекори може да се изберат на $2^{m_i-1}$ начини (толку има подмножества на $m_i$-елементно множество со парен број елементи). Вкупно, со оваа постапка од строга низа чекори $P$ можеме да направиме допустлива низа на точно $\prod_{i=1}^{n}2^{m_i-1}=2^{n-k}$ начини.

Од друга страна, секоја допустлива низа чекори може да се добие само од една строга низа (онаа која се добива кога сите чекори на било која сијалица $j$ за $j>n$ се заменат со чекор на сијалицата $j-n$), и тоа на само еден начин. Според тоа, вака е конструирано "$1\leftrightarrow 2^{n-k}$" пресликување меѓу строгите и допустливите низи чекори. Затоа $\frac{N}{M}=2^{n-k}$.

6. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник кај кој $\overline{BA}\ne\overline{BC}$. Нека $\omega_1$ и $\omega_2$ се впишаните кружници во триаголниците $ABC$ и $ADC$, соодветно. Да претпоставиме дека постои кружница $\omega$ која ја допира полуправата $BA$ по точката $A$ и полуправата $BC$ по точката $C$, а која истовремено ги допира и правите $AD$ и $CD$. Докажи дека надворешните заеднички тангенти на кружниците $\omega_1$ и $\omega_2$ се сечат на $\omega$.

**Решение.** Нека $\omega$ ги допира правите $AB,BC,CD,DA$ соодветно во точките $K,L,M,N$. Тогаш

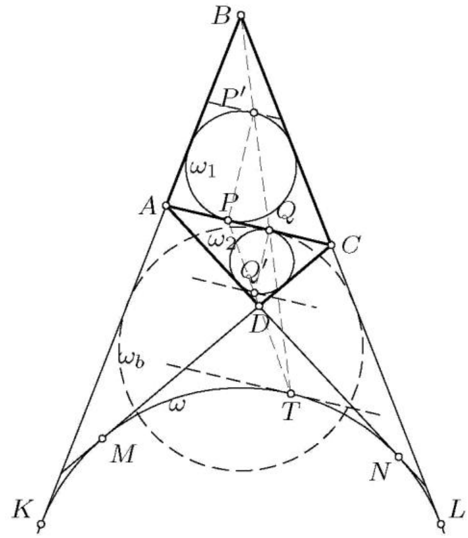
$$\begin{aligned}\overline{BA}+\overline{AD}&=\overline{BA}+\overline{AN}-\overline{DN}=\overline{BK}-\overline{DN}=\overline{BL}-\overline{DM}\\&=\overline{BC}+\overline{CM}-\overline{DM}=\overline{BC}+\overline{CD}.\end{aligned}$$

Тоа значи дека ако со $P$ и $Q$ ги означиме допирните точки соодветно на $\omega_1$ и $\omega_2$ со $AC$, тогаш важи

$$\overline{AP}=\frac{\overline{AC}+\overline{AB}-\overline{BC}}{2}=\frac{\overline{AC}+\overline{CD}-\overline{AD}}{2}=\overline{CQ}.$$

Со други зборови, припишаната кружница $\omega_b$ наспроти $B$ во триаголникот $ABC$ ја допира $AC$ точно во точката $Q$.

Разгледуваме хомотетија $H_B$ со центар во $B$ која кружницата $\omega_b$ ја пресликува во кружницата $\omega$ и да означиме $T = H_B(Q)$. Сега точката $P'$ дијаметрално спротивна на точката $P$ на $\omega_1$ лежи на правата $BQ$, а точката $Q'$ дијаметрално спротивна на точката $Q$ на $\omega_2$ лежи на правата $DP$ (Зошто?). Тангентите во $P'$, $Q'$ и $T$ соодветно на $\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega$ се прави паралелни со правата $AC$. Следува дека хомотетијата со центар $D$ која $\omega_2$ ја пресликува




во $\omega$ ја пресликува точката $Q'$ во точката $T$, па затоа точките $T, D, Q', P$ се колинеарни. Значи, правите $P'Q$ и $PQ'$ се сечат во точката $T$, па како е $PP' \parallel QQ'$, точката $T$ е центар на хомотетија која $\omega_1$ ја пресликува во $\omega_2$, од каде следува тврдењето на задачата.