

Macedonian Mathematical Society-Armaganka

## Mathematical Olympiads

Macedonian Mathematical Olympiads  
Balkan Mathematical Olympiads

Aleksa Malcheski.Ph.D  
Risto Malcheski, .Ph.D  
Slagjana Brsakoska.Ph.D  
Daniel Velinov, .Ph.D  
Sanja Atanasova, Ph.D  
Bojan Prangoski.Ph.D  
Pavel Dimovski.Ph.D  
Tomi Dimovski, Ph.D  
Methodi Glavche, Ph.D  
Vesna Andova.Ph.D  
Dimitar Trenevski  
Slavcho Misajleski, Ph.D  
Jasmina Angelevska, Ph.D.

Union of mathematicians of Macedonia-Armaganka  
Macedonia, Skopje 2021

**Izdava~:** Unija na matematičari na Makedonija-Armaganka

**Pretsedatel:** Aleksa Malcheski

**Adress:** Ul. 2. Br.107A

Vizbegovo, Butel, 1000, Skopje, Makedonija

CIP - Каталогизација во публикација  
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(079.1)

MATHEMATICAL olympiads : Macedonian mathematical olympiads :  
Balkan mathematical olympiads / [Aleksa Malčeski ... и др.]. -  
Skopje : Macedonian mathematical society-Armaganka, 2021. - 36 стр. : илустр.  
; 24 см. - (Library Olimpiads-Armaganka)

Автори: Aleksa Malčeski, Risto Malcheski, Slagjana Brsakoska, Daniel Velinov, Sanja Atanasova, Bojan  
Prangoski, Pavel Dimovski, Tomi Dimovski, Methodi Glavche, Vesna Andova, Dimitar Trenevski,  
Slavcho Misajleski, Jasmina Angeleska

ISBN 978-9989-646-48-5 (book)  
ISBN 978-9989-646-18-8 (ed.)

1. Malčeski, Aleksa [автор]  
a) Математика - Задачи од натпревари

COBISS.MK-ID 94225674

## Предговор

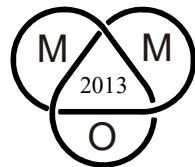
Во Македонија оваа година се одржаа сите етапи на натпревари во основните и средните училишта: училишен, регионален, републички и олимпијади.

После ригорозните селекции на истите се формираа екипите за БМО и ЈБМО кои во пријатна атмосфера се одржаа во Република Романија и Република Кипар соодветно.

По спроведувањето на ИМО селекциониот тест се формира екипата за ИМО 2011 која се одржува во Амстердам, Република Холандија.

Содржина на оваа книга се завршните математички натпревари во Македонија и на Балканот, заедно со решнијата.





20 - ta Makedonska  
matematika olimpiada

**20<sup>th</sup> MACEDONIAN  
MATHEMATICAL OLYMPIAD  
06.04.2012 FEIT - Skopje**

**1.** Solve the equation  $p^{2q} + q^{2p} = r$  in the set of prime numbers.

**2.** A total of  $2^n$  coins are distributed among several children. If one of the children has at least half of the coins, the coins are redistributed: coins are transferred from such a child to each of the other children in such a way that each of them gets as many coins as it had. In the case when one child possesses all the coins there is no possibility for redistribution. What is the greatest number of consecutive redistributions? (For example, if 32 coins are distributed among 6 children in the following way: 17, 2, 9, 1, 2, 1, then after one redistribution the children will have: 2, 4, 18, 2, 4, 2 coins, respectively; in the example, that number is 2).

Explain your answer!

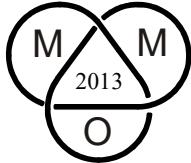
**3.** An acute-angled triangle  $ABC$  is given such that the angle at the vertex  $C$  is the biggest. Let  $E$  and  $G$  be the points of intersection of the height drawn from  $A$  to  $BC$  with the circumscribed circle of the triangle  $ABC$  and with  $BC$  respectively, and the center  $O$  of the circumscribed circle lies on the perpendicular drawn from  $A$  to  $BE$ . The points  $M$  and  $F$  are the feet of the heights drawn from  $E$  to  $AC$  and  $AB$  respectively. Prove that  $P_{MFE} < P_{FBEG}$ .

**4.** Let  $x, y$  and  $z$  be positive real numbers such that  $x^4 + y^4 + z^4 = 3$ . Prove that

$$\frac{9}{x^2 + y^4 + z^6} + \frac{9}{x^4 + y^6 + z^2} + \frac{9}{x^6 + y^2 + z^4} \leq x^6 + y^6 + z^6 + 6.$$

When does equality hold?

**5.** An arbitrary triangle  $ABC$  is given together with two lines  $p$  and  $q$  which are not parallel to each other and are not perpendicular to any of the sides of the triangle. We denote the perpendiculars through  $A$ ,  $B$  and  $C$  to the line  $p$  by  $p_A$ ,  $p_B$  and  $p_C$  respectively, and the perpendiculars to  $q$  by  $q_A$ ,  $q_B$  and  $q_C$  respectively. Let us denote the points of intersection of the lines  $p_A$ ,  $q_A$ ,  $p_B$ ,  $q_B$ ,  $p_C$  and  $q_C$  with  $q_B$ ,  $p_B$ ,  $q_C$ ,  $p_C$ ,  $q_A$  and  $p_A$  respectively by  $K$ ,  $L$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $N$  and  $M$ . Prove that the lines  $KL$ ,  $MN$  and  $PQ$  intersect at one point.



20-t a Makedonska  
matematika olimpijada

## 20-th MACEDONIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD 06.04.2012 FEIT - Skopje

- 1.** Solve the equation  $p^{2q} + q^{2p} = r$  in the set of prime numbers.

**Solution.** It is clear that  $r > 2$ , from where  $r$  must be an odd prime number. One of the numbers  $p$  or  $q$  must be 2, and the other must be an odd prime number. Without loss of generality, let  $q=2$  and  $p$  be odd. But then the equation is of the form  $p^4 + 2^{2p} = r$  i.e.  $p^4 + 4 \cdot 2^{4k} = r$  where  $p=2k+1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . But then

$$\begin{aligned} p^4 + 4 \cdot 2^{4k} &= p^4 + 4 \cdot 2^{4k} + 4 \cdot 2^{2k} p^2 - 4 \cdot 2^{2k} p^2 = (p^2 + 2 \cdot 2^{2k})^2 - 4 \cdot 2^{2k} p^2 = \\ &= (p^2 + 2 \cdot 2^{2k} + 2 \cdot 2^k p)(p^2 + 2 \cdot 2^{2k} - 2 \cdot 2^k p) = \\ &= (p^2 + 2 \cdot 2^{2k} + 2 \cdot 2^k p)((p - 2^k)^2 + 2^{2k}) \end{aligned}$$

That means that the number  $p^4 + 2^{2p}$  is never prime, which means that the equation has no solution in the set of prime numbers.

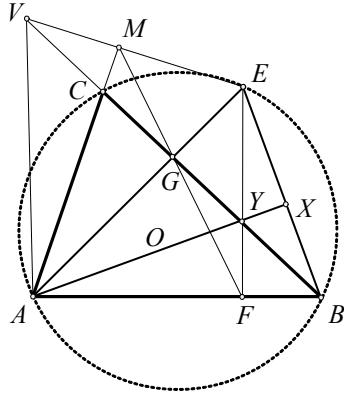
- 2.** A total of  $2^n$  coins are distributed among several children. If one of the children has at least half of the coins, the coins are redistributed: then coins are transferred from that child to each of the other children in such a way that each of them gets as many coins as it had. In the case when one child possesses all the coins there is no possibility for redistribution. What is the greatest number of consecutive redistributions? (For example, if 32 coins are distributed among 6 children in the following way: 17, 2, 9, 1, 2, 1, then after one redistribution the children will have: 2, 4, 18, 2, 4, 2 coins, respectively; in the example, that number is 2). Explain your answer!

**Solution.** At most  $n$  consecutive redistributions. We will start with an example showing that  $n$  consecutive redistributions are possible. Let  $2^n$  coins be distributed among 3 children initially as follows: 1,  $2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2$ , 1. The successive redistributions (a total of  $n$ ) will be:

$$\begin{aligned} &2^1, 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^2, 2^1 \\ &2^2, 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^3, 2^2 \\ &\dots\dots\dots \\ &2^{n-2}, 2^{n-1}, 2^{n-2} \\ &2^{n-1}, 0, 2^{n-1} \\ &0, 0, 2^n \end{aligned}$$

Let us show that  $n$  is the maximal number of consecutive redistributions. We start by assuming that there is an initial distribution for which there are at least  $n+1$  possible redistributions and we seek contradiction: let us note that after one redistribution the number of coins that each child has is divisible by 2 (each child to whom coins have been added has a doubled number of coins which is an even number, and the child from whom coins have been taken has again an even number of coins since there is a total of  $2^n$  coins i.e. an even number of them). Analogously after the second redistribution each child has a number of coins that is divisible by 4, and so on, until the  $n$ -th redistribution in which the number of coins each child has is divisible by  $2^n$ ; taking into account that the total number of coins is constant and equals  $2^n$ , the only possible distribution (in some order) is  $2^n, 0, 0, \dots, 0$ . But then there cannot be a next redistribution. Contradiction!

3. An acute-angled triangle  $ABC$  is given such that the angle at the vertex  $C$  is the biggest. Let  $E$  and  $G$  be the points of intersection of the height drawn from  $A$  to  $BC$  with the circumscribed circle of the triangle  $ABC$  and with  $BC$  respectively, and the center  $O$  of the circumscribed circle lies on the perpendicular drawn from  $A$  to  $BE$ . The points  $M$  and  $F$  are the feet of the heights drawn from  $E$  to  $AC$  and  $AB$  respectively. Prove that  $P_{MFE} < P_{FBEG}$ .



**Solution.** Let us denote the intersection of  $EM$  and  $BC$  by  $V$  (the intersection will always exist since the angle at  $C$  is acute). From Simson's theorem it follows that the points  $M$ ,  $G$  and  $F$  are collinear. Let us note that  $\angle EAC = \angle EBC$  since they intercept the same arc. Also,  $\angle CAE = \angle BAO$ . The quadrilateral  $FBEG$  is inscribed. Therefore we get  $\angle GBE = \angle GFE$ . Also,  $\angle GAO = \angle GBE$  since they are angles with perpendicular rays. We get  $\angle CAE = \angle GAO = \angle BAO$ . Therefore we get that  $AO$  is a bisector of the angle and a height in the triangle  $ABE$ . It follows that the triangle  $ABE$  is isosceles from where  $GF$  is parallel to  $BE$ . The lines  $AO$ ,  $BG$  and  $EF$  intersect at one point ( $EF$  and  $BG$  are heights in the triangle  $ABE$ ). Let us note that  $AGMV$  is inscribed. We have  $\angle MVG = \angle GAM$ . We also get  $\angle MAV = \angle VGM = \angle FGB$ . Therefore  $AM$  is a height and a bisector of the angle in the triangle  $EAV$ . It follows that the triangle  $EAV$  is isosceles and  $M$  is a midpoint of the side  $VE$ . Also  $\triangle AVE \cong \triangle AEB$ . It is clear that  $\triangle EGV \cong \triangle EGB$  and since both of them are right-angled,  $P_{GEM} = \frac{1}{2}P_{GEB}$ . On the other hand  $P_{GFE} = P_{GFB}$  from where we get the required inequality.

4. Let  $x, y$  and  $z$  be positive real numbers such that  $x^4 + y^4 + z^4 = 3$ . Prove that

$$\frac{9}{x^2 + y^4 + z^6} + \frac{9}{x^4 + y^6 + z^2} + \frac{9}{x^6 + y^2 + z^4} \leq x^6 + y^6 + z^6 + 6.$$

When does equality hold?

**Solution.** If we use the Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz inequality for the positive numbers  $(x, y^2, z^3)$  and  $(x^3, y^2, z)$  we get

$$\begin{aligned} (x^4 + y^4 + z^4)^2 &\leq (x^2 + y^4 + z^6)(x^6 + y^4 + z^2) \text{ i.e.} \\ \frac{1}{x^2 + y^4 + z^6} &\leq \frac{x^6 + y^4 + z^2}{9}. \end{aligned} \tag{1}$$

Analogously, using the Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz inequality for the positive numbers  $(x^2, y^3, z)$  and  $(x^3, y, z^2)$ , and also for the positive numbers  $(x^3, y, z^2)$  and  $(x, y^3, z^2)$ , we get

$$\frac{1}{x^4 + y^6 + z^2} \leq \frac{x^4 + y^2 + z^6}{9}, \tag{2}$$

i.e.

$$\frac{1}{x^6 + y^2 + z^4} \leq \frac{x^2 + y^6 + z^4}{9}. \tag{3}$$

Now, by adding the inequalities (1), (2) and (3) we get the inequality

$$\frac{1}{x^2+y^4+z^6} + \frac{1}{x^4+y^6+z^2} + \frac{1}{x^6+y^2+z^4} \leq \frac{x^6+y^6+z^6+x^4+y^4+z^4+x^2+y^2+z^2}{9}. \quad (4)$$

From the inequality between the arithmetic and quadratic mean for the positive numbers  $x^2, y^2$  and  $z^2$  we get that  $x^2+y^2+z^2 \leq 3\sqrt{\frac{x^4+y^4+z^4}{3}} = 3$ , so if we substitute in (4) we get the required inequality.

Equality in (1) holds if and only if  $\frac{x}{x^3} = \frac{y^2}{y^2} = \frac{z^3}{z}$  i.e.  $x=z=1$  and from  $x^4+y^4+z^4=3$  it follows that  $y=1$ .

**5.** An arbitrary triangle  $ABC$  is given together with two lines  $p$  and  $q$  which are not parallel to each other and are not perpendicular to any of the sides of the triangle. We denote the perpendiculars through  $A, B$  and  $C$  to the line  $p$  by  $p_A, p_B$  and  $p_C$  respectively, and the perpendiculars to  $q$  by  $q_A, q_B$  and  $q_C$  respectively. Let us denote the points of intersection of the lines  $p_A, q_A, p_B, q_B, p_C$  and  $q_C$  with  $q_B, p_B, q_C, p_C, q_A$  and  $p_A$  respectively by  $K, L, P, Q, N$  and  $M$ . Prove that the lines  $KL, MN$  and  $PQ$  intersect at one point.

**Solution.** Without loss of generality we can assume that  $p_B$  is between  $p_A$  and  $p_C$ . The first case is if  $q_A$  is between  $q_B$  and  $q_C$  as shown in the picture, obviously  $KL$  intersects  $PN$ . Analogously, if  $q_C$  is between  $q_A$  and  $q_B$  the case is symmetrical to the one are considering. The second case, if  $q_B$  is between  $q_A$  and  $q_C$ , then  $MQ$  and  $PN$  are not parallel, so  $KL$  intersects at least one of them and the two cases are equivalent. According to this we can assume that  $KL$  intersects  $PN$ . The line  $MN$  cannot be parallel to  $p_B$ , since in that case  $p$  is perpendicular to  $AC$  and analogously  $PQ$  is not parallel to  $q_A$ .

Let  $X, Y$  and  $Z$  be the points of intersection of the lines  $PN, q_A$  and  $p_B$  with  $KL, PQ$  and  $MN$  respectively. From the similarity of the triangles  $LNZ$  and  $PMZ$  we get

$$\frac{\overline{LZ}}{\overline{PZ}} = \frac{\overline{LN}}{\overline{PM}}. \quad (1)$$

Similarly from the similarity of  $LPY$  and  $NQY$  we get

$$\frac{\overline{NY}}{\overline{LY}} = \frac{\overline{NQ}}{\overline{LP}} \quad (2)$$

If  $KL$  does not pass through  $C$ , let it intersect  $NC$  and  $MC$  in  $U$  and  $V$  respectively. From the triangle  $CPN$  and Menelaus' theorem for the line  $KL$  we get  $\frac{\overline{PX}}{\overline{NX}} \frac{\overline{NU}}{\overline{UC}} \frac{\overline{CV}}{\overline{VP}} = -1$ , i.e.

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{NX}} = \frac{\overline{UC}}{\overline{NU}} \frac{\overline{VP}}{\overline{CV}} \quad (3).$$

From the similarity of the triangles  $KQU$

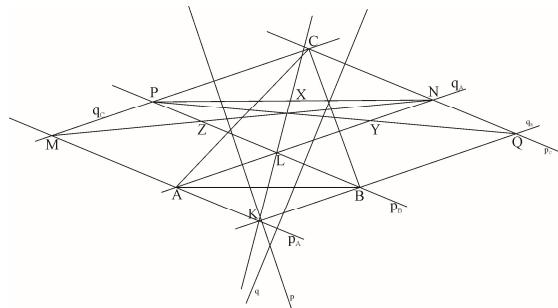
and  $LNU$  we get  $\frac{\overline{UQ}}{\overline{UN}} = \frac{\overline{KQ}}{\overline{LN}}$ , from where

$$1 + \frac{\overline{NQ}}{\overline{UN}} = 1 + \frac{\overline{KB}}{\overline{LN}}, \text{ so } \overline{UN} = \frac{\overline{LNNQ}}{\overline{KB}} \text{ and } \overline{UC} = \overline{UN} + \overline{NC} = \frac{\overline{LNNQ} + \overline{NCKB}}{\overline{KB}} \text{ and from here}$$

$$\frac{\overline{NU}}{\overline{UC}} = \frac{\frac{\overline{LNNQ}}{\overline{KB}}}{\frac{\overline{LNNQ} + \overline{NCKB}}{\overline{KB}}} = \frac{-\overline{LNNQ}}{\overline{LNNQ} + \overline{NCKB}}. \quad (4)$$

Analogously, for the similar triangles  $KMV$  and  $LPV$  we get

$$\frac{\overline{CV}}{\overline{VP}} = \frac{\overline{LPPM} + \overline{PCKA}}{-\overline{LPPM}}. \quad (5)$$



If we substitute (4) and (5) in (3) we get:

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{NX}} = \frac{\overline{UC} \overline{VP}}{\overline{NU} \overline{CV}} = \frac{\overline{LNNQ} + \overline{NCKB}}{-\overline{LN} \overline{NQ}} \frac{-\overline{LPPM}}{\overline{LPPM} + \overline{PCKA}} = \frac{\overline{LNNQ} + \overline{NCKB}}{\overline{LPPM} + \overline{PCKA}} \frac{\overline{LPPM}}{\overline{LN} \overline{NQ}} = -\frac{\overline{LPPM}}{\overline{LN} \overline{NQ}} \quad (6)$$

If we now substitute (1), (2) and (6) in Ceva's equality for the triangle  $LNP$  and the lines  $LK$ ,  $NM$  and  $PQ$  we get:

$$\frac{\overline{LZ} \overline{PX} \overline{NY}}{\overline{PZ} \overline{NX} \overline{LY}} = \frac{\overline{LN} \overline{NQ}}{\overline{PM} \overline{LP}} - \frac{\overline{LPPM}}{\overline{LN} \overline{NQ}} = -1$$

If  $KL$  passes through  $C$ , then  $X$  is the midpoint of  $\overline{PN}$  and

$$\frac{\overline{LN}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{LB}}. \quad (7)$$

If we now substitute (1), (2) and (7) in Ceva's equality for the triangle  $LNP$  and the lines  $LK$ ,  $NM$  and  $PQ$  we get:

$$\frac{\overline{LZ} \overline{PX} \overline{NY}}{\overline{PZ} \overline{NX} \overline{LY}} = -\frac{\overline{LN} \overline{NQ}}{\overline{PM} \overline{LP}} = -\frac{\overline{NC} \overline{NQ}}{\overline{LB} \overline{LP}} = -1.$$

From the converse of Ceva's theorem, the lines  $KL$ ,  $MN$  and  $PQ$  intersect in one point or are parallel. Without loss of generality we can assume that  $p_B$  is between  $p_A$  and  $p_C$ . If  $q_B$  is not between  $q_A$  and  $q_C$  as shown in the picture it is obvious that the lines cannot be parallel. If  $q_B$  is between  $q_A$  and  $q_C$ , then in order for the lines to be parallel it is required that  $\frac{\overline{AK}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{AN}}$ , but then  $\frac{\overline{AK}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{KB}}{\overline{MC}}$ , therefore  $AB$  is parallel to  $AC$ , which is impossible since  $ABC$  is a triangle.

## Team Selection Test for IMO 2013

### First day 08.04.2013

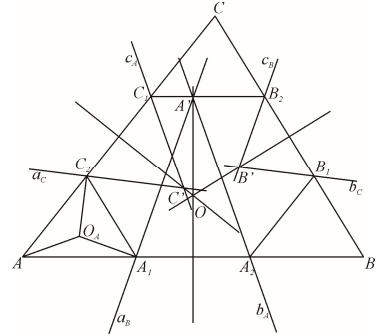
**1.** An acute-angled triangle  $ABC$  is given. The points  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$  and  $C_2$ , lie on its sides in such a way that  $\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2B} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ ,  $\overline{BB_1} = \overline{B_1B_2} = \overline{B_2C} = \frac{1}{3}\overline{BC}$  and  $\overline{CC_1} = \overline{C_1C_2} = \overline{C_2A} = \frac{1}{3}\overline{CA}$ . Let  $k_A$ ,  $k_B$  and  $k_C$  be the circumscribed circles of the triangles  $AA_1C_2$ ,  $BB_1A_2$  and  $CC_1B_2$  respectively,  $a_B$  and  $a_C$  be the tangents of  $k_A$  in  $A_1$  and  $C_2$ ,  $b_C$  and  $b_A$  be the tangents of  $k_B$  in  $B_1$  and  $A_2$  and  $c_A$  and  $c_B$  be the tangents of  $k_C$  in  $C_1$  and  $B_2$ . Prove that the perpendiculars drawn from the intersection of  $a_B$  and  $b_A$  to  $AB$ , the intersection of  $b_C$  and  $c_B$  to  $BC$  and the intersection of  $c_A$  and  $a_C$  to  $CA$  intersect in one point.

**Solution.** Let us denote the intersections of  $a_B$ ,  $b_C$  and  $c_A$  with  $b_A$ ,  $c_B$  and  $a_C$  respectively by  $A'$ ,  $B'$  and  $C'$ . The triangle  $AA_1C_2$  is similar to  $ABC$ , since they have a common angle and their sides are at a ratio 1:3. Let  $O_A$  be the center of the circumscribed circle around the triangle  $AA_1C_2$ . Then:

$$\angle O_A A_1 A = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A O_A A_1) = 90^\circ - \angle AC_2 A_1 = 90^\circ - \gamma$$

Since  $a_B$  is perpendicular to  $O_A A_1$  it follows that the angle between  $a_B$  and  $AB$  equals

$$180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \gamma) = \gamma.$$



Analogously, the angle between  $b_A$  and  $AB$  equals  $\gamma$ , so that the triangle  $A_1A_2A'$  is isosceles with base  $A_1A_2$ , that is, the perpendicular to  $AB$  through  $C'$  passes through the midpoint of  $A_1A_2$ , which is also the midpoint of  $AB$ , (4) so that the perpendicular passes through the center of the circumscribed circle around the triangle  $ABC$ . From symmetry reasons, all the three perpendiculars pass through the center of the circumscribed circle, that is, they pass through a common point.

**2. a)** Let  $S(n)$  be the sum of the digits of the number  $n$ . After the comma, we write the numbers  $S(1), S(2), \dots$  one after the other. Prove that the obtained number is irrational.

**6)** Let  $P(n)$  be the product of the digits of the number  $n$ . After the comma we write the numbers  $P(1), P(2), \dots$  one after the other. Prove that the obtained number is irrational.

**Решение.** a) The number  $0, S(1)S(2)\dots$  is irrational if it is non-periodic. Let's assume that the number is periodic and let  $d$  be the length of its period. It is clear that the period has to contain digits different from 0 since, if this wasn't the case, the number would be of the form  $0, S(1)S(2)\dots S(k)$  and there always exists a number bigger than  $k$  whose sum of digits is different from 0. (for example  $10^m$  for sufficiently big  $m$  is greater than  $k$  and the sum of its digits is 1). However, there exists a natural number which is big enough whose sum of its digits ends in  $2d$  zeroes. (the sum of digits of 11...11 with  $10^{2d}$  ones is  $10^{2d}$ ). Then the period of length  $d$  has to appear completely in the number  $S(10^{2d})$ , which implies that it has to consist only of zeroes.

6) The number  $0, P(1)P(2)\dots$  is irrational if it is nonperiodic. Let us assume that the number is periodic and let  $d$  be the length of its period. It is clear that the period has to contain digits different from 0 since, if this wasn't the case, the number would be of the form  $0, P(1)P(2)\dots P(k)$  and there always exists a number bigger than  $k$  whose product of digits is different from 0. (for example 11...1 with sufficiently many ones is bigger than  $k$  and the product of its digits is 1). The number of the type  $\underbrace{22\dots 2}_{m} \underbrace{55\dots 5}_m$  can be

chosen arbitrarily big and it is clear that the product of the digits of those numbers is  $10^m$ . If we choose  $m > 2d$ , then the period must completely appear in the number  $S(\underbrace{22\dots 2}_{m} \underbrace{55\dots 5}_m)$  which implies that it has to consist only of zeroes.

**3.** We denote the set of all nonzero integers and the set of all nonnegative integers by  $\mathbb{Z}^*$  and  $\mathbb{N}_0$ , respectively. Find all functions  $f: \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{N}_0$  for which the following two conditions hold:

- (1) for each  $a, b \in \mathbb{Z}^*$  such that  $a+b \in \mathbb{Z}^*$  it holds that  $f(a+b) \geq \min\{f(a), f(b)\}$ ;
- (2) for each  $a, b \in \mathbb{Z}^*$  it holds that  $f(ab) = f(a) + f(b)$ .

**Solution.** One trivial solution is the constant function  $f \equiv 0$ . Let  $f$  be a nontrivial function for which the conditions (1) and (2) hold. We will show that there exists a natural number  $c$  and a prime number  $p$  for which it holds that  $f(a) = cv_p(a)$  for each  $a \in \mathbb{Z}^*$ , where  $v_p(a)$  is the exponent of  $p$  in the canonical factorization of  $a$ : let us note at first that  $f(1) = f(-1) = 0$  (proof:

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1), \quad f(1) = f((-1) \cdot (-1)) = f(-1) + f(-1);$$

from this and from (2) it follows that there exists a prime number  $p$  for which  $f(p) \neq 0$ ; for  $c := f(p)$  we will show that  $f(a) = cv_p(a)$  holds for every  $a \in \mathbb{Z}^*$ ; namely, for each prime  $q \neq p$  there exists nonzero integers  $\alpha, \beta$  for which  $1 = ap + \beta q$ , so that the inequality  $0 = f(ap + \beta q) \geq \min\{f(ap), f(\beta q)\}$  holds; from

$$f(ap) = f(\alpha) + f(p) \geq f(p) = c \neq 0$$

it follows that  $f(\beta q)=0$  and  $f(q)=0$ ; let  $a=\pm p^k q^\beta r^\gamma \dots$  be the canonical factorization of  $a$ ; then

$$f(a)=f(\pm p^k)+f(q^\beta)+f(r^\gamma)+\dots=f(\pm 1)+f(p^k)=kf(p)=cv_p(a)$$

It remains to note that each such function satisfies the conditions (1) and (2), and therefore it represents a nontrivial solution to the given problem.

## Team Selection Test for IMO 2013 Second day, 09.04.2013

- 1.** Let  $a>0, b>0, c>0$  and  $a+b+c=1$ . Prove the inequality

$$\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2} + \frac{b^3+c^3}{b+c} + \frac{2a^2+b^2+2c^2}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

**Solution.** From  $1=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$  we get

$$ab+bc+ca+\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=\frac{1}{2}.$$

We use the inequality  $(a^{n-1}-b^{n-1})(a-b)\geq 0$  for  $n\geq 1$  with equality holding when  $a=b$ . The last inequality is equivalent to the inequality  $a^n+b^n\geq ab(a^{n-2}+b^{n-2})$  when  $n\geq 2$ . In the case at hand we have:

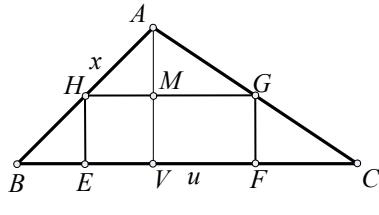
$\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}\geq ab$ ,  $\frac{b^3+c^3}{b+c}\geq bc$  and  $\frac{c^2+a^2}{2}\geq ca$ . By adding the last three inequalities we get

$$\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2} + \frac{b^3+c^3}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{2} \geq ab+bc+ac \text{ from where}$$

$$\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2} + \frac{b^3+c^3}{b+c} + c^2+a^2 + \frac{b^2}{2} \geq ab+bc+ac + \frac{c^2+a^2+b^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

It is clear that equality holds when  $a=b=c=\frac{1}{3}$ .

- 2.** We say that a rectangle is inscribed in a triangle if two of the rectangle's neighbouring vertices lie on one side of the triangle, and the other two lie on the remaining two sides of the triangle. Assume that the lengths of the sides of the triangle  $ABC$  are known. What is the smallest possible length of the diagonal of an inscribed rectangle in this triangle?



**Solution.** Let the quadrilateral  $EFGH$  be inscribed in the triangle  $ABC$  so that  $E$  and  $F$  lie on  $BC$  and  $G$  lies on  $AC$  and  $H$  lies on  $AB$ . Let us denote the side-lengths of the triangle  $ABC$  by  $a$ ,  $b$  and  $c$  and let  $h$  denote the length of the height drawn from  $A$  to  $BC$ . We put  $\overline{AH}=x$ ,  $\overline{EF}=u$  and  $\overline{FG}=v$ .

From  $\Delta AHG \approx \Delta ABC$  we have  $u=\frac{ax}{c}$ , from  $\Delta BEH \approx \Delta BVA$  we get  $v=\frac{h(c-x)}{c}$ . If  $l$  denotes the length of the diagonal of  $EFGH$ , we get  $l^2=\frac{a^2x^2}{c^2}+\frac{h^2(c-x)^2}{c^2}$ . The smallest value of the parabola  $f(x)=\frac{a^2x^2}{c^2}+\frac{h^2(c-x)^2}{c^2}$  is  $\frac{a^2h^2}{a^2+h^2}$  and it is attained when  $x=\frac{h^2c}{a^2+h^2}$ . Let us note that  $\frac{a^2h^2}{a^2+h^2}=\frac{4P^2}{a^2+4P^2}$ , where  $P$  is the area of the triangle. Now if we do the same when the rectangle has

two neighbouring vertices lying on the side  $AC$ , we get  $\frac{4P^2}{b^2 + \frac{4P^2}{b^2}}$  for the smallest possible length of the diagonal. We have  $a^2 + \frac{4P^2}{a^2} - b^2 - \frac{4P^2}{b^2} = (a^2 - b^2) \left(1 - \frac{4P^2}{a^2 b^2}\right)$ .

Since  $ab \geq 2P$  the last expression is greater or equal to 0 if and only if  $a \geq b$ . In other words, the smallest value of  $l$  is obtained when the rectangle has two neighbouring vertices lying on the longest side of the triangle. Let  $a$  be the longest side. We already saw that the smallest value of  $l$  is  $\frac{2P}{\sqrt{a^2 + \frac{4P^2}{a^2}}}$  and it is obtained when  $\overline{AH} = x = \frac{h^2 c}{a^2 + h^2} = \frac{4P^2 c}{a^4 + 4P^2}$ . Let us note that the area is known and it can be expressed through the side-lengths of the triangle by e.g. Heron's formula.

- 3.** Let  $a$  and  $n$  be integers. We define  $a_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$ . Prove that if  $a^p \equiv 1 \pmod{p}$  for every prime divisor  $p$  of  $n_2 - n_1$ , then the number  $\frac{a_{n_2} - a_{n_1}}{n_2 - n_1}$  is an integer.

**Solution.** Lemma. Let  $a$  and  $n$  be integers such that  $a \equiv 1 \pmod{p}$  for each prime  $p \mid n$  and  $a_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$ . Then  $n \mid a_n$ .

Proof of the lemma. Let  $p^r$  be the largest power of the prime number  $p$  such that  $p^r \mid n$ . We will prove the equality

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \left(1 + a^{p^r} + a^{2p^r} + \dots + a^{p^r(\frac{n}{p^r}-1)}\right) \prod_{k=1}^r \left(1 + a^{p^{k-1}} + a^{2p^{k-1}} + \dots + a^{(p-1)p^{k-1}}\right)$$

for each integer  $a$ . If  $a=1$  the left-hand side is  $n$  and the right-hand side is  $\frac{n}{p^r} \cdot p^r = n$  (one  $p$  for each term in the product). Let  $a \neq 1$ . If we multiply the left-hand side and right-hand side by  $a-1$  from the right we get

$$\begin{aligned} & (a-1)(1+a+\dots+a^{p-1})(1+a^p+a^{2p}+\dots+a^{(p-1)p}) \dots \left(1+a^{2p^r}+\dots+a^{p^r(\frac{n}{p^r}-1)}\right) \\ &= (a^p-1)(1+a^p+a^{2p}+\dots+a^{(p-1)p}) \dots \left(1+a^{2p^r}+\dots+a^{p^r(\frac{n}{p^r}-1)}\right) \\ &= (a^{p^2}-1)(1+a^{p^2}+\dots+a^{(p-1)p^2}) \dots \left(1+a^{2p^r}+\dots+a^{p^r(\frac{n}{p^r}-1)}\right) = \\ &= (a^{p^r}-1) \left(1+a^{2p^r}+\dots+a^{p^r(\frac{n}{p^r}-1)}\right) = a^n - 1 \end{aligned}$$

Each expression in the product is divisible by  $p$  since

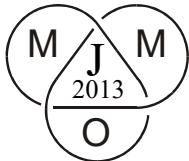
$$1 + a^{p^{k-1}} + a^{2p^{k-1}} + \dots + a^{(p-1)p^{k-1}} = (a^{p^{k-1}} - 1) + (a^{2p^{k-1}} - 1) + \dots + (a^{(p-1)p^{k-1}} - 1) + p$$

each of the expressions in brackets is divisible by  $p$ .

Without loss of generality we can assume that  $n_1 < n_2$ . It is clear that

$$\frac{a_{n_2} - a_{n_1}}{n_2 - n_1} = \frac{1+a+\dots+a^{n_2-1}-1-a-\dots-a^{n_1-1}}{n_2 - n_1} = \frac{a^{n_1}(1+a+\dots+a^{n_2-n_1-1})}{n_2 - n_1}.$$

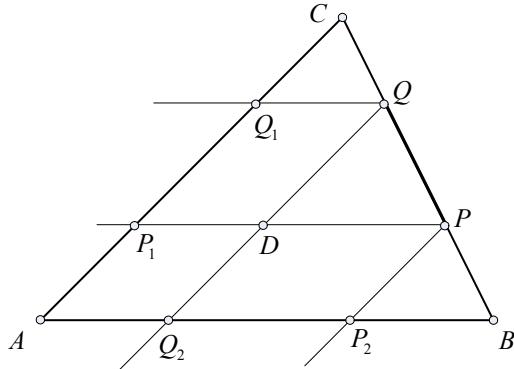
Using the lemma we get  $(n_2 - n_1) | a_{n_2 - n_1}$  from where we get that the number  $\frac{a_{n_2} - a_{n_1}}{n_2 - n_1}$  is a natural number.



XVII Junior Macedonian Mathematical Olympiad 2013  
Faculty of Natural Sciences-Skopje  
25.05.2013, Skopje

17-ta JMMO

- 1.** Let  $x$  be a real number such that the numbers  $x^3$  and  $x^2 + x$  are rational. Prove that  $x$  is rational.



**2.** A triangle  $\Delta ABC$  is given together with a segment  $PQ$  of length  $t$  on the segment  $BC$ , so that  $P$  is between  $B$  and  $Q$  and  $Q$  is between  $P$  and  $C$ . We draw parallel lines from the point  $P$  to  $AB$  and  $AC$  which intersect  $AC$  and  $AB$  in  $P_1$  and  $P_2$ , respectively. We draw parallel lines from the point  $Q$  to  $AB$  and  $AC$  which intersect  $AC$  and  $AB$  in  $Q_1$  and  $Q_2$ , respectively. Prove that the sum of the areas of  $PQ_1P_1$  and  $PQ_2P_2$  doesn't depend on the position of  $PQ$  on  $BC$ .

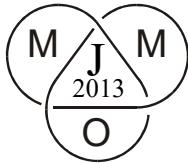
- 3.** Let  $a, b$  and  $c$  be positive real numbers such that  $abc=1$ . Prove that the following inequality holds  $\frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq 3$ .

When does equality hold?

- 4.** A regular hexagon with side-length 1 is given. Inside the hexagon  $m$  points are given so that no three of them are collinear. The hexagon is split into triangles, so that each of the given  $m$  points and each vertex of the hexagon is a vertex of one such triangle. The triangles into which the hexagon is split have no common interior point. Prove that, among them, there exists one triangle whose area is not greater than  $\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}$ .

- 5.** Find all numbers  $p$ ,  $q$  and  $r$ , such that  $p$  and  $r$  are prime,  $q$  is a positive integer so that they satisfy the equation:

$$(p+q+r)^2 = 2p^2 + 2q^2 + r^2.$$

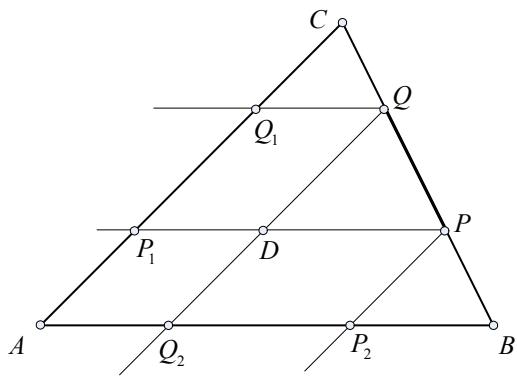


XVII Junior Macedonian Mathematical Olympiad 2013  
Faculty of Natural Sciences-Skopje  
25.05.2013, Skopje

17 - t a JMMO

- 1.** Let  $x$  be a real number such that the numbers  $x^3$  and  $x^2+x$  are rational. Prove that  $x$  is rational.

**Solution.** Let  $a=x^3, b=x^2+x$ . Then  $a=x^3+x^2-x^2-x+x=xb-b+x$  or  $a=x(b+1)-b$ . It is clear that  $b \neq -1$ , since, if this wasn't the case,  $x^2+x=-1$  or  $(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}=-1$ . Then  $(x+\frac{1}{2})^2=-\frac{3}{4}$  which is impossible. We get that  $x=\frac{a+b}{b+1}$  which is a rational number since the numbers  $a$  and  $b$  are rational.



- 2.** A triangle  $\Delta ABC$  is given together with a segment  $PQ$  of length  $t$  on the segment  $BC$ , so that  $P$  is between  $B$  and  $Q$  and  $Q$  is between  $P$  and  $C$ . We draw parallel lines from the point  $P$  to  $AB$  and  $AC$  which intersect  $AC$  and  $AB$  in  $P_1$  and  $P_2$ , respectively. We draw parallel lines from the point  $Q$  to  $AB$  and  $AC$  which intersect  $AC$  and  $AB$  in  $Q_1$  and  $Q_2$ , respectively. Prove that the sum of the areas of  $PQQ_1P_1$  and  $PQQ_2P_2$  doesn't depend on the positoin of  $PQ$  on  $BC$ .

**Solution.** Let  $D$  be the intersection of  $PP_1$  and  $QQ_2$ . Let us note that  $P_PDP_2P_2 = 2P_{\Delta ADP}$  and  $P_QDP_1Q_1 = 2P_{\Delta ADQ}$ . So now we have:

$$\begin{aligned} P_PQQ_2P_2 + P_P1Q_1Q = P_PDQ_2P_2 + P_QDP_1Q_1 + 2P_{\Delta PQD} &= 2P_{\Delta ADP} + 2P_{\Delta ADQ} + 2P_{\Delta PQD} = \\ &= 2P_{\Delta APQ} = \overline{PQ} \cdot h_a \end{aligned}$$

- 3.** Let  $a, b$  and  $c$  be positive real numbers such that  $abc=1$ . Prove that the following inequality holds:  $\frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq 3$ .

When does equality hold?

**Solution.** Since  $(1-\sqrt{bc})^2 \geq 0$  it follows that  $1+bc \geq 2\sqrt{bc}$  i.e.  $\frac{1}{2\sqrt{bc}} \geq \frac{1}{1+bc}$ . We get that

$$\frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{1}{1+a} = \frac{1}{2\sqrt{bc}} + \frac{1}{1+a} \geq \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+a} = \frac{1}{1+\frac{1}{a}} + \frac{1}{1+a} = 1 \dots (1)$$

In the same way we prove that

$$\frac{\sqrt{b}}{2} + \frac{1}{1+b} \geq 1 \dots (2) \quad \text{and} \quad \frac{\sqrt{c}}{2} + \frac{1}{1+c} \geq 1 \dots (3).$$

By adding (1),(2) and (3) we get the required inequality. Let us note that equality holds if and only if  $1=\sqrt{bc}$  i.e.  $a=1$ . In the same way we get  $b=1$  and  $c=1$ .

**4.** A regular hexagon with side-length 1 is given. Inside the hexagon  $m$  points are given so that no three of them are collinear. The hexagon is split into triangles, which we call splitting triangles, so that each of the given  $m$  points and each vertex of the hexagon is a vertex of one splitting triangle. The splitting triangles have no common interior point. Prove that there exists one splitting triangle whose area is not greater than  $\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}$ .

**Solution.** First we determine the total number of splitting triangles into which the hexagon is split. Let  $A$  be one arbitrary point of the interior  $m$  points. The sum of all angles at the point  $A$  is  $360^\circ$  (the sum of all angles at  $A$  of all triangles having that point as a vertex). On the other hand, the sum of all angles at a vertex of the hexagon is  $120^\circ$ . Since the sum of angles in every triangle is  $180^\circ$ , the number of splitting triangles is:  $\frac{m \cdot 360^\circ + 6 \cdot 120^\circ}{180^\circ} = 2m + 4$ .

Let us assume the contrary to the statement, i.e. that the area of each of the splitting triangles is greater than  $\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}$ . Then the sum of the areas of all the splitting triangles is greater than  $(2m+4) \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ , which is impossible since the area of the given hexagon is  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

**5.** Find all numbers  $p$ ,  $q$  and  $r$ , s.t.  $p$  and  $r$  are prime,  $q$  is a positive integer so that they satisfy the equation:

$$(p+q+r)^2 = 2p^2 + 2q^2 + r^2.$$

**Solution.** After simplifying the equation we get  $2r(p+q) = (p-q)^2$ . Since  $r$  is prime, it follows that  $r$  is a divisor of  $p-q$ , so that  $r^2$  is a divisor of the right-hand side of the last equality. This implies that  $r$  is a divisor of  $2(p+q)$ . If  $r > 2$ , then  $r$  is a divisor of  $(p+q)$ , so that  $r$  has to be a divisor of both  $p$  and  $q$ , but since  $p$  is prime, that is possible only if  $p=r$  and  $q=sr$ . After simplification we get  $2(1+s) = (s-1)^2$ , from where  $s^2 - 4s - 1 = 0$ . The last equality has no integer solutions, so in this case the equation has no solution. If  $r=2$ , then  $p$  and  $q$  have the same parity, the case when  $p=2$  is impossible together with the previous case  $p=r$ , so they have to be odd. Let  $a \neq 2$  be a prime divisor of  $p+q$ , then  $a$  must be a divisor of  $p-q$  too, so that it must be a divisor of  $p$  and  $q$ , which is possible only if  $p=a$  and  $q=sa$ , in this case we get  $4(1+s) = a(s-1)^2$ , from where  $as^2 - (2a+4)s + (a-4) = 0$ , with solutions  $\frac{a+2 \pm \sqrt{a^2 + 4a + 4 - a^2 + 4a}}{a} = \frac{a+2 \pm 2\sqrt{2a+1}}{a}$ . If the number  $\sqrt{2a+1}$  is an integer, then it is odd, so  $2a+1 = 4b^2 + 4b + 1$ , from where  $a = 2b(b+1)$ , from where it cannot be prime. Therefore  $p+q$  and  $p-q$  must be powers of 2, i.e.  $p-q=2^k$  and  $p+q=2^{2k-2}$ , from where  $2p=2^k+2^{2k-2}$  and  $2q=2^{2k-2}-2^k$ , and since  $p$  and  $q$  are odd,  $k=1$ , but then  $p+q=1$ , which is impossible. It follows that the equation has no prime number solutions.



## 17<sup>th</sup> Junior Balkan mathematical Olympiad 21-26.06.2013, Antalya Turkey

**Problem 1.** Find all ordered pairs  $(a,b)$  of positive integers for which the numbers  $\frac{a^3b-1}{a+1}$  and  $\frac{b^3a+1}{b-1}$  are both positive integers.

**Problem 2.** Let  $ABC$  be an acute triangle with  $\overline{AB} < \overline{AC}$  and  $O$  be the center of its circumcircle  $k$ . Let  $D$  be a point on the line segment  $BC$  such that  $\angle BAD = \angle CAO$ . Let  $E$  be the second point of intersection of  $k$  and the line  $AD$ . If  $M$ ,  $N$  and  $P$  are the midpoints of the line segments  $BE$ ,  $OD$  and  $AC$ , respectively, show that the points  $M$ ,  $N$  and  $P$  are collinear.

**Problem 3.** Show that

$$\left( a + 2b + \frac{2}{a+1} \right) \left( b + 2a + \frac{2}{b+1} \right) \geq 16$$

for all positive real numbers  $a$  and  $b$  such that  $ab \geq 1$ .

**Problem 4.** Let  $n$  be a positive integer. Two players Alice and Bob, are playing the following game:

- Alice chooses  $n$  numbers, not necessarily distinct
- Alice writes all pairwise sums on a sheet of paper and gives it to Bob. (there are  $\frac{n(n-1)}{2}$  such sums, not necessarily distinct)
- Bob wins if he finds correctly the initial  $n$  numbers chosen by Alice with only one guess

Can Bob be sure to win for the following cases?

- a.  $n=5$       b.  $n=6$       c.  $n=8$

Justify your answer(s).

[For example, when  $n=4$ , Alice may choose the numbers 1, 5, 7, 9 which have the same pairwise sums as the numbers 2, 4, 6, 8 and hence Bob cannot be sure to win.]



## 17<sup>th</sup> Junior Balkan mathematical Olympiad 21-26.06.2013, Antalya Turkey

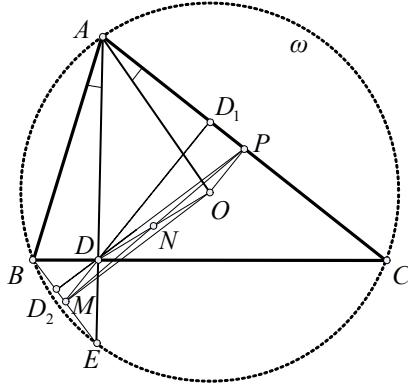
**Problem 1.** Find all ordered pairs  $(a,b)$  of positive integers for which the numbers  $\frac{a^3b-1}{a+1}$  and  $\frac{b^3a+1}{b-1}$  are both positive integers.

**Solution.** As  $a^3b-1=b(a^3+1)-(b+1)$ , and  $a+1|a^3+1$ , we have  $a+1|b+1$ . As  $b^3a+1=a(b^3-1)+(a+1)$  and  $b-1|b^3-1$ , we have  $b-1|a+1$ . So  $b-1|b+1$ , and hence  $b-1|2$ .

**Case 1.** If  $b=2$ , then  $a+1|b+1=3$  gives  $a=2$ . Hence  $(a,b)=(2,2)$  is the only solution in this case.

**Case 2.** If  $b=3$ , then  $a+1|b+1=4$  gives  $a=1$  or  $a=3$ . Hence  $(a,b)=(1,3)$  and  $(3,3)$  are the only solutions in this case.

**Problem 2.** Let  $ABC$  be an acute triangle with  $\overline{AB} < \overline{AC}$  and  $O$  be the center of its circumcircle  $\omega$ . Let  $D$  be a point on the line segment  $BC$  such that  $\angle BAD = \angle CAO$ . Let  $E$  be the second point of intersection of  $\omega$  and the line  $AD$ . If  $M$ ,  $N$  and  $P$  are the midpoints of the line segments  $BE$ ,  $OD$  and  $AC$ , respectively, show that the points  $M$ ,  $N$  and  $P$  are collinear.



**Solution.** We will show that  $MOPD$  is a parallelogram. From this it follows that  $M, N, P$  are collinear.

Since  $\angle BAD = \angle CAO = 90^\circ - \angle ABC$ ,  $D$  is the foot of the perpendicular from  $A$  to side  $BC$ . Since  $M$  is the midpoint of the line segment  $BE$ , we have  $\overline{BM} = \overline{ME} = \overline{MD}$  and hence  $\angle MDE = \angle MED = \angle ACB$ .

Let the line  $MD$  intersect the line  $AC$  at  $D_1$ . Since  $\angle ADD_1 = \angle MDE = \angle ACD$ ,  $MD$  is perpendicular to  $AC$ . On the other hand, since  $O$  is the center of the circumcircle of triangle  $ABC$  and  $P$  is the midpoint of the side  $AC$ ,  $OP$  is perpendicular to  $AC$ . Therefore  $MD$  and  $OP$  are parallel.

Similarly, since  $P$  is the midpoint of the side  $AC$ , we have  $\overline{AP} = \overline{PC} = \overline{DP}$  and hence  $\angle PDC = \angle ACB$ . Let the line  $PD$  intersect the line  $BE$  at  $D_2$ . Since  $\angle BDD_2 = \angle PDC = \angle ACB = \angle BED$ , we conclude that  $PD$  is perpendicular to  $BE$ . Since  $M$  is the midpoint of the line segment  $BE$ ,  $OM$  is perpendicular to  $BE$  and hence  $OM$  and  $PD$  are parallel.

**Problem 3.** Show that

$$\left( a + 2b + \frac{2}{a+1} \right) \left( b + 2a + \frac{2}{b+1} \right) \geq 16$$

for all positive real numbers  $a$  and  $b$  such that  $ab \geq 1$ .

**Solution 1.** By the AM-GM Inequality we have

$$\frac{a+1}{2} + \frac{2}{a+1} \geq 2.$$

Therefore

$$a + 2b + \frac{2}{a+1} \geq \frac{a+3}{2} + 2b,$$

and, similarly,

$$b + 2a + \frac{2}{b+1} \geq 2a + \frac{b+1}{3}.$$

On the other hand,

$$(a+4b+3)(b+4a+3) \geq (\sqrt{ab} + 4\sqrt{ab} + 3)^2 \geq 64,$$

by the Cauchy-Schwarz Inequality as  $ab \geq 1$ , and we are done.

**Solution 2.** Since  $ab \geq 1$ , we have  $a+b \geq a+\frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2$ .

Then

$$a + 2b + \frac{2}{a+1} = b + (a+b) + \frac{2}{a+1} \geq b + 2 + \frac{2}{a+1} = \frac{b+1}{2} + \frac{b+1}{2} + \frac{2}{a+1} + 1 \geq 4\sqrt[4]{\frac{(b+1)^2}{2(a+1)}},$$

By the AM-GM Inequality. Similarly,

$$b+2a+\frac{2}{b+1} \geq 4\sqrt[4]{\frac{(a+1)^2}{2(b+1)}}.$$

Now using these and applying the AM-GM Inequality another time we obtain:

$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right) \geq 16\sqrt[4]{\frac{(a+1)(b+1)}{4}} \geq 16\sqrt[4]{\frac{(2\sqrt{a})(2\sqrt{b})}{4}} = 16\sqrt[4]{ab} \geq 16.$$

**Problem 4.** Let  $n$  be a positive integer. Two players Alice and Bob, are playing the following game:

- Alice chooses  $n$  numbers, not necessarily distinct
- Alice writes all pairwise sums on a sheet of paper and gives it to Bob. (there are  $\frac{n(n-1)}{2}$  such sums, not necessarily distinct)
- Bob wins if he finds correctly the initial  $n$  numbers chosen by Alice with only one guess

Can Bob be sure to win for the following cases?

b.  $n=5$       b.  $n=6$       c.  $n=8$

Justify your answer(s).

[For example, when  $n=4$ , Alice may choose the numbers 1,5,7,9 which have the same pairwise sums as the numbers 2,4,6,8 and hence Bob cannot be sure to win.]

**Solution.a)** No. Four apples with weights 1,5,7,9 and the weights 2,4,6,10 both give the results 6,8,10,12,14,16 when weighed in pairs.

b) Yes. Let  $a \leq b \leq c \leq d \leq e$  be the weights of the apples. As each apple is weighted 4 times, by adding all 10 pairwise weights and dividing the sum by 4, we obtain  $a+b+c+d+e$ . Subtracting the smallest and the largest pairwise weights  $a+b$  and  $d+e$  from this we obtain  $c$ . Subtracting  $c$  from the second largest pairwise weight  $c+e$  we obtain  $e$ . Subtracting  $e$  from the largest pairwise weight  $d+e$  we obtain  $d$ .  $a$  and  $b$  are similarly determined.

c) Yes. Let  $a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq f$  be the weights of the apples. As each apple is weighed 5 times, by adding all 15 pairwise weights and dividing the sum by 5, we obtain  $a+b+c+d+e+f$ . Subtracting the smallest and the largest pairwise weights  $a+b$  and  $e+f$  from this we obtain  $c+d$ .

Subtracting the smallest and the second largest pairwise weights  $a+b$  and  $d+f$  from  $a+b+c+d+e+f$  we obtain  $c+e$ . Similarly we obtain  $b+d$ . We use these to obtain  $a+f$  and  $b+e$ .

Now  $a+d, a+e, b+c$  are the three smallest among the remaining six pairwise weights. If  $f=d$  we add these up, subtract the known weights  $c+d$  and  $b+e$  from the sum and divide the difference by 2, we obtain  $a$ . Then the rest follows.



## 30<sup>th</sup> Balkan Mathematical Olympiad

28.06-03.07.2013, Agros, Cyprus

**Problem 1.** In a triangle  $ABC$ , the excircle  $\omega_a$  opposite  $A$  touches  $AB$  at  $P$  and  $AC$  at  $Q$ , and the excircle  $\omega_b$  opposite  $B$  at  $M$  and  $BC$  at  $N$ . Let  $K$  be the projection of  $C$  onto  $MN$ , and let  $L$  be the projection of  $C$  onto  $PQ$ .

Show that the quadrilateral  $MKLP$  is cyclic.

**Solution.** Denote by  $D$  the intersection point of  $MN$  and  $PQ$  and let  $\angle CDQ=x$ ,  $\angle CDN=y$ . Notice that  $\angle APQ=90^\circ-\frac{A}{2}$  from the isosceles  $\triangle APQ$  and analogously  $\angle BMN=90^\circ-\frac{B}{2}$  (see picture).

Then  $x+y=\frac{A+B}{2}$ . In the standard notation, we have

$$\frac{\overline{CD}}{\cos \frac{B}{2}} = \frac{p-a}{\sin y} \text{ (sine law for } \triangle CND)$$

$$\frac{\overline{CD}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{p-b}{\sin x} \text{ (sine law for } \triangle CQD)$$

Therefore  $\frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = \frac{\sin x}{\sin y} \frac{p-a}{p-b} = \frac{\sin x}{\sin y} \frac{\cot \frac{A}{2}}{\cot \frac{B}{2}}$  (we used  $\frac{p-a}{p-b} = \frac{\overline{AT}}{\overline{BT}} = \frac{\cot \frac{A}{2}}{\cot \frac{B}{2}}$ , where  $T$  is the tangent point of

the incircle of  $\triangle ABC$  to the side  $AB$ ), whence  $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2}}$ .

The last equality and  $x+y=\frac{A+B}{2}$  imply that  $x=\frac{A}{2}$  and  $y=\frac{B}{2}$  (set  $x+y=t$  and consider

$\frac{\sin(t-y)}{\sin y} = \frac{\sin(t-\frac{B}{2})}{\sin \frac{B}{2}}$ ). Therefore  $DC \perp AB$  and, if  $C_1$  is the intersection point of  $CD$  and  $AB$ , we have

$$\overline{DL} \cdot \overline{DP} = \overline{DC} \cdot \overline{DC_1} = \overline{DK} \cdot \overline{DM},$$

which implies that  $M, P, K$  and  $L$  are concyclic.

**Solution 2.** Let  $T=MN \cap PQ$ . It suffices to show  $TC \perp AB$ , as in this case we would have  $\angle MPL=\angle TCL=\angle TKL=180^\circ-\angle MKL$  implying that  $MKLP$  is cyclic. Let  $H$  be the projection of  $C$  onto  $AB$  and let  $PR$  be a diameter in  $\omega_a$ . The homothety  $h$  of center  $C$  with maps  $\omega_a$  to  $\omega_b$  will also map  $R$  to  $M$ , implying that  $R, C$  and  $M$  are collinear with  $\overline{RC} : \overline{CM} = r_a : r_b$ . Therefore, the projections  $P, H$  and  $M$  of  $R, C$  and  $M$  onto  $AB$  also satisfy  $\overline{PM} : \overline{HM} = r_a : r_b$ .

Let  $G$  be the projection of  $T$  onto  $AB$ ,  $I_c$  and  $S$  be the center and the contact point with  $AB$  of the ex-circle of  $\triangle ABC$  opposite  $C$ , and  $t(X,k)$  be the length of the tangent from the point  $X$  to the circle  $k$ . The triangles  $\triangle PTM$  and  $\triangle AI_cB$  are similar (since their corresponding sides are parallel), and, in them,  $TG$  and  $I_cS$  are corresponding altitudes. It follows that

$$\overline{PG} : \overline{GM} = \overline{AS} : \overline{SB} = t(C, \omega_a) : t(C, \omega_b) = r_a : r_b.$$

Therefore,  $\overline{PH} : \overline{HM} = r_a : r_b = \overline{PG} : \overline{GM}$ , and  $H \equiv G$ , as needed.

**Solution 3.(Areal approach)**

Recall official solution has  $PQ \cap MN = T$ . The solution follows immediately for " $CT \perp AB$ ". We establish this by areas as follows:

The line  $PQ$  has equation  $\begin{vmatrix} x & y & z \\ c-s & s & 0 \\ b-s & 0 & s \end{vmatrix} = 0$ , i.e.

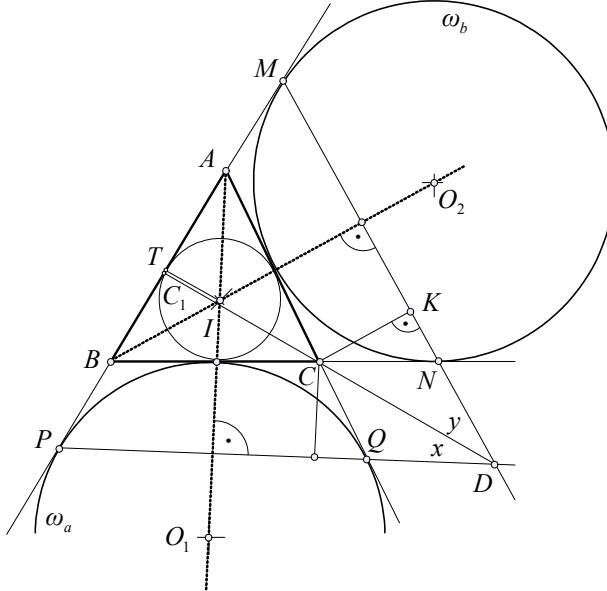
$$PQ: \quad sa - (c-s)y - (b-s)z = 0 \quad (1)$$

$$MN: \quad -(c-s)x + sy - (a-c)z = 0 \quad (2)$$

Now  $(a-s)*(1)-(b-s)*(2)$  passes through  $T$  and  $C$ .

Making algebra calculations the line has equation  
 $b\cos Ax - a\cos By = 0$

Which is the areal equation so the altitude of the triangle  $ABC$  passes through  $C$ .



**Problem 2.** Determine all positive integers  $x, y$  and  $z$  such that

$$x^5 + 4^y = 2013^z.$$

**Solution.** Note that 2013 is divisible by 11, and that  $x^5$  is congruent with 0, 1 or -1 modulo 11. Since  $4^y$  is congruent 4, 5, 9, 3 or 1 modulo 11, we get that  $x^5 \equiv -1 \pmod{11}$ , and  $4^y \equiv 1 \pmod{11}$ . Therefore  $5 \mid y$ , and the given equation is of the form  $a^5 + b^5 = 2013^z = 3^z \cdot 11^z \cdot 61^z$ , where  $a = x$  and  $b = 4^{\frac{y}{5}}$ . Note that  $2 \nmid x$ , and therefore  $(a, b) = 1$ . Also  $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$ , and by previous remark, we have  $(a+b, a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = (a+b, 5a^4) = (a+b, 5) = 1$ . Let us prove that  $3 \nmid a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$ . Suppose that this is not true, i.e. that  $3 \mid a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$ . If  $3 \mid ab$ , then  $3 \mid a$  and  $3 \mid b$ , a contradiction. Since  $3^z \mid a^5 + b^5$ , this implies that  $3^z \mid a+b$ . Also,

$$(a+b)^4 > a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 > a+b,$$

And therefore  $61^z \mid a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$ , and  $11^z \mid a+b$ . So  $a+b \geq 33^z$ , and hence

$$(a+b)^2 > 61^z \geq a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4.$$

Let  $a > b$  (we can similarly deal with the case  $a < b$ ). Then  $a^4 - a^3b = a^3(a-b) \geq a^3$  and  $a^2b^2 - ab^3 = (a-b)ab^2 \geq ab^2$ . So,

$$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 \geq a^3 + ab + b^4 \geq 2a^2 + ab + b^2 \geq (a+b)^2,$$

a contradiction.

Therefore, the given equation does not have any solution in positive integers.

**Problem 3.** Let  $S$  be the set of positive real numbers. Find all functions  $f:S^3 \rightarrow S$  such that, for all positive real numbers  $x, y, z$  and  $k$ , the following three conditions are satisfied:

- a)  $xf(x,y,z) = zf(z,y,x)$
- b)  $f(x,ky,k^2z) = kf(x,y,z)$
- c)  $f(1,k,k+1) = k+1$ .

**Solution.** Using the substitution  $g(x,y,z) = \frac{x}{z}f(x,y,z)$  the conditions become

- a')  $g(x,y,z) = g(z,y,x)$
- b)  $g(x,ky,k^2z) = g(x,y,z)$
- c)  $g(1,k,k+1) = \frac{k+1}{k}$ .

Using the first two conditions we see that

$$g(x,y,z) = g\left(x, \frac{y}{\sqrt{z}}, 1\right) = g\left(1, \frac{y}{\sqrt{z}}, x\right) = g\left(1, 1, \frac{xz}{y^2}\right),$$

so we define  $h(w) = g(1,1,w)$ , so that  $g(x,y,z) = h\left(\frac{xz}{y^2}\right)$ .  $h$  obeys the single condition

$$h\left(\frac{k+1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{k}.$$

The rearrange this to an explicit formula for  $h$ , let  $w = \frac{k+1}{k^2}$  so that  $k^2w - k - 1 = 0$ . Then (using the formula for a solution of a quadratic and noting  $k > 0$ ), this rearranges to

$$k = \frac{1 + \sqrt{1 + 4w}}{2w}$$

so

$$h(w) = \frac{k+1}{k} = wk = \frac{1 + \sqrt{1 + 4w}}{2}.$$

This identity holds for all  $w$  which can be written in the form  $\frac{k+1}{k^2}$ , which is fortunately all positive reals (by choosing  $k = \frac{1 + \sqrt{1 + 4w}}{2w}$ ).

Back-substituting into  $g$  and then  $f$  see that for all positive reals  $x, y, z$

$$f(x,y,z) = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4xz}}{2x}.$$

We have shown that there is at most one solution, given by the above formula. To show this genuinely is a solution, we check that it satisfies condition c), and note that it is of the form  $f(x,y,z) = \frac{y}{x}h\left(\frac{xz}{y^2}\right)$ , which make conditions (a), (b) immediate.

**Problem 4.** In a mathematical competition some competitors are friends; friendship is always mutual, that is to say that when  $A$  is a friend of  $B$ , then also  $B$  is a friend of  $A$ . We say that  $n \geq 3$  different competitors  $A_1, A_2, \dots, A_n$  from a weakly-friendly cycle if  $A_i$  is not a friend of  $A_{i+1}$ , for  $1 \leq i \leq n$  ( $A_{n+1} = A_1$ ), and there are no other pairs of non-friends among the competitors of this cycle.

The following property is satisfied:

for every competitor  $C$ , and every weakly-friendly cycle  $\mathcal{L}$  of competitors not including  $C$ , the set of competitors  $D$  in  $\mathcal{L}$  which are not friends of  $C$  has at most one element.

Prove that all competitors of this mathematical competition can be arranged into three rooms, such that every two competitors that are in the same room are friends.

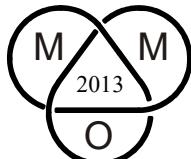
**Solution.** Let us consider graph  $G$  whose vertices are competitors, such that two vertices are adjacent if and only if they are not friends. Then it is enough to prove that vertices of  $G$  can be partitioned into three subsets such that there are no edges in each of them.

First we prove the following lemma:

**Lemma.** There is a vertex of degree at most 2 in  $G$ .

**Proof.** Suppose that this is not true. Let  $P$  be the longest induced path of  $G$  (i.e. path such that no two of its vertices are adjacent, except for the consecutive ones). Let  $u$  and  $v$  be the ends of this path. By our assumption  $u$  is adjacent to at least two vertices  $u'$  and  $u''$  that are not in  $P$ . By the maximality of  $P$ , both  $u'$  and  $u''$  have a neighbor in  $P$ . Let  $w'$  (resp.  $w''$ ) be a neighbor of  $u'$  (resp.  $w''$ ) on  $P$  which is the closest to  $u$ . Let w.l.o.g.  $w''$  be closer to  $u$  than  $w'$ , or  $w'=w''$ . Then  $u''$  has at least two neighbors on the cycle induced by vertex  $u'$  and vertices of  $P$  from  $u$  to  $w'$ , a contradiction.

We resume the proof of the problem by induction on the number of vertices of  $G$  (denoted by  $|V(G)|$ ). If  $|V(G)|=3$ , the proof is trivial. So, let us assume that the problem is true for all graphs with at most  $n$  vertices, and prove it for a graph  $G$  such that  $|V(G)|=n+1$ . By Lemma there is a vertex  $v$  of  $G$  which is of degree at most 2. Consider graph  $G'$  obtained from  $G$  by removing  $v$ . This graph satisfies conditions of the problem, so its vertices can be partitioned into three sets in the desired way. Since  $v$  is of degree at most 2, for at least one of these sets  $v$  has no neighbors in it. Placing  $v$  in this set, we obtain a desired partition of  $G$ , which completes our proof.



20-t a Makedonska  
matematika olimpijada

**20-та МАКЕДОНСКА  
МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА  
06.04.2012 ФЕИТ-Скопје**

1. Реши ја равенката  $p^{2q} + q^{2p} = r$  во множеството прости броеви.

2. Вкупно  $2^n$  парички се расподелени на неколку деца. До прераспределба на паричките доаѓа во ситуација кога некое од децата има барем половина од сите парички: тогаш од паричките на едно такво дете на секое од останатите деца му се префралат онолку парички колку што веќе имало. Во случај кога сите парички се кај едно дете нема можност за прераспределба. Кој е најголемиот можен број последователни прераспределби? (На пример, ако 32 парички на 6 деца се првично распределени: 17, 2, 9, 1, 2, 1, тогаш после една прераспределба децата ќе имаат редоследно: 2, 4, 18, 2, 4, 2 парички; во примерот, тој број е два).

Одговорот да се образложи!

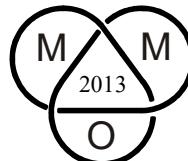
3. Даден е остроаголен триаголник  $ABC$  таков што аголот во темето  $C$  е најголем. Нека  $E$  и  $G$  се пресечните точки на висината спуштена од  $A$  кон  $BC$  со описаната кружница на триаголникот  $ABC$  и со  $BC$  соодветно и центарот  $O$  на описаната кружница лежи на нормалата спуштена од  $A$  кон  $BE$ . Точките  $M$  и  $F$  се подножјата на висините спуштени од  $E$  кон  $AC$  и  $AB$  соодветно. Докажи дека  $P_{MFE} < P_{FBEG}$ .

**4.** Нека  $x, y$  и  $z$  се позитивни реални броеви така што  $x^4 + y^4 + z^4 = 3$ .  
Докажи дека

$$\frac{9}{x^2 + y^4 + z^6} + \frac{9}{x^4 + y^6 + z^2} + \frac{9}{x^6 + y^2 + z^4} \leq x^6 + y^6 + z^6 + 6.$$

Кога важи равенство?

**5.** Дадени се произволен триаголник  $ABC$  и две прави  $p$  и  $q$  кои не се паралелни меѓу себе и не се нормални на ниту една од страните на триаголникот. Нормалите низ точките  $A$ ,  $B$  и  $C$  на правата  $p$  ги обележуваме со  $p_A$ ,  $p_B$  и  $p_C$  соодветно, а нормалите на правата  $q$  со  $q_A$ ,  $q_B$  и  $q_C$  соодветни. Нека пресечните точки на правите  $p_A, q_A, p_B, q_B, p_C$  и  $q_C$  соодветно со  $q_B, p_B, q_C, p_C, q_A$  и  $p_A$  се  $K, L, P, Q, N$  и  $M$ . Докажи дека правите  $KL, MN$  и  $PQ$  се сечат во една точка.



20-ta Makedonska  
matematika olimpijada

## 20-та МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА 06.04.2012 ФЕИТ-Скопје

**1.** Реши ја равенката  $p^{2q} + q^{2p} = r$  во множеството прости броеви.

**Решение.** Јасно е дека  $r > 2$ , од каде мора  $r$  да биде непарен прост број. Еден од броевите  $p$  или  $q$  мора да биде 2, а другиот непарен прост број. Без губење на општоста, нека  $q=2$  и  $p$  е непарен. Но тогаш равенката е од облик  $p^4 + 2^{2p} = r$  односно  $p^4 + 4 \cdot 2^{4k} = r$  каде  $p=2k+1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Но тогаш

$$\begin{aligned} p^4 + 4 \cdot 2^{4k} &= p^4 + 4 \cdot 2^{4k} + 4 \cdot 2^{2k} p^2 - 4 \cdot 2^{2k} p^2 = (p^2 + 2 \cdot 2^{2k})^2 - 4 \cdot 2^{2k} p^2 = \\ &= (p^2 + 2 \cdot 2^{2k} + 2 \cdot 2^k p)(p^2 + 2 \cdot 2^{2k} - 2 \cdot 2^k p) = \\ &= (p^2 + 2 \cdot 2^{2k} + 2 \cdot 2^k p)((p - 2^k)^2 + 2^{2k}) \end{aligned}$$

Тоа значи дека бројот  $p^4 + 2^{2p}$  не е никогаш прост, што значи дека равенката нема решение во множеството прости броеви.

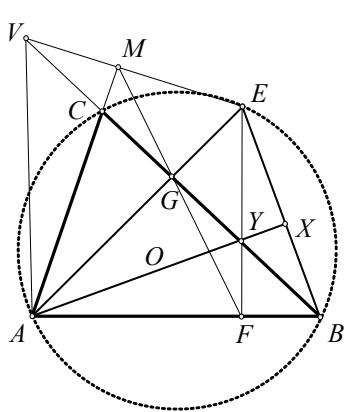
**2.** Вкупно  $2^n$  парички се расподелени на неколку деца. До прерасподелба на паричките доаѓа во ситуација кога некое од децата има барем половина од сите парички: тогаш од паричките на едно такво дете на секое од останатите деца му се префрајаат онолку парички колку што веќе имало. Во случај кога сите парички се кај едно дете нема можност за прерасподелба. Кој е најголемиот можен број последователни прераспределби? (На пример, ако 32 парички на 6 деца се првично распределени 17, 2, 9, 1, 2, 1, тогаш после една прерасподелба децата ќе имаат редоследно 2, 4, 18, 2, 4, 2 парички; во примерот, тој број е два).

Одговорот да се образложи!

**Решение.** Најмногу  $n$  последователни прерасподелби. Ќе започнеме со пример дека  $n$  последователни прерасподелби се можни. Нека  $2^n$  парички се распределени на 3 деца првично во редослед  $1, 2^{n-1}+2^{n-2}+\dots+2^1, 1$ . Последователните прерасподелби (вкупно  $n$  на број) ќе бидат:

$$\begin{aligned} & 2^1, 2^{n-1}+2^{n-2}+\dots+2^2, 2^1 \\ & 2^2, 2^{n-1}+2^{n-2}+\dots+2^3, 2^2 \\ & \dots\dots\dots \\ & 2^{n-2}, 2^{n-1}, 2^{n-2} \\ & 2^{n-1}, 0, 2^{n-1} \\ & 0, 0, 2^n \end{aligned}$$

Да покажеме дека  $n$  е максималниот број последователни прерасподелби. Тргнуваме од претпоставка дека постои првична расподелба за која се можни барем  $n+1$  прерасподелби и бараме контрадикција: да забележиме дека после една прерасподелба бројот на парички кај секое дете е делив со 2 (кај секое дете кај кое се давале парички, бројот е дуплиран, па е парен, а кај детето од кое се одземале парички повторно останува парен број бидејќи вкупно има  $2^n$  парички т.е. парен број). Аналогично после втората прерасподелба бројот на парички кај секое дете е делив со 4, итн. се до  $n$ -тата прерасподелба во која бројот на парички кај секое дете е делив со  $2^n$ ; имајќи предвид дека вкупниот број парички е неменлив и изнесува  $2^n$ , единствена можна (во некој редослед) е расподелбата  $2^n, 0, 0, \dots, 0$ . Но тогаш нема да има уште една расподелба. Контрадикција!



**3.** Даден е остроаголен триаголник  $ABC$  таков што аголот во темето  $C$  е најголем. Нека  $E$  и  $G$  се пресечните точки на висината спуштена од  $A$  кон  $BC$  со описаната кружница на триаголникот  $ABC$  и со  $BC$  соодветно и центарот  $O$  на описаната кружница лежи на нормалата спуштена од  $A$  кон  $BE$ . Точките  $M$  и  $F$  се подножјата на висините спуштени од  $E$  кон  $AC$  и  $AB$  соодветно. Докажи дека  $P_{MFE} < P_{FBEG}$ .

**Решение.** Нека пресекот на  $EM$  со  $BC$  е  $V$  (пресекот скогаш ќе постои бидејќи аголот во  $C$  е остр). Од теорема на Симсон следува дека точките  $M$ ,  $G$  и  $F$  се колinearни.

Да забележиме дека  $\angle EAC = \angle EBC$  како агли над ист кружен лак. Уште  $\angle CAE = \angle BAO$ . Четириаголникот  $FBEG$  е тетивен. Па добиваме  $\angle GBE = \angle GFE$ . Уште  $\angle GAO = \angle GBE$  како агли со нормални краци. Добивме  $\angle CAE = \angle GAO = \angle BAO$ . Па добиваме дека  $AO$  е симетрала на аголот и нормала во триаголникот  $ABE$ . Следува дека  $ABE$  е рамнокрак од каде  $GF$  е паралелна со  $BE$ . Правите  $AO$ ,  $BG$  и  $EF$  се сечат во една точка ( $EF$  и  $BG$  се висини во триаголникот  $ABE$ ). Да забележиме дека  $AGMV$  е тетивен. Имаме  $\angle MVG = \angle GAM$ . Уште добиваме  $\angle MAV = \angle VGM = \angle FGB$ . Па  $AM$  е висина и симетрала на аголот во триаголникот  $EAV$ . Следува дека триаголникот  $EAV$  е рамнокрак и  $M$  е средина на страната  $VE$ . Уште  $\Delta AVE \cong \Delta AEB$ . Јасно е дека  $\Delta EGV \cong \Delta EGB$  и бидејќи и двата се правоаголни  $P_{GEM} = \frac{1}{2}P_{GEB}$ . Од друга страна  $P_{GFE} = P_{GFB}$  од каде се добива бараното неравенство.

**4.** Нека  $x, y$  и  $z$  се позитивни реални броеви така што  $x^4 + y^4 + z^4 = 3$ .

Докажи дека

$$\frac{9}{x^2 + y^4 + z^6} + \frac{9}{x^4 + y^6 + z^2} + \frac{9}{x^6 + y^2 + z^4} \leq x^6 + y^6 + z^6 + 6.$$

Кога важи равенство?

**Решение.** Ако го искористиме неравенството на Коши – Буњаковски – Шварц за позитивните броеви  $(x, y^2, z^3)$  и  $(x^3, y^2, z)$  добиваме

$$(x^4 + y^4 + z^4)^2 \leq (x^2 + y^4 + z^6)(x^6 + y^4 + z^2) \text{ т.е.}$$

$$\frac{1}{x^2 + y^4 + z^6} \leq \frac{x^6 + y^4 + z^2}{9}. \quad (1)$$

Аналогично, со користење на неравенство на Коши – Буњаковски – Шварц за позитивните броеви  $(x^2, y^3, z)$  и  $(x^2, y, z^3)$ , како и за позитивните броеви  $(x^3, y, z^2)$  и  $(x, y^3, z^2)$ , добиваме

$$\frac{1}{x^4 + y^6 + z^2} \leq \frac{x^4 + y^2 + z^6}{9}, \quad (2)$$

односно

$$\frac{1}{x^6 + y^2 + z^4} \leq \frac{x^2 + y^6 + z^4}{9}. \quad (3)$$

Сега, со собирање на неравенствата (1), (2) и (3) го добиваме неравенството

$$\frac{1}{x^2 + y^4 + z^6} + \frac{1}{x^4 + y^6 + z^2} + \frac{1}{x^6 + y^2 + z^4} \leq \frac{x^6 + y^6 + z^6 + x^4 + y^4 + z^4 + x^2 + y^2 + z^2}{9}. \quad (4)$$

Од неравенство меѓу аритметичка и квадратна средина за позитивните броеви  $x^2, y^2$  и  $z^2$  добиваме дека  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\sqrt{\frac{x^4 + y^4 + z^4}{3}} = 3$ , па ако замениме во (4) го добиваме бараното неравенство. Равенство во (1) важи ако и само ако  $\frac{x}{x^3} = \frac{y^2}{y^2} = \frac{z^3}{z}$  т.е.  $x = z = 1$  и од  $x^4 + y^4 + z^4 = 3$  следува дека  $y = 1$ .

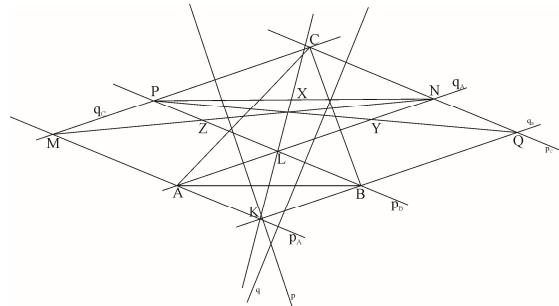
**5.** Дадени се произволен триаголник  $ABC$  и две прави  $p$  и  $q$  кои не се паралелни меѓу себе и не се нормални на ниту една од страните на триаголникот. Нормалите низ точките  $A$ ,  $B$  и  $C$  на правата  $p$  ги обележуваме со  $p_A$ ,  $p_B$  и  $p_C$  соодветно, а нормалите на правата  $q$  со  $q_A$ ,  $q_B$  и  $q_C$  соодветни. Нека пресечните точки на правите  $p_A$ ,  $q_A$ ,  $p_B$ ,  $q_B$ ,  $p_C$  и  $q_C$  соодветно со  $q_B$ ,  $p_B$ ,  $q_C$ ,  $p_C$ ,  $q_A$  и  $p_A$  се  $K$ ,  $L$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $N$  и  $M$ . Докажи дека правите  $KL$ ,  $MN$  и  $PQ$  се сечат во една точка.

**Решение.** Без губење на општоста може да претпоставиме дека  $p_B$  е меѓу  $p_A$  и  $p_C$ . Прв случај е ако  $q_A$  е меѓу  $q_B$  и  $q_C$  како на пртежот, очигледно  $KL$  ја сече  $PN$ . Аналогно, ако  $q_C$  е меѓу  $q_A$  и  $q_B$  случајот е симетричен на разгледуваниот. Втор случај, ако  $q_B$  е меѓу  $q_A$  и  $q_C$ , тогаш  $MQ$  и  $PN$  не се паралелни, па  $KL$  ја сече барем едната и двата случаи се еквивалентни. Според ова можеме да претпоставиме дека  $KL$  ја сече  $PN$ . Правата  $MN$  не може да е паралелна со  $p_B$ , бидејќи во тој случај  $p$  е нормална на  $AC$  и аналогно  $PQ$  не е паралелна со  $q_A$ .

Нека  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  се пресечните точки на правите  $PN$ ,  $q_A$  и  $p_B$  соодветно со  $KL$ ,  $PQ$  и  $MN$ . Од сличноста на триаголниците  $LNZ$  и  $PMZ$  се добива

$$\frac{LZ}{PZ} = \frac{LN}{PM}. \quad (1)$$

Слично од сличноста на  $LPY$  и  $NQY$  се добива



$$\frac{\overline{NY}}{\overline{LY}} = \frac{\overline{NQ}}{\overline{LP}} \quad (2)$$

Ако  $KL$  не минува низ  $C$ , нека ги сече  $NC$  и  $MC$  соодветно во  $U$  и во  $V$ . Од триаголникот  $CPN$  и теоремата на Менелај за правата  $KL$  добиваме  $\frac{\overline{PX}}{\overline{XN}} \cdot \frac{\overline{NU}}{\overline{UC}} \cdot \frac{\overline{CV}}{\overline{VP}} = -1$ , то ест

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{NX}} = \frac{\overline{UC}}{\overline{NU}} \cdot \frac{\overline{VP}}{\overline{CV}} \quad (3).$$

Од сличноста на триаголниците  $KQU$  и  $LNU$  добиваме  $\frac{\overline{UQ}}{\overline{UN}} = \frac{\overline{KQ}}{\overline{LN}}$ , од каде  $1 + \frac{\overline{NQ}}{\overline{UN}} = 1 + \frac{\overline{KB}}{\overline{LN}}$ , па  $\overline{UN} = \frac{\overline{LN}\overline{NQ}}{\overline{KB}}$  и  $\overline{UC} = \overline{UN} + \overline{NC} = \frac{\overline{LN}\overline{NQ} + \overline{NCKB}}{\overline{KB}}$  и оттука

$$\frac{\overline{NU}}{\overline{UC}} = \frac{\frac{\overline{LN}\overline{NQ}}{\overline{KB}}}{\frac{\overline{LN}\overline{NQ} + \overline{NCKB}}{\overline{KB}}} = \frac{\overline{LN}\overline{NQ}}{\overline{LN}\overline{NQ} + \overline{NCKB}}. \quad (4)$$

Аналогно за сличните триаголници  $KMV$  и  $LPV$  добиваме

$$\frac{\overline{CV}}{\overline{VP}} = \frac{\overline{LP}}{\overline{PM}} \cdot \frac{\overline{PCKA}}{\overline{LPPM}}. \quad (5)$$

Ако ги заменеме (4) и (5) во (3) добиваме:

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{NX}} = \frac{\overline{UC}}{\overline{NU}} \cdot \frac{\overline{VP}}{\overline{CV}} = \frac{\frac{\overline{LN}\overline{NQ} + \overline{NCKB}}{\overline{LN}\overline{NQ}}}{\frac{-\overline{LPPM}}{\overline{LN}\overline{NQ}}} \cdot \frac{\overline{LP}}{\overline{PM}} \cdot \frac{\overline{PCKA}}{\overline{LPPM}} = \frac{\overline{LN}\overline{NQ} + \overline{NCKB}}{\overline{LPPM} + \overline{PCKA}} \frac{\overline{LP}}{\overline{LN}\overline{NQ}} = -\frac{\overline{LPPM}}{\overline{LN}\overline{NQ}} \quad (6)$$

Ако сега ги заменеме (1), (2) и (6) во равенството на Чева за триаголникот  $LNP$  и правите  $LK$ ,  $NM$  и  $PQ$  добиваме:

$$\frac{\overline{LZ}}{\overline{PZ}} \cdot \frac{\overline{PX}}{\overline{NX}} \cdot \frac{\overline{NY}}{\overline{LY}} = \frac{\overline{LN}}{\overline{PM}} \cdot \frac{\overline{NQ}}{\overline{LP}} \cdot \frac{\overline{LP}}{\overline{LN}\overline{NQ}} = -1$$

Ако  $KL$  минува низ  $C$ , тогаш  $X$  е средина на  $\overline{PN}$  и

$$\frac{\overline{LN}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{LB}}. \quad (7)$$

Ако сега ги заменеме (1), (2) и (7) во равенството на Чева за триаголникот  $LNP$  и правите  $LK$ ,  $NM$  и  $PQ$  добиваме:

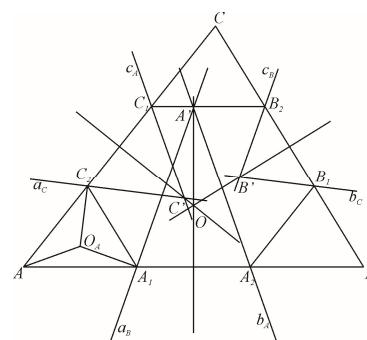
$$\frac{\overline{LZ}}{\overline{PZ}} \cdot \frac{\overline{PX}}{\overline{NX}} \cdot \frac{\overline{NY}}{\overline{LY}} = -\frac{\overline{LN}}{\overline{PM}} \cdot \frac{\overline{NQ}}{\overline{LP}} = -\frac{\overline{NC}}{\overline{LB}} \cdot \frac{\overline{NQ}}{\overline{LP}} = -1$$

Од обратната теорема на Чева правите  $KL$ ,  $MN$  и  $PQ$  се сечат во една точка или се паралелни. Без губење на општоста може да претпоставиме дека  $p_B$  е меѓу  $p_A$  и  $p_C$ . Ако  $q_B$  не е меѓу  $q_A$  и  $q_C$  како на цртежот очигледно е дека правите не може да се паралелни. Ако  $q_B$  е меѓу  $q_A$  и  $q_C$ , тогаш за правите да бидат паралелни треба  $\frac{\overline{AK}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{AN}}$ , но тогаш  $\frac{\overline{AK}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{KB}}{\overline{MC}}$ , па  $AB$  е паралелна со  $AC$ , што не е можно бидејќи  $ABC$  е триаголник.

## Изборен натпревар за ИМО 2013

### Прв ден, 08.04.2013

1. На страните на остроаголен триаголник  $ABC$  лежат точките  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1$  и  $C_2$ , така што  $\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2B} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ ,  $\overline{BB_1} = \overline{B_1B_2} = \overline{B_2C} = \frac{1}{3}\overline{BC}$  и  $\overline{CC_1} = \overline{C_1C_2} = \overline{C_2A} = \frac{1}{3}\overline{CA}$ . Нека  $k_A, k_B$  и  $k_C$  се описаните кружници на триаголниците  $AA_1C_2, BB_1A_2$  и  $CC_1B_2$  соодветно,  $a_B$  и  $a_C$  се тангентите на  $k_A$  во  $A_1$  и  $C_2$ ,  $b_C$  и  $b_A$  се тангентите на  $k_B$  во  $B_1$  и  $A_2$  и  $c_A$  и  $c_B$  се тангентите на  $k_C$  во  $C_1$  и  $B_2$ . Докажи дека нормалите спуштени од пресекот на  $a_B$  и  $b_A$  на  $AB$ , пресекот на  $b_C$  и  $c_B$  на  $BC$  и пресекот на  $c_A$  и  $a_C$  на  $CA$  се сечат во една точка.



**Решение.** Да ги означиме пресеците на  $a_B$ ,  $b_C$  и  $c_A$  соодветно со  $b_A$ ,  $c_B$  и  $a_C$  со  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$ . Триаголникот  $AA_1C_2$  е сличен на  $ABC$ , бидејќи имаат заеднички агол и страните им се во сооднос 1:3.(1) Нека  $O_A$  е центарот на описаната кружница на триаголникот  $AA_1C_2$ , тогаш:

$$\angle O_AA_1A = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOA_1) = 90^\circ - \angle AC_2A_1 = 90^\circ - \gamma$$

Бидејќи  $a_B$  е нормална на  $O_AA_1$  следува дека аголот меѓу  $a_B$  и  $AB$  е еднаков на  $180^\circ - 90^\circ - (\gamma) = \gamma$ .(3)

Аналогно и аголот меѓу  $b_A$  и  $AB$  е еднаков на  $\gamma$ , па триаголникот  $A_1A_2A'$  е рамнокрак со основа  $A_1A_2$ , то ест нормалата на  $AB$  низ  $C'$  минува низ средината на  $A_1A_2$ , која е истовремено и средина на  $AB$ ,(4) па нормалата минува и низ центарот на описаната кружница на триаголникот  $ABC$ . Од причини на симетрија сите три нормали минуваат низ центарот на описаната кружница, то ест низ една точка.

**2. а)** Нека  $S(n)$  е збирот на цифрите на бројот  $n$ . После запирката ги пишуваме еден по друг броевите  $S(1), S(2), \dots$ . Докажи дека бројот што се добива е ирационален.

**б)** Нека  $P(n)$  е производот на цифрите на бројот  $n$ . После запирката ги пишуваме еден по друг броевите  $P(1), P(2), \dots$ . Докажи дека бројот што се добива е ирационален.

**Решение.** а) Бројот  $0.S(1)S(2)\dots$  е ирационален ако е непериодичен. Да претпоставиме дека бројот е периодичен и нека периодот има должина  $d$ . Јасно е дека периодот мора да содржи цифри различни од 0 бидејќи во спротивно бројот би бил од облик  $0.S(1)S(2)\dots S(k)$  и секогаш постои број поголем од  $k$  чиј збир на цифри е различен од 0.(на пример  $10^m$  за доволно голем  $m$  е поголем од  $k$  а збирот на цифри му е 1). Меѓутоа, постои доволно голем природен број чиј што збир на цифри завршува на  $2d$  нули. ( $11\dots 11$  со  $10^{2d}$  единици е таков што е поголем од збирот на цифри му е  $10^{2d}$ ). Тогаш периодот со должина  $d$  мора да се јави целосно во бројот  $S(10^{2d})$ , од каде мора да се состои само од нули.

б) Бројот  $0.P(1)P(2)\dots$  е ирационален ако е непериодичен. Да претпоставиме дека бројот е периодичен и нека периодот има должина  $d$ . Јасно е дека периодот мора да содржи цифри различни од 0 бидејќи во спротивно бројот би бил од облик  $0.P(1)P(2)\dots P(k)$  и секогаш постои број поголем од  $k$  чиј производ на цифри е различен од 0.(на пример  $11\dots 11$  со доволно многу единици е поголем од  $k$  а производот на цифри му е 1). Броевите од облик  $\underbrace{22\dots 2}_{m} \underbrace{55\dots 5}_m$  може да се изберат

произвилно големи и јасно е дека производот на тие броеви е  $10^m$ . Ако го избереме  $m > 2d$ , тогаш периодот мора целосно да се јави во бројот  $S(\underbrace{22\dots 2}_{m} \underbrace{55\dots 5}_m)$  од каде мора да се состои само од нули.

**3.** Со  $\mathbb{Z}^*$  и  $\mathbb{N}_0$  се означени множеството од сите ненулти цели броеви и множеството од сите ненегативни цели броеви, соодветно. Најди ги сите пресликувања  $f : \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{N}_0$  за кои се исполнети следниве два услови :

- (1) за секои  $a, b \in \mathbb{Z}^*$  за кои  $a + b \in \mathbb{Z}^*$  важи  $f(a + b) \geq \min\{f(a), f(b)\}$  ;
- (2) за секои  $a, b \in \mathbb{Z}^*$  важи  $f(ab) = f(a) + f(b)$ .

**Решение.** Едно тривијално решение е константното пресликување  $f \equiv 0$ . Нека  $f$  е едно нетривијално пресликување за кое важат (1) и (2). Ќе покажеме дека постои природен број  $c$  и

прост број  $p$  за кој е исполнето  $f(a) = cv_p(a)$  за секој  $a \in Z^*$ , каде  $v_p(a)$  е експонентот на  $p$  во канонската факторизација на  $a$ : да забележиме најпрво дека  $f(1) = f(-1) = 0$  (доказ:

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1), \quad f(1) = f((-1) \cdot (-1)) = f(-1) + f(-1);$$

од ова и од (2) следува дека постои прост број  $p$  за кој  $f(p) \neq 0$ ; за  $c := f(p)$  ќе покажеме дека важи  $f(a) = cv_p(a)$  за секој  $a \in Z^*$ ; имено, за секој прост број  $q \neq p$  постојат ненулти цели броеви  $\alpha, \beta$  за кои  $1 = ap + bq$ , па исполнето е неравенството  $0 = f(ap + bq) \geq \min\{f(ap), f(bq)\}$ ; од

$$f(ap) = f(\alpha) + f(p) \geq f(p) = c \neq 0$$

следува  $f(bq) = 0$  и  $f(q) = 0$ ; нека  $a = \pm p^k q^\beta r^\gamma \dots$  е канонската факторизација на  $a$ ; тогаш

$$f(a) = f(\pm p^k) + f(q^\beta) + f(r^\gamma) + \dots = f(\pm 1) + f(p^k) = kf(p) = cv_p(a)$$

Останува да забележиме дека секое вакво пресликување ги исполнува условите (1) и (2) па претставува нетривијално решение на поставениот проблем.

## Изборен натпревар за ИМО 2013

### Втор ден, 09.04.2013

- 1.** Нека  $a > 0, b > 0, c > 0$  и  $a + b + c = 1$ . Докажи го неравенството

$$\frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b + c} + \frac{2a^2 + b^2 + 2c^2}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

**Решение.** Од  $1 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$  добиваме

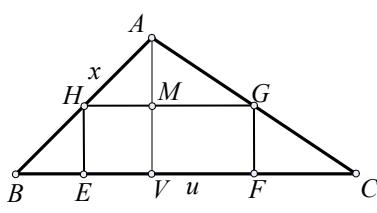
$$ab + bc + ca + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Го користиме неравенството  $(a^{n-1} - b^{n-1})(a - b) \geq 0$  за  $n \geq 1$  при што равенство е исполнето кога  $a = b$ . Пследното неравенство е еквивалентно со неравенството  $a^n + b^n \geq ab(a^{n-2} + b^{n-2})$  кога  $n \geq 2$ . Во конкретниот случај имаме:  $\frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2} \geq ab$ ,  $\frac{b^3 + c^3}{b + c} \geq bc$  и  $\frac{c^2 + a^2}{2} \geq ca$ . Со собирање на последните три неравенства добиваме  $\frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{2} \geq ab + bc + ac$  од каде

$$\frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b + c} + c^2 + a^2 + \frac{b^2}{2} \geq ab + bc + ac + \frac{c^2 + a^2 + b^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Јасно е дека знак равенство се достигнува кога  $a = b = c = \frac{1}{3}$ .

- 2.** Правоаголник велиме дека е вписан во триаголник ако две негови соседни темиња лежат на една страна на триаголникот, а другите две лежат на останатите две страни на триаголниот. Нека дожините на страните на триаголниот  $ABC$  се познати. Колкава е најмалата можна дожина на дијагонала на правоаголник вписан во овој триаголник.



**Решение.** Нека четириаголникот  $EFGH$  е вписан во триаголникот  $ABC$  така што  $E$  и  $F$  лежат на  $BC$  и  $G$  лежи на  $AC$  и  $H$  лежи на  $AB$ . Нека дожините на страните на триаголникот  $ABC$  ги означиме со  $a$ ,  $b$  и  $c$  и нека со  $h$  ја означиме дожината на висината спуштена од  $A$  кон  $BC$ . Ставаме  $\overline{AH} = x$ ,  $\overline{EF} = u$  и  $\overline{FG} = v$ .

Од  $\Delta AHG \approx \Delta ABC$  имаме  $u = \frac{ax}{c}$ , од  $\Delta BEH \approx \Delta BVA$

добиваме  $v = \frac{h(c-x)}{c}$ . Ако со  $l$  ја означиме дожината на дијагоналата на  $EFGH$ , добиваме

$$l^2 = \frac{a^2 x^2}{c^2} + \frac{h^2(c-x)^2}{c^2}. \quad \text{Најмалата вредност што ја има параболата } f(x) = \frac{a^2 x^2}{c^2} + \frac{h^2(c-x)^2}{c^2} \text{ е}$$

$\frac{a^2h^2}{a^2+h^2}$  и таа се добива кога  $x=\frac{h^2c}{a^2+h^2}$ . Да забележиме  $\frac{a^2h^2}{a^2+h^2}=\frac{4P^2}{a^2+4P^2}$ , каде  $P$  е

плоштината на триаголникот. Сега ако истото го направиме кога впишаниот правоаголник има две соседни темиња кои лежат на страната  $AC$ , за најмала можна вредност на дијагоналата добиваме

$$\frac{4P^2}{b^2+\frac{4P^2}{b^2}}.$$

$$a^2+\frac{4P^2}{a^2}-b^2-\frac{4P^2}{b^2}=(a^2-b^2)\left(1-\frac{4P^2}{a^2b^2}\right).$$

Бидејќи  $ab \geq 2P$  последниот израз е поголем или једнаков на 0 ако и само ако  $a \geq b$ . Со други зборови, најмалата вредност на  $l$  се добива кога правоаголникот има две соседни темиња кои лежат на најголемата страна на триаголникот. Нека  $a$  е најголемата страна. Веќе видовме дека

тогаш најмалата вредност на  $l$  е  $\sqrt{\frac{2P}{a^2+\frac{4P^2}{a^2}}}$  и таа се добива кога  $\overline{AH}=x=\frac{h^2c}{a^2+h^2}=\frac{4P^2c}{a^4+4P^2}$ . Да

забележиме дека плоштина е позната и може да биде изразена преку страните на триаголникот на пример преку Херонова формула.

**3.** Нека  $a$  и  $n$  се цели броеви . Дефинираме  $a_n=1+a+a^2+\dots+a^{n-1}$ . Докажи дека ако  $a^p \equiv 1 \pmod{p}$  за секој прост делител  $p$  на  $n_2-n_1$ , бројот  $\frac{a_{n_2}-a_{n_1}}{n_2-n_1}$  е цел.

**Решение.** Лема. Нека  $a$  и  $n$  се цели броеви такви што  $a \equiv 1 \pmod{p}$  за секој прост  $p|n$  и  $a_n=1+a+a^2+\dots+a^{n-1}$ . Тогаш  $n|a_n$ .

Доказ на лемата. Нека  $p^r$  е најголемиот степен на простиот број  $p$  таков што  $p^r|n$ . Ќе го докажеме равенството

$$1+a+a^2+\dots+a^{n-1}=\left(1+a^{p^r}+a^{2p^r}+\dots+a^{p^r(\frac{n}{p^r}-1)}\right)\prod_{k=1}^r\left(1+a^{p^{k-1}}+a^{2p^{k-1}}+\dots+a^{(p-1)p^{k-1}}\right)$$

за секој цел број  $a$ . Ако  $a=1$  левата страна изнесува  $n$  а десната страна на равенството изнесува  $\frac{n}{p^r} \cdot p^r = n$  (по едно  $p$  за секој член во производот). Нека  $a \neq 1$ . Ако ја помножиме и левата и десната страна со  $a-1$  од десно добиваме

$$\begin{aligned} & (a-1)(1+a+\dots+a^{p-1})(1+a^p+a^{2p}+\dots+a^{(p-1)p})\dots\left(1+a^{2p^r}+\dots+a^{p^r(\frac{n}{p^r}-1)}\right) \\ & = (a^p-1)(1+a^p+a^{2p}+\dots+a^{(p-1)p})\dots\left(1+a^{2p^r}+\dots+a^{p^r(\frac{n}{p^r}-1)}\right) \\ & = (a^{p^2}-1)(1+a^{p^2}+\dots+a^{(p-1)p^2})\dots\left(1+a^{2p^r}+\dots+a^{p^r(\frac{n}{p^r}-1)}\right)= \\ & = (a^{p^r}-1)\left(1+a^{2p^r}+\dots+a^{p^r(\frac{n}{p^r}-1)}\right)=a^n-1 \end{aligned}$$

Секој од изразите во производот е делив со  $p$  бидејќи

$$1+a^{p^{k-1}}+a^{2p^{k-1}}+\dots+a^{(p-1)p^{k-1}}=(a^{p^{k-1}}-1)+(a^{2p^{k-1}}-1)+\dots+(a^{(p-1)p^{k-1}}-1)+p$$

секој од изразите во заградите е делив со  $p$ .

Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека  $n_1 < n_2$ . Јасно е дека

$$\frac{a_{n_2} - a_{n_1}}{n_2 - n_1} = \frac{1+a+\dots+a^{n_2-1}-1-a-\dots-a^{n_1-1}}{n_2 - n_1} = \frac{a^{n_1}(1+a+\dots+a^{n_2-n_1-1})}{n_2 - n_1}.$$

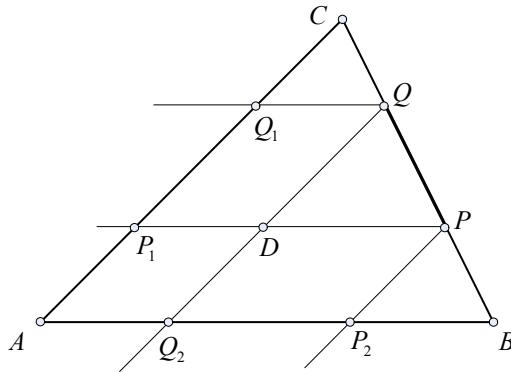
Со користење на лемата добиваме дека  $(n_2 - n_1) | a_{n_2 - n_1}$  од каде добиваме дека бројот  $\frac{a_{n_2} - a_{n_1}}{n_2 - n_1}$  е природен број.



17-та JMMO

XVII Juniorska makedonska matemati~ka  
olimpijada 2013  
Природно математички факултет-Скопје  
25.05.2013, Skopje

- 1.** Нека  $x$  е реален број така што броевите  $x^3$  и  $x^2 + x$  се рационални.  
Докажи дека бројот  $x$  е рационален.



**2.** Даден е триаголникот  $\Delta ABC$  и отсека  $PQ$  со долина  $t$  на отсечката  $BC$ , така {то  $P$  е меѓу  $B$  и  $Q$  и  $Q$  е меѓу  $P$  и  $C$ . Од токата  $P$  се повлечени паралелни првии  $AB$  и  $AC$  кои ги се~ат  $AC$  и  $AB$  во  $P_1$  и  $P_2$ , соодветно. Од токата  $Q$  се повлечени паралелни првии  $AB$  и  $AC$  кои ги се~ат  $AC$  и  $AB$  во  $Q_1$  и  $Q_2$ , соодветно. Докажи дека збирот од плоштините на  $PQQ_1P_1$  и  $PQQ_2P_2$  не зависи од положбата на  $PQ$  на  $BC$ .

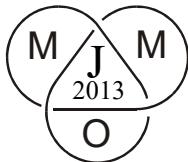
- реални броеви за кои важи  $abc=1$ . Докажи дека важи неравенството  $\frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq 3$ .

Кога важи равенство?

- 4.** Даден е правилен шестаголник со страна 1. Во внатрешноста на шестаголникот дадени се  $m$  точки такви што никои три од нив не се колinearни. Шестаголникот е разделен на триаголници, при што секоја од дадените  $m$  точки е секое од темињата на шестаголникот е теме на делбен триаголник. Делбени триаголници немаат заедничка внатрешна точка. Докажи дека постои делбен триаголник чија плоштина не е поголема од  $\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}$ .

- 5.** Најди ги сите броеви  $p$ ,  $q$  и  $r$ , такви што  $p$  и  $r$  се прости,  $q$  е позитивен цел број и ја задоволуваат равенката:

$$(p+q+r)^2 = 2p^2 + 2q^2 + r^2.$$



17 - ta JMMO

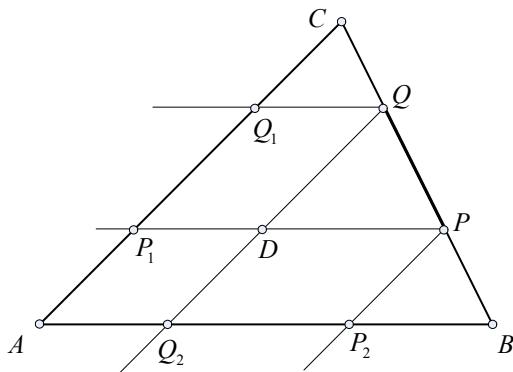
**XVII Juniorska makedonska matemati~ka  
olimpijada 2013**  
 Природно математички факултет-Скопје  
 25.05.2013, Skopje

**1.** Нека  $x$  е реален број така што броевите  $x^3$  и  $x^2 + x$  се рационални. Докажи дека бројот  $x$  е рационален.

**Решение.** Нека  $a = x^3, b = x^2 + x$ . Тогаш  $a = x^3 + x^2 - x^2 - x + x = xb - b + x$  или  $a = x(b+1) - b$ .

Јасно е дека  $b \neq -1$ , бидејќи во спротивно  $x^2 + x = -1$  или  $(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = -1$ . Тогаш  $(x + \frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{4}$  што не е можно. Добиваме дека  $x = \frac{a+b}{b+1}$  што е рационален број бидејќи броевите  $a$  и  $b$  се рационални.

**2.** Даден е триаголникот  $\Delta ABC$  и отсека  $PQ$  со должина  $t$  на отсечката  $BC$ ,



така {то  $P$  е меѓу  $B$  и  $Q$  и  $Q$  е меѓу  $P$  и  $C$ . Од то~ката  $P$  се повлечени паралелни првии со  $AB$  и  $AC$  кои ги се~ат  $AC$  и  $AB$  во  $P_1$  и  $P_2$ , соодветно. Од то~ката  $Q$  се повлечени паралелни првии со  $AB$  и  $AC$  кои ги се~ат  $AC$  и  $AB$  во  $Q_1$  и  $Q_2$ , соодветно. Докази дека збирот од пло~тините на  $PQQ_1P_1$  и  $PQQ_2P_2$  не зависи од положбата на  $PQ$  на  $BC$ .

**Решение.** Нека  $D$  е пресекот на  $PP_1$  и

$QQ_2$ . Да забележиме дека  $P_DQ_2P_2 = 2P_{\Delta ADP}$  и  $P_QDP_1Q_1 = 2P_{\Delta ADQ}$ . Па сега имаме:

$$P_PQQ_2P_2 + P_PQ_1Q_1Q = P_PDQ_2P_2 + P_QDP_1Q_1 + 2P_{\Delta PQD} = 2P_{\Delta ADP} + 2P_{\Delta ADQ} + 2P_{\Delta PQD} = 2P_{\Delta APQ} = \overline{PQ} \cdot h_a$$

**3.** Нека  $a, b$  и  $c$  се позитивни реални броеви за кои важи  $abc=1$ . Докажи дека важи неравенството  $\frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq 3$ .

Кога важи равенство?

**Решение.** Бидејќи  $(1 - \sqrt{bc})^2 \geq 0$  следува дека  $1 + bc \geq 2\sqrt{bc}$  т.е.  $\frac{1}{2\sqrt{bc}} \geq \frac{1}{1 + bc}$ . Добиваме дека важи

$$\frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{1}{1+a} = \frac{1}{2\sqrt{bc}} + \frac{1}{1+a} \geq \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+a} = \frac{1}{1+\frac{1}{a}} + \frac{1}{1+a} = 1 \dots (1).$$

На ист начин се докажува дека

$$\frac{\sqrt{b}}{2} + \frac{1}{1+b} \geq 1 \dots (2) \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{c}}{2} + \frac{1}{1+c} \geq 1 \dots (3).$$

Со собирање на (1), (2) и (3) се добива бараното неравенство. Да забележиме дека равенство важи ако и само ако  $1 = \sqrt{bc}$  т.е.  $a = 1$ . На ист начин добиваме  $b = 1$  и  $c = 1$ .

**4.** Даден е правилен шестаголник со страна 1. Во внатрешноста на шестаголникот дадени се  $m$  точки такви што никои три од нив не се колinearни. Шестаголникот е разделен на триаголници, при што секоја од дадените  $m$  точки и секое од темињата на шестаголникот е теме на делбен триаголник. Делбени триаголници немаат заедничка внатрешна точка. Докажи дека постои делбен триаголник чија плоштина не е поголема од  $\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}$ .

**Решение.** Најпрво го определуваме вкупниот број на делбени триаголници на кои е поделен дадениот шестаголник. Нека  $A$  е произволна точка од внатрешните  $m$  точки. Збирот од сите агли во точката  $A$  е  $360^\circ$  (збир од сите агли во  $A$  на сите триаголници кои таа точка ја имаат за свое теме). Од друга страна, збирот од сите агли во теме на шестаголникот е  $120^\circ$ . Бидејќи збирот на аглите во секој триаголник е  $180^\circ$ , бројот на делбени триаголници е:  $\frac{m \cdot 360^\circ + 6 \cdot 120^\circ}{180^\circ} = 2m + 4$ .

Нека претпоставиме спротивно на тврдењето, односно дека плоштината на секој од дадените делбени триаголници е поголема од  $\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}$ . Тогаш збирот на плоштините на сите делбени триаголници е поголем од  $(2m+4) \frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ , што не е можно бидејќи плоштината на дадениот шестаголникот е  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

**5.** Најди ги сите броеви  $p$ ,  $q$  и  $r$ , такви што  $p$  и  $r$  се прости,  $q$  е позитивен цел број и ја задоволуваат равенката:

$$(p+q+r)^2 = 2p^2 + 2q^2 + r^2.$$

**Решение.** По средување на равенката добиваме  $2r(p+q) = (p-q)^2$ . Бидејќи  $r$  е прост, следува дека  $r$  е делител на  $p-q$ , па  $r^2$  е делител на десната страна од последното равенство. Од каде следува дека  $r$  е делител на  $2(p+q)$ . Ако  $r > 2$ , тогаш  $r$  е делител на  $(p+q)$ , па мора  $r$  да е делител и на  $p$  и на  $q$ , но бидејќи  $p$  е прост, тоа е можно само ако  $p=r$  и  $q=sr$ . По средување добиваме  $2(1+s) = (s-1)^2$ , од каде  $s^2 - 4s - 1 = 0$ . Последното равенство нема целобройни решенија, па во овој случај равенката нема решение. Ако  $r=2$ , тогаш  $p$  и  $q$  се со иста парност, случајот кога  $p=2$  е невозможен исто како случајот  $p=r$  од претходно, па мора да бидат непарни. Нека  $a \neq 2$  е прост делител на  $p+q$ , тогаш мора  $a$  да е делител и на  $p-q$ , па мора да е делител и на  $p$  и на  $q$ , што е можно само ако  $p=a$  и  $q=sa$ , во овој случај добиваме  $4(1+s) = a(s-1)^2$ , од каде  $as^2 - (2a+4)s + (a-4) = 0$ , со решенија  $\frac{a+2+\sqrt{a^2+4a+4-a^2+4a}}{a} = \frac{a+2+2\sqrt{a+1}}{a}$ . Ако бројот  $\sqrt{2a+1}$  е цел, тогаш е непарен, па  $2a+1 = 4b^2 + 4b + 1$ , од каде  $a = 2b(b+1)$ , па не може да е прост. Според ова  $p+q$  и  $p-q$  мора да се степени на 2, то ест  $p-q=2^k$  и  $p+q=2^{2k-2}$ , од каде  $2p=2^k+2^{2k-2}$  и  $2q=2^{2k-2}-2^k$  и бидејќи  $p$  и  $q$  се непарни, мора  $k=1$ , но тогаш  $p+q=1$ , што не е можно. Следува дека равенката нема решенија кои се прости броеви.

## Резултати од 20-та Македонска математичка олимпијада

шифра	име и презиме	клас	училиште	град	ментор	медал
1	Мартин Јосифоски	III	Јахја Кемал	Гостивар	Невзат Солак	златен
2	Бојан Серафимов	III	П.С.У. „Јахја Кемал"-Бутел	Скопје	Нурдан Озтурк	златен
3	Антониј Мијоски	IV	СОУ Гимн. „Мирче Ацев"	Прилеп	Маријана Спиркоска	златен
4	Марија Тепергозова	III	П.С.У. „Јахја Кемал"-Авток.	Скопје	Јилмаз Деликташ	златен
5	Сања Симоновиќ	I	Јахја Кемал	Струга	Мехмет Озун	златен
6	Никола Грунчевски	II	П.С.У. „Јахја Кемал"-Струга	Струга		златен
7	Божид. Стевановски	II	П.С.У. „Јахја Кемал"-Бутел	Скопје	Нурдан Озтурк	сребрен
8	Динер Текешановска	III	П.С.У. „Јахја Кемал"-Бутел	Скопје	Нурдан Озтурк	сребрен
9	Јован Тасев	II	П.С.У. „Јахја Кемал"-Авток.	Скопје	Јилмаз Деликташ	сребрен
10	Драган Трајчев	I	П.С.У. „Јахја Кемал"-Авток.	Скопје	Јилмаз Деликташ	сребрен
11	Васил Кузевски	III	Гимназија НОВА	Скопје	Филип Николовски	сребрен
12	Васил Василев	I	П.С.У. „Јахја Кемал"-Авток.	Скопје	Јилмаз Деликташ	сребрен
13	Теодор Дуевски	III	П.С.У. „Јахја Кемал"-Авток.	Скопје	Јилмаз Деликташ	бронзен
14	Јован Крајевски	IV	„Раде Јовчевски-Корчагин"	Скопје	Сузана Ничота	бронзен
15	Fisnik Limani	III	СОУ Гимн. „Сами Фрашери"	Куманово	Skender Avdiu	бронзен
16	Росица Дејановска	IV	П.С.У. „Јахја Кемал"-Бутел	Скопје	Нурдан Озтурк	бронзен
17	Андреј Илиевски	I	ПСУ „Алгоритам Центар"	Скопје	Ирена Младеновска	бронзен
18	Ана Чалоска	II	Јахја Кемал	Гостивар	Мехмет Кетенци	бронзен
19	Еродита Салији	III	СОУ Гостивар	Гостивар		бронзен
20	Бесник Исмаили	IV	СОУ Гостивар	Гостивар	Шпетим Рецепи	бронзен
21	Климент. Крстевска	II	П.С.У. „Јахја Кемал"-Бутел	Скопје	Нурдан Озтурк	бронзен
22	Христ.Кочанковски	IV	СОУ Гимн. „Ј. Б. Тито"	Битола	Оливера Ѓорѓиева	бронзен
23	Макс. Трифуновски	IV	П.С.У. „Јахја Кемал"-Бутел	Скопје	Димитар Треневски	бронзен
24	Христи. Босилковски	I	Јахја Кемал	Струга	Зухал Озул	бронзен
25	Стојан Милошев	III	П.С.У. „Јахја Кемал"-Авток.	Скопје	Јилмаз Деликташ	бронзен
26	Елена Ефтимова	III	СОУ „Јахја Кемал"	Струмица	Озгур Емек	бронзен
27	Марко Маркоски	I	СОУ Гимн. „Мирче Ацев"	Прилеп	Афродита Стефаноска	бронзен
28	Теодора Бујароска	II	СОУ „Климент Охридски"	Охрид	Валентин Чачор	
29	Благица Јанева	II	П.С.У. „Јахја Кемал"-Бутел	Скопје	Нурдан Озтурк	
30	Симона Миладинова	I	П.С.У. „Јахја Кемал"-Бутел	Скопје	Хатице Петук	
31	Костадин Тенев	IV	Гимназија	Струмица	Елизабета Витанова	
32	Мартин Хорват	III	П.С.У. „Јахја Кемал"-Бутел	Скопје	Нурдан Озтурк	
33	Март. Величковска	I	СУТСГ „Орце Николов"	Скопје	Софija Брезо. Темелкоска	
34	Виктор Домазетоски	II	СОУ „Климент Охридски"	Охрид	Валентин Чачор	
35	Стефан Николоски	II	СОУ Гимн. „Мирче Ацев"	Прилеп	Калина Секуловска	
36	Сара Дранго	II	П.С.У. „Јахја Кемал"-Бутел	Скопје	Нурдан Озтурк	
37	Марта Стојковска	II	П.С.У. „Јахја Кемал"-Бутел	Скопје	Нурдан Озтурк	
38	Мирјана Ристовска	IV	Гимназија „Гоце Делчев"	Куманово	Филип Младеновски	
39	Никола Буџакоски	III	СОУ „Климент Охридски"	Охрид	Сузана Недеска Маркоска	
40	Весна Трифуноска	II	СОУ Гостивар	Гостивар	Ирена Нофитоска	

## Резултати од изборни натпревари за ИМО 2013 година

1	Мартин Јосифоски	III	Јахја Кемал	Гостивар	8	0	0	8	0	1	17
2	Бојан Серафимов	III	П.С.У. Јахја Кемал	Скопје	8	8	1	8	6	7	38
3	Антониј Мијоски	IV	СОУ Гимназија Мирче Ацев	Прилеп	8	0	0	8	0	2	18
4	Марија Тепергозова	III	П.С.У. Јахја Кемал	Скопје	2	0	1	8	2	4	17
5	Сања Симоновиќ	I	Јахја Кемал	Струга	0	0	1	8	0	1	10
6	Никола Грунчевски	II	П.С.У. Јахја Кемал	Струга	8	0	2	8	0	2	20
7	Божидар Стевановски	II	П.С.У. Јахја Кемал	Скопје	8	0	2	8	2	1	21
8	Динер Текешановска	III	П.С.У. Јахја Кемал	Скопје	2	0	0	8	2	2	14
9	Јован Тасев	II	П.С.У. Јахја Кемал	Скопје	8	7	1	8	0	7	31
10	Драган Трајчев	I	П.С.У. Јахја Кемал	Скопје	8	0	2	8	1	1	20

11	Васил Кузевски	III	Гимназија НОВА	Скопје	8	8	8	8	8	2	42
12	Васил Василев	I	П.С.У. Јахја Кемал	Скопје	8	0	0	8	0	0	16

Резултати од 17-та Јуниорска македонска математичка олимпијада

р.б.	име и презиме	одд.	училиште	град	медал	ментор
1	Андреј Илиевски	I	ПСУ Алгоритам Центар	Скопје	златен	Ирена Младеновска
2	Теа Стоилковска	VIII	ОУ Браќа Миладиновци	Куманово	златен	Дафина Јосимовска
3	Христ. Босилковски	I	ПСУ Јахја Кемал	Струга	сребрен	Зухал Озун
4	Филип Јошевски	VIII	ОУ Гоце Делчев	Битола	сребрен	Марија П. Јаковлевска
5	Стефан Петревски	VIII	ОУ Ј X Песталоци	Скопје	сребрен	Б.Чешларова, Д.Нацев
6	Никола Даневски	VII(8)	ОУ Кочо Рачин	Куманово	бронзен	Снежана Стефановска
7	Филип Селамовски	VIII	ОУ Стив Наумов	Скопје	бронзен	Менка Крстева
8	Анастасија Трајанова	VIII	ОУ Никола Карев	Радовиш	бронзен	Елизабета Мазновска
9	Мики Митевски	VIII	ОУ Браќа Миладиновци	Пробиштип	пофал.	Благица Милисова
10	Филип Михов	VII(8)	ОУ Лазо Ангеловски	Скопје	пофал.	Мирјана Мојсојска
11	Сара Караканакова	VII(8)	ООУ Никола Вапцаров"	Струмица	пофал.	Фроска Томова
12	Љупче Милошески	I	ПСУ Јахја Кемал	Струга	пофал.	Мехмет Озун
13	Ирина Шафкуловска	VIII	ОУ Др.-Тр. Пановски	Битола	пофал.	Ставрос Пападимитриу
14	Филип Трајковски	VIII	ОУ Н. Г. Дуња	Скопје	пофал.	Ана Малиминова
15	Меланија Краљевска	VIII	ОУ Кочо Рачин	Куманово	пофал.	Драги Карапаноловски
16	Калина Стефанова	VII(8)	ОУ Љубен Лапе	Скопје		Александра П.Митановска
17	Драгана Крстевска	VIII	ОУ Т.Х.Тефов	Кавадарци		Нада Ицева
18	Славчо Премчески	VII(8)	ООУ Ѓорче Петров	с. Ропотово		Маргарита Илиеска
19	Горазд Димитров	VII(9)	ОУ Љубен Лапе	Скопје		Анета Костоска
20	Теодора Пецаковска	VII(9)	ОУ Тодор Ангеловски"	Битола		Биљана Јошевска
21	Мими Филова	VII(8)	ОУ Владо Кантариес	Гевгелија		Јасмина Икономова
22	Стефан Мерданоски	VII(8)	ОУ Гоце Делчев	Гостивар		Гуро Трпески
23	Димитар Бајрактаров	VIII	ОУ Видое Подгорец	Струмица		Горче Серафимов
24	Милан Тасевски	VII(9)	ОУ Д. И.Малешевски	Берово		Лилјана Багашовска
25	Иван Даневски	VII(8)	ОУ Св.Кл.Охридски	Делчево		Елизабета Орлова
26	Јована Костоска	VIII	ОУ Кочо Рачин	Прилеп		Александра Христоска
27	Ивона Дамеска	VIII	ОУ Кл.Охридски	Прилеп		Лидија Карапесеска
28	Надежда Илиева	VII(8)	ООУ М.М. Брицо	Лозово		Владимир Цветковски
29	Јована Чалоска	VII(9)	ОУ Гоце Делчев	Гостивар		Гуро Трпески
30	Аритон Цветаноски	VII(9)	ОУ Григор Приличев	Охрид		Анита Николоска
31	Љупка Коцева	VII(8)	ОУ Кирил и Методиј	Кочани		Хера Серафимова
32	Михаела Петровска	VII(8)	ОУ Љубен Лапе	Скопје		Александра П. Митановска
33	Ѓорѓи Коцески	VII(9)	ОУ К.Г. -Јане	Прилеп		Лилјана Ковилоска
34	Сара Сталевска	VII(9)	ОУ Христо Узунов	Охрид		Митреска Слаѓана
35	Бојан Софониевски	VII(8)	ОУ Д-р Вл Полежиноски	Кичево		Бране Гаврилоски
36	Матеа Ташковска	VII(9)	ОУ Димитар Миладинов	Скопје		Катерина Стаменковиќ
37	Ангела Поповска	VII(9)	ОУ Љубен Лапе	Скопје		Сонја Данева
38	Викторија Костова	VII(9)	ОУ Даме Груев	Битола		Мирјана Тасевска
39	Бојана Чагороска	VII(8)	ОУ Љубен Лапе	Скопје		Александра П.Митановска
40	Инес Лесновска	VII(8)	ОУ Гоце Делчев	Прилеп		Емилија Николоска

## Contest

<b>1.</b> 20-th MACEDONIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD	<b>5</b>
<b>2.</b> 20-th MACEDONIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD, solutions	6
<b>3.</b> Team Selection Test for IMO 2013, First day 08.04.2013	9
<b>4.</b> Team Selection Test for IMO 2013, Second day 09.04.2013	11
<b>5.</b> XVII Junior Macedonian Mathematical Olympiad 2013	13
<b>6.</b> XVII Junior Macedonian Mathematical Olympiad 2013, solutions	14
<b>7.</b> Junior Balkan mathematical Olympiad	16
<b>8.</b> 30 <sup>th</sup> Balkan Mathematical Olympiad	19
<b>9.</b> 20-та Македонска математичка олимпијада	22
<b>10.</b> 20-та Македонска математичка олимпијада, решенија	23
<b>11.</b> Изборен натпревар за ИМО 2013, прв ден 08.04. 2013	26
<b>12.</b> Изборен натпревар за ИМО 2013, втор ден 09.04. 2013	28
<b>13.</b> XVII Јуниорска македонска математичка олимпијада	30
<b>14.</b> XVII Јуниорска македонска математичка олимпијада, решенија	31
<b>15.</b> Резултати ММО	33
<b>16.</b> Резултати JMMO	34
<b>17.</b> Содржина	35

