

LXI олимпијада

1. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Точката P е во внатрешноста на $ABCD$ и важи

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Докажи дека симетралите на внатрешните агли $\angle ADP$ и $\angle PBC$ и симетралата на отсечката AB се сечат во една точка.

2. Дадени се реални броеви a, b, c, d за кои важи

$$a \geq b \geq c \geq d > 0 \text{ и } a + b + c + d = 1.$$

Докажи дека

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1.$$

3. Дадени се $4n$ камчиња со маси $1, 2, \dots, 4n$. Секое камче е обоено во една од n бои и во секоја боја се обоени точно четири камчиња. Докажи дека камчињата можеме да ги поделиме во две купчиња така што се исполнети следниве услови:

- 1) Вкупните маси на камчињата во двете купчиња се еднакви.
- 2) Секое купче содржи по две камчиња од секоја боја.

4. Даден е природен број $n > 1$. На една планина постојат n^2 станици кои по парови се на различни висини. Две компании A и B управуваат со жичари и секоја од нив има по k жичари, при што секоја жичара овозможува превоз од една станица до друга станица која е на поголема висина (без попатни застанувања). Сите k жичари на компанијата A имаат k различни почетни станици и k различни крајни станици, при што жичарата која има повисока почетна станица има и повисока крајна станица. Истото важи и за компанијата B . Велиме дека една компанија поврзува две станици ако е можно од пониската станица да се стигне во повисоката станица со користење на една или повеќе жичари на таа компанија (притоа други движења меѓу станиците не се дозволени).

Опреди го најмалиот број k за кој сигурно постојат две станици кои ги поврзуваат двете компании.

5. Даден е шпил од $n > 1$ карти. На секоја карта е запишан еден природен број. Шпилот е таков што аритметичката средина на броевите запишани на произволни две карти од шпилот е еднаква на геометриската средина на броевите запишани на некое множество кое се состои од една или повеќе карти од шпилот.

Опреди го бројот n за кој мора броевите запишани на сите карти на шпилот да се еднакви.

6. Докажи дека постои позитивна константа c таква што е исполнето следново тврдење:

Нека $n > 1$ е природен број и S е множество од n точки во рамнината такви што растојанието меѓу секои две точки на множеството S е поголемо или еднакво на 1. Тогаш постои права l која го разделува S таква што растојанието од било која точка на множеството S до правата l е поголемо или еднакво на $cn^{-\frac{1}{3}}$.

(Правата l го разделува множеството S ако некоја отсечка чии крајни точки се во S ја сече правата l .)